Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 49 (2003), p. 3–34

CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

par Gianmarco CAPITANIO *)

ABSTRACT. The minimax solution is a weak solution of a Cauchy problem for the Hamilton-Jacobi equation, constructed from a generating family (quadratic at infinity) of its geometric solution. In this paper we give a new construction of the minimax in terms of Morse theory, and we show its stability by small perturbations of the generating family. Then we show that the max-min solution coincides with the minimax solution. Finally, we consider the wave front corresponding to the geometric solution as the graph of a multi-valued solution of the Cauchy problem, and we give a geometric criterion to find the graph of the minimax.

INTRODUCTION

En 1991 Marc Chaperon a proposé, dans [Cha], une méthode géométrique pour construire des solutions faibles du problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(PC) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,q) + H(t,q,\partial_q u(t,q)) = 0\,, & \text{pour tout } t>0,\ q \in Q\,, \\ u(0,q) = u_0(q)\,, & \text{pour tout } q \in Q\,, \end{cases}$$

de hamiltonien H et donnée initiale u_0 sur une variété fermée Q.

La méthode classique des caractéristiques conduit, d'après une idée de Maslov, à considérer comme solution généralisée de (PC) une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace-temps $\mathbf{R} \times Q$, la *solution géométrique*.

La "projection" de la solution géométrique dans l'espace des jets d'ordre 0 sur Q est, en général, le graphe d'une fonction multivaluée. La méthode de minimax permet de déduire une "vraie" fonction à partir de cette solution multi-

*) Recherche soutenue par l'Istituto Nazionale di Alta Matematica "F. Severi".

valuée. L'outil principal dans cette construction sont les familles génératrices quadratiques à l'infini des sous-variétés lagrangiennes. Le théorème d'existence et d'unicité de ces familles permet d'associer à chaque point de l'espace-temps une fonction, quadratique à l'infini dans les paramètres (la famille génératrice évaluée en ce point), dont on considère la valeur critique de minimax. La fonction ainsi définie s'avère être une solution faible lipschitzienne de (PC), la *solution de minimax.*

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie on présente une nouvelle construction de la *valeur critique de minimax* d'une fonction quadratique à l'infini, basée sur la théorie de Morse. Cette construction permet de caractériser de manière simple le minimax d'une fonction générique parmi les fonctions quadratiques à l'infini en termes du complexe de Morse associé. Le résultat principal de cette partie est la *stabilité de la valeur critique de minimax par petites déformations* de la fonction.

Dans la deuxième partie on rappelle la construction de la solution géométrique de (PC) et on démontre que toute solution géométrique est isotope, pour temps finis, à la section nulle du fibré cotangent; elle admet donc une unique famille génératrice quadratique à l'infini $S(t,q;\xi)$. La solution de minimax est, en tout point fixé $(t_0>0,q_0)$ de l'espace-temps, le minimax de la fonction génératrice quadratique à l'infini, $\min\max\{\xi\mapsto S(t_0,q_0;\xi)\}$. La stabilité par petites déformations donne une preuve nouvelle (géométrique) de la continuité de cette solution. On montre aussi que la solution de *max-min*, définie de manière analogue, coïncide avec celle de minimax.

Dans la troisième partie on montre comment réduire le problème de déterminer la solution de minimax associée à un front d'onde (graphe d'une fonction multivaluée) de dimension quelconque au cas d'un tel front de dimension 1. Un théorème récent de Chekanov et Pushkar ([Ch2], [C-P]) permet alors d'établir un critère géométrique purement combinatoire pour déterminer le graphe de la solution de minimax directement sur le front d'onde.

REMERCIEMENTS. Plusieurs personnes m'ont aidé pendant la réalisation de ce travail: je les remercie très chaleureusement. Franco Cardin et Marc Chaperon m'ont introduit à ce sujet et m'ont posé le problème initial; ils ont suivi toujours avec intérêt ma recherche. Notamment, sans le soutien de Franco Cardin, la suite n'aurait pas été possible. Je dois à Emmanuel Ferrand les références [Bar], [Ch2] et [C-P]: il m'a expliqué le théorème de Chekanov-Pushkar et m'a suggéré de l'utiliser dans mon travail. Enfin, sans l'aide de Yuri Chekanov, le Théorème 3.5 serait encore une conjecture.