

# Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## A NOTE ON THE HOPF-STIEFEL FUNCTION

by Shalom ELIAHOU\*) and Michel KERVAIRE

### INTRODUCTION

In the preceding paper of this volume [P], Alain Plagne gives a formula for the (generalized) Hopf-Stiefel function  $\beta_p$ .

Given a prime number  $p$ , and two positive integers  $r, s$ , recall that  $\beta_p(r, s)$  is defined as the smallest integer  $n$  such that  $(x + y)^n \in (x^r, y^s)$ , where  $(x^r, y^s)$  is the ideal generated by  $x^r$  and  $y^s$  in the polynomial ring  $\mathbb{F}_p[x, y]$ .

Plagne's theorem reads

**THEOREM 1.** *Let  $r, s$  be positive integers, then  $\beta_p(r, s)$  is given by the formula*

$$(1) \quad \beta_p(r, s) = \min_{t \in \mathbb{N}} \left( \left\lceil \frac{r}{p^t} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{p^t} \right\rceil - 1 \right) p^t.$$

In [P], this formula is derived as a corollary of a theorem on Additive Number Theory, Theorem 4, which is the main result of the paper.

Here, we give another proof of Theorem 1 using a purely arithmetical argument.

Recall from [EK, p. 22], where  $\beta_p(r, s)$  was introduced, that this function can be described in terms of the  $p$ -adic expansions of  $r - 1$  and  $s - 1$  as follows.

---

\*) During the preparation of this paper, the first author has partially benefited from a research contract with the Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique.

THEOREM 2. Let  $r - 1 = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$  and  $s - 1 = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$  be the respective  $p$ -adic expansions of  $r - 1$  and  $s - 1$ , with  $0 \leq a_i, b_i \leq p - 1$  for all  $i$ .

Define the integer  $k$  as the largest index for which  $a_k + b_k \geq p$ , if any exists. Otherwise, that is if  $a_i + b_i \leq p - 1$  for all  $i \geq 0$ , set  $k = -1$ .

Then,  $\beta_p(r, s)$  is determined by

$$(2) \quad \beta_p(r, s) = \left( \left\lfloor \frac{r-1}{p^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s-1}{p^{k+1}} \right\rfloor + 1 \right) p^{k+1}.$$

Although the point of Plagne's paper is to stress the relationship of his formula with Additive Number Theory, it is interesting to note that (1) also admits a direct proof using the above Theorem 2.

This is the content of the next section. In Section 2, we provide a simple proof of Theorem 2.

## 1. DERIVING THEOREM 1 FROM THEOREM 2

It is very easy to understand the relationship of the floor-function  $\lfloor \xi \rfloor$ , or integral part of  $\xi$ , appearing in Theorem 2, with the ceiling-function  $\lceil \xi \rceil$ , the smallest integer at least as big as  $\xi$ , used in formula (1).

The main object of this section will be to locate the minimum over  $\ell \geq 0$  of the expression  $\left( \left\lfloor \frac{r}{p^\ell} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{p^\ell} \right\rfloor - 1 \right) p^\ell$  and to show that this minimum is attained at  $\ell = k + 1$  with  $k$  as defined in Theorem 2.

For every index  $\ell \geq 0$ , we have

$$0 < \frac{1 + \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i p^i}{p^\ell} \leq \frac{1 + \sum_{i=0}^{\ell-1} (p-1) p^i}{p^\ell} = 1.$$

Since  $r = 1 + \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ , it follows that

$$\left\lfloor \frac{r}{p^\ell} \right\rfloor = \sum_{i \geq 0} a_{i+\ell} p^i + 1.$$

Similarly, we have  $0 \leq \frac{\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i p^i}{p^\ell} \leq \frac{\sum_{i=0}^{\ell-1} (p-1) p^i}{p^\ell} = \frac{p^\ell - 1}{p^\ell} < 1$ , and

$$(3) \quad \left\lfloor \frac{r-1}{p^\ell} \right\rfloor = \sum_{i \geq 0} a_{i+\ell} p^i.$$