

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **50 (2004)**

Heft 3-4: **L'enseignement mathématique**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

must be equivalent to one of a finite number of forms  $r_i h_i$ . Now let  $q$  be the least common denominator of the coefficients of  $r_i h_i$ . If we could have  $f'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$  equivalent to  $r_i h_i$  for an infinite number of possible values of  $\alpha_2$ , with  $0 \leq \alpha_2 < 1$ , there would be two allowable values, say  $\beta$  and  $\gamma$ , with  $0 < |\beta - \gamma| < \frac{1}{2q}$ . Then considering  $f'(0, 1, 0, \dots, 0)$ , we see that  $f'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$  represents  $k - \beta^2$  for  $\alpha_2 = \beta$  and represents  $k - \gamma^2$  for  $\alpha_2 = \gamma$ . However

$$|(k - \beta^2) - (k - \gamma^2)| = |\beta^2 - \gamma^2| < \frac{1}{2q} |\beta + \gamma| < \frac{1}{q}$$

contradicting the fact that distinct values of  $r_i h_i$  are never closer than  $\frac{1}{q}$ . Similar considerations of  $f'(0, 0, 1, \dots, 0), \dots, f'(0, 0, \dots, 1, 0)$  show that there are only a finite number of allowable values of  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$  for each  $r_i h_i$ .

Finally, to show that the number of allowable values of  $\alpha_n$  in (8) is finite, consider the indefinite  $(n-1)$ -ary sections  $f'(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, 0, x_n)$ ,  $f'(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n, x_n)$  and  $f'(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, 2x_n, x_n)$ . At least one of these, called  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n)$  say, has a non-zero determinant (whose value depends only on  $k$  and the coefficients of  $g'$ ). So, taking  $\varepsilon_2 = \varepsilon |D(f)|^{1/n} |D(\psi)|^{-1/n-1} > 0$ ,  $\psi$  will represent a small positive value

$$v_2 < \varepsilon_2 |D(\psi)|^{1/n-1} = \varepsilon |D(f)|^{1/n}$$

unless it is equivalent to a multiple of one of a finite number of forms. Since  $N(\psi) = 1$ , there will again only be one allowable multiple for each of the finite number of forms. As before, we can also see that for each of the finite number of possibilities for  $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, k, g'$  there will only be a finite number of allowable values of  $\alpha_n$ .

It follows that the number of forms  $f \in \mathcal{E}_n$  for which (6) fails (for a given  $\varepsilon > 0$ ) is finite. So the theorem holds for  $n$ -ary forms.

#### REFERENCES

- [1] CASSELS, J. W. S. *An Introduction to Diophantine Approximation*. Camb. Univ. Press, Cambridge, 1957.
- [2] ——— *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer, Berlin, 1971.
- [3] CASSELS, J. W. S. and H. P. F. SWINNERTON-DYER. On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 248 (1955), 73–96.
- [4] DANI, S. G. and G. MARGULIS. Values of quadratic forms at integral points: an elementary approach. *L'Enseign. Math.* (2) 36 (1990), 143–174.

- [5] DAVENPORT, H. On indefinite ternary quadratic forms. *Proc. London Math. Soc.* (2) 51 (1950), 145–160.
- [6] JACKSON, T.H. Small positive values of indefinite binary quadratic forms. *J. London Math. Soc.* 43 (1968), 730–738.
- [7] — Small positive values of indefinite quadratic forms. *J. London Math. Soc.* (2) 1 (1969), 643–659.
- [8] OPPENHEIM, A. One-sided inequalities for quadratic forms : II quaternary forms. *Proc. London Math. Soc.* (3) 3 (1953), 418–429.
- [9] — Values of quadratic forms (I), (II). *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 4 (1953), 54–66.
- [10] VENKOV, B. A. On the extremal problem of Markov for indefinite ternary quadratic forms. *Izv. Akad. Nauk SSSR* 9 (1945), 429–494.
- [11] VULAKH, L. Y. On minima of indefinite rational quadratic forms. *J. Number Theory* 21 (1985), 275–285.
- [12] WATSON, G. L. One-sided inequalities for integral quadratic forms. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 9 (1958), 99–108.
- [13] — *Integral Quadratic Forms*. Camb. Univ. Press, Cambridge, 1960.
- [14] — Asymmetric inequalities for indefinite quadratic forms. *Proc. London Math. Soc.* (3) 18 (1968), 95–113.

(Reçu le 20 avril 2004)

J. Bochnak

Mathematics Department  
Vrije Universiteit  
De Boelelaan 1081a  
NL-1081 HV Amsterdam  
The Netherlands  
*e-mail*: bochnak@cs.vu.nl

T. Jackson

Mathematics Department  
University of York  
Heslington  
GB-York YO10 5DD  
England  
*e-mail*: thj1@york.ac.uk

Leere Seite

Blank page

Page vide