Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 52 (2006)
Heft: 1-2: L'enseignement mathématique

Artikel: Topologie des systoles unidimensionnelles
Autor: Babenko, Ivan K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2227

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 52 (2006), 109–142

TOPOLOGIE DES SYSTOLES UNIDIMENSIONNELLES

par Ivan K. Babenko

1. Préliminaires 109
2. Systoles relatives et homologie de groupes 112
   2.1 Classes homologiques d'ordre infini : théorème A 115
   2.2 Classes homologiques d'ordre finis : théorème B 117
3. Géométrie différentielle sur les polyèdres simpliciaux finis 119
   3.1 Principe de comparaison et d'extension 121
   3.2 Existence des extensions 126
   3.3 Démonstration du théorème A 133
4. Systoles associées aux groupes finis 135
   4.1 Démonstration du théorème B 135
   4.2 Topologie des $\mathbf{Z}_2$-systoles 137
5. Remarques finales et questions ouvertes 138
   Références 141

1. Préliminaires

La notion maintenant classique de systole unidimensionnelle tire son origine des résultats de C. Loewner et de P. Pu, établis il y a plus de cinquante ans. Rappelons brièvement les définitions principales (nous renvoyons le lecteur aux articles [8], [9], [17] ; pour plus d'information, voir aussi les livres [10], [19]).

Pour une variété riemannienne fermée non simplement connexe (M, g) de dimension m, désignons par $\mathrm{sys}_1(M, g)$ la plus petite longueur d'une ligne géodesique fermée non contractile sur M. Cette valeur est appelée *la systole* ou 1-*systole* de M par rapport à la métrique g. La principale direction de

recherche en géométrie et en topologie des systoles unidimensionnelles consiste à étudier l'invariant numérique suivant de M :

$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M, g)}{\mathrm{sys}_1(M, g)^m}, \tag{1.1}$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M. Le nombre (1.1) est appelé *constante systolique* de M. Nous pouvons résumer l'essentiel des recherches sur le sujet en deux questions :

1. *Quelles conditions topologiques sur M assurent $\sigma(M) > 0$?*
2. *Sachant que $\sigma(M) > 0$, peut-on évaluer $\sigma(M)$?*

Une réponse satisfaisante à la première question a été établie par Gromov [18] grâce à la notion de variété *essentielle*. Pour une variété quelconque (non simplement connexe) M, il existe une application

$$\Phi\colon M \longrightarrow K(\pi_1(M), 1), \tag{1.2}$$

unique à homotopie près, où $K(\pi_1(M), 1)$ est l'espace bien connu d'Eilenberg-MacLane, voir par exemple [28]. Soit $[M]_{\mathbf{k}}$ la classe fondamentale de M considérée à coefficients dans $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$ si M est orientable et à coefficients dans $\mathbf{k} = \mathbf{Z}_2$ sinon. Cette classe nous fournit un élément

$$\Phi_*([M]_{\mathbf{k}}) \in H_m(K(\pi_1(M), 1); \mathbf{k}).$$

La variété M est dite *essentielle* si $\Phi_*([M]_{\mathbf{k}}) \neq 0$, et *non-essentielle* sinon. Le résultat suivant de [18], chap. 0 donne une condition suffisante très maniable sur M pour garantir la stricte positivité de $\sigma(M)$.

THÉORÈME (Gromov). *Pour chaque variété essentielle M,*

$$\sigma(M) > 0.$$

On trouve également dans [18], chap. 5, 6, des bornes inférieures (non strictes) de $\sigma(M)$ pour certaines classes de variétés essentielles. Mais on est encore bien loin du calcul précis de $\sigma(M)$, même pour des variétés de nature topologique assez simple comme les espaces projectifs ou un peu plus générale comme les espaces lenticulaires.

Pour les variétés orientables, il est en fait nécessaire que M soit essentielle pour assurer la stricte positivité de $\sigma(M)$, comme cela a été démontré dans [2], §8. Dans cet article, l'invariance homotopique de $\sigma(M)$ a également

été prouvée. En d'autres termes, deux variétés équivalentes à homotopie près ont la même constante systolique σ.

La seconde question représente un problème très difficile. La valeur exacte de $\sigma(M)$ n'est connue que dans les trois cas suivants :

- le tore : $\sigma(T^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C. Loewner, voir [8]) ;
- le plan projectif : $\sigma(\mathbf{R}P^2) = \frac{2}{\pi}$ (P. Pu [26]) ;
- la bouteille de Klein : $\sigma(K^2) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (C. Bavard [7]).

Pour certaines variétés M, des bornes inférieures pour $\sigma(M)$ plus ou moins satisfaisantes sont connues. Cette question est assez avancée dans le cas des surfaces. On peut trouver plus d'information à ce sujet dans [9], [14], [17] et [18].

Le but principal de ce travail est de comparer les constantes systoliques de deux variétés de dimension donnée ayant le même groupe fondamental. La question sous-jacente à cet article est la suivante :

La donnée de $\Phi_*([M]_{\mathbf{k}})$ détermine-t-elle $\sigma(M)$?

Nous obtenons une réponse positive à cette question dans les deux cas suivants :

THÉORÈME a. *On se donne un groupe π de présentation finie. Soient M_i, $i = 1, 2$ deux variétés fermées, orientables de dimension $m \geq 4$, dont les groupes fondamentaux sont isomorphes à π. Soient $\phi_i \colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$ deux isomorphismes et*

$$\Phi_i \colon M_i \longrightarrow K(\pi, 1), \quad i = 1, 2$$

les applications caractéristiques induites par ϕ_i. Supposons que

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$$

est un élément d'ordre infini. Alors

$$\sigma(M_1) = \sigma(M_2).$$

Remarquons que dans ce cas, $\pi_1(M)$ est forcément un groupe infini.

THÉORÈME b. *Soit π un groupe fini contenant k éléments. On considère deux variétés orientables M_i, $i = 1, 2$, de dimension $m \geq 4$ et de groupe fondamental isomorphe à π. Supposons que, pour deux isomorphismes $\phi_i \colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$, on ait*

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$$

et que cet élément soit d'ordre k. Alors

$$\sigma(M_1) = \sigma(M_2).$$

Ces deux cas couvrent de nombreux exemples intéressants. Les théorèmes a et b sont les conséquences directes des théorèmes plus généraux A et B dont les énoncés exacts se trouvent dans les sous-sections 2.1 et 2.2 ci-dessous. L'essentiel de cet article est consacré aux démonstrations de ces résultats.

Pour des raisons techniques, nous supposons dans la suite que M est une variété orientable de dimension $m \geq 4$, l'hypothèse dimensionnelle intervenant essentiellement dans les démonstrations des théorèmes 3.8 et B. Pour des cas particuliers de groupes, comme $\pi = \mathbf{Z}_2$, la restriction dimensionnelle peut être abandonnée en utilisant une technique appropriée (voir [1]).

Dans le but de comparer les constantes systoliques de deux variétés distinctes, nous travaillons dans la classe des polyèdres. Les outils géométriques et topologiques qui nous seront nécessaires sont présentés dans la section 3. Nous aurons également besoin de comparer les constantes systoliques de variétés dont les groupes fondamentaux diffèrent. Pour cela, nous introduisons la notion de ϕ-systole ou systole relative. La systole homologique représente alors un cas particulier de ϕ-systole.

2. SYSTOLES RELATIVES ET HOMOLOGIE DE GROUPES

On se donne un groupe π de présentation finie et une classe d'homologie entière $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$. On dit que $\mathbf{a}$ est *réalisable* s'il existe une variété M et une application $\Phi \colon M \longrightarrow K(\pi, 1)$ qui vérifie $\Phi_*([M]) = \mathbf{a}$. Appelons cette réalisation *normalisée* si de plus, Φ_* est un épimorphisme entre les groupes fondamentaux. On sait que, pour certaines classes, aucune réalisation n'existe. Cependant, si $\mathbf{a}$ est une classe quelconque, on peut toujours trouver un entier N tel que $N\mathbf{a}$ soit réalisable (voir R. Thom [30]). Pour une classe $\mathbf{a}$ d'ordre infini, on obtient ainsi une suite arithmétique $\{kN\mathbf{a}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ de classes réalisables d'ordre infini dans l'homologie de ce groupe. Remarquons que,

si une classe $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$ est réalisable, il existe toujours des réalisations normalisées. Soit

$$\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi \tag{2.1}$$

un homomorphisme. Il induit de manière unique à homotopie près une application $\Phi\colon M \to K(\pi, 1)$. Ainsi, pour chaque épimorphisme algébrique (2.1), nous avons une représentation normalisée (M, Φ) de la classe $\Phi_*([M]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$. Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux réalisations normalisées.

Soient π un groupe de présentation finie et M une variété lisse de dimension m tels qu'il existe un épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi$. Les classes d'homotopie libre des lacets fermés sur M coïncident avec les classes de conjugaison de $\pi_1(M)$. Soit $\phi_\sharp$ l'application induite par ϕ sur les classes de conjugaison. On considère une métrique riemannienne g sur M. Nous définissons la *ϕ-systole* de (M, g) en prenant la plus petite longueur d'une ligne géodesique fermée non $\phi_\sharp$-triviale. Désignons cette valeur par $\mathrm{sys}_\phi(M, g)$. Ceci nous amène à définir la constante ϕ-systolique analogue à (1.1)

$$\sigma_\phi(M) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M, g)}{\mathrm{sys}_\phi(M, g)^m}, \tag{2.2}$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M. Dans le cas où ϕ réalise un isomorphisme, nous supprimons l'indice ϕ : on retrouve ainsi les notions de systole et de constante systolique. On a l'inégalité évidente

$$\sigma_\phi(M) \leq \sigma(M). \tag{2.3}$$

Nous obtiendrons de cette inégalité, dans le cas particulier de groupes fondamentaux complexes, une borne inferieure sur $\sigma(M)$. Les constantes systoliques relatives apparaissent naturellement.

SYSTOLE HOMOLOGIQUE. Soit M une variété et $\pi = H_1(M, \mathbf{k})$, où $\mathbf{k} = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_p$. Si $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow H_1(M, \mathbf{k})$ est la projection naturelle, la ϕ-systole correspondante est appelée systole *homologique* ($\mathbf{Z}_p$-homologique si $\mathbf{k} = \mathbf{Z}_p$). Nous la désignons par $\mathrm{hsys}(M, g)$ et notons $\sigma^h(M)$ la constante systolique correspondante.

SYSTOLE HOMOLOGIQUE LIBRE. Pour une variété M quelconque, on pose $\pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\mathrm{Tors}$ et on note

$$\phi^l\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi \tag{2.4}$$

la projection naturelle. La ϕ^l-systole correspondante est appelée systole *homologique libre*. Nous la désignons par $\mathrm{lsys}(M, g)$ et notons $\sigma^l(M)$ la

constante systolique correspondante. Remarquons que l'espace classifiant correspondant est le tore $K(\pi, 1) \cong T^{b_1}$, où $b_1 = b_1(M)$ est le premier nombre de Betti.

SYSTOLE STABLE. Une seconde systole associée au groupe abélien libre $H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}$ est la *systole stable*. Ce type de systole est défini par un procédé de moyenne. Soient M une variété, $\pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}$ et ϕ^l l'épimorphisme défini ci-dessus. Pour une métrique g quelconque sur M et un élément $\mathbf{a}$ de π, on note $l_g(\mathbf{a})$ la plus petite longueur d'une ligne géodésique fermée γ sur (M, g) telle que $\phi_\sharp(\gamma) = \mathbf{a}$. On pose alors

$$|\mathbf{a}|_g = \lim_{k \to \infty} \frac{l_g(k\mathbf{a})}{k}.$$

Il est bien connu que pour chaque métrique g sur M, cette formule définit une norme $|\ |_g$ sur le $\mathbf{Z}$-module libre π. Cette norme est appelée la *norme stable* de π associée à g. Enfin, on définit la systole stable de (M, g) en posant

$$\operatorname{stsys}(M, g) = \inf_{\mathbf{a} \neq 0} |\mathbf{a}|_g,$$

où $\mathbf{a}$ parcourt $\pi \setminus \{0\}$. La constante systolique stable correspondante est notée $\sigma^{st}(M)$. Tout comme $\sigma(M)$, $\sigma^{st}(M)$ est un invariant homotopique de M (voir [2], §8).

On peut remarquer que $\sigma_\phi(M)$ ne dépend que de $\ker \phi$, et donc que la composition de ϕ avec un automorphisme de π ne modifie pas la constante ϕ-systolique. Cependant, le but étant d'étudier le lien entre $\sigma_\phi(M)$ et la classe homologique $\Phi_*([M]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$, la définition (2.2) est pertinente. Le choix d'un point base pour le groupe fondamental ne conditionne ici en rien l'étude : d'une part , un changement de point base définit un automorphisme intérieur de π, qui agit trivialement sur l'homologie de ce groupe, et, d'autre part, la définition de σ_ϕ ne dépend que des lacets libres (donc des classes de conjugaison).

Par analogie avec la définition d'essentialité ci-dessus, une variété M est dite *ϕ-essentielle* si

$$\Phi_*([M]_{\mathbf{k}}) \neq 0$$

dans $H_*(\pi, \mathbf{k})$. Remarquons qu'une variété M peut être essentielle au sens absolu, et en même temps non ϕ-essentielle pour un certain ϕ. Le théorème de Gromov demeure vrai pour σ_ϕ en remplaçant "essentielle" par "ϕ-essentielle". La réciproque partielle établie dans [2], §8 pour les variétés orientables est également valable : $\Phi_*([M]_{\mathbf{Z}}) = 0$ implique $\sigma_\phi = 0$.

On fixe un groupe π de présentation finie. La fonction $\sigma_\phi(M)$ est alors une fonction positive à valeurs réelles du couple (M, ϕ). Si $\sigma_\phi(M) > 0$, M est appelée *ϕ-rigide*, et *ϕ-souple* dans le cas contraire.

2.1 Classes homologiques d'ordre infini ; théorème A

Les groupes π de présentation finie possédant une classe d'homologie d'ordre infini coïncident avec les groupes qui vérifient $\widetilde{H}_*(\pi, \mathbf{R}) \neq 0$. Les groupes fondamentaux des variétés admettant une métrique à courbure sectionnelle négative ou nulle et les réseaux dans les groupes de Lie nilpotent ou résoluble (simplement connexes) fournissent une source importante de ce type de groupes. Cependant, ce sous-ensemble ne fournit que des exemples de groupes de dimension homologique réelle finie.

Un autre sous-ensemble, et peut-être plus intéressant que le sous-ensemble précédent, est celui des groupes π dont l'homologie k-dimensionnelle est non-nulle pour une infinité de k. Cet ensemble est très riche, l'exemple le plus éloquent étant le groupe F de R. Thompson (voir [13]) dont une présentation est la suivante :

$$F = \left\langle a, b \; ; \; [ab^{-1}, a^{-1}ba], \; [ab^{-1}, a^{-2}ba^2] \right\rangle .$$

Initialement, le groupe F est apparu comme le groupe des homéomorphismes dyadiques de l'intervalle $[0; 1]$. On voit facilement de la représentation donnée qu'on peut réaliser F comme le groupe fondamental d'une variété de dimension $m \geq 4$ en faisant 2 chirurgies d'indice 1 sur S^m (ce qui nous fournit les générateurs de F), puis deux chirurgies d'indice 2 en correspondance avec les relations.

L'homologie de F a été calculée dans [12], voir aussi [16] pour la structure multiplicative en cohomologie.

Théorème (Brown, Geoghegan). *$H_n(F, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$.*

On connaît actuellement de nombreux exemples de groupes de présentation finie possédant des propriétés homologiques analogues à celles de F.

Soient π un groupe de présentation finie et $\mathbf{a} \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$ une classe homologique d'ordre infini. Supposons que cette classe soit réalisable par une variété. La constante ϕ-systolique d'une variété réalisant $\mathbf{a}$ ne dépend pas du choix de cette variété : le théorème suivant montre qu'elle ne dépend naturellement que de $\mathbf{a}$.

THÉORÈME A. (1) *Soient M_1 et M_2 deux variétés fermées, orientables de dimension $m \geq 4$, $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$, $i = 1, 2$, deux épimorphismes et*

$$\Phi_i\colon M_i \longrightarrow K(\pi, 1)$$

les applications caractéristiques induites par ϕ_i. Supposons que

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$$

soit un élément d'ordre infini. Alors

$$\sigma_{\phi_1}(M_1) = \sigma_{\phi_2}(M_2)\,.$$

(2) *Supposons que M_1 et M_2 vérifient $b_1(M_1) = b_1(M_2)$ et que $\phi_i = \phi_i^l$, $i = 1, 2$ (voir (2.4)). Si*

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(T^{b_1}, \mathbf{Z})\,,$$

alors

$$\sigma^{st}(M_1) = \sigma^{st}(M_2)\,.$$

Chaque automorphisme $\Delta\colon \pi \to \pi$ induit un automorphisme

$$\Delta_*\colon H_*(\pi, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_*(\pi, \mathbf{Z})\,.$$

Si π est un groupe abélien libre de rang b, on peut associer à chaque automorphisme Δ de π une transformation de $SL(b, \mathbf{Z})$.

COROLLAIRE A1. (1) *Soient M_1 et M_2 deux m-variétés et $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$ deux épimorphismes pour $i = 1, 2$. Supposons que les classes homologiques $\Phi_{i*}([M_i])$, $i = 1, 2$ soient d'ordre infini dans $H_m(\pi, \mathbf{Z})$, et qu'il existe un automorphisme $\Delta\colon \pi \to \pi$ tel que*

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Delta_*(\Phi_{2*}([M_2]))\,.$$

Alors

$$\sigma_{\phi_1}(M_1) = \sigma_{\phi_2}(M_2)\,.$$

(2) *Supposons que M_1 et M_2 vérifient $b_1(M_1) = b_1(M_2)$ et que $\phi_i = \phi_i^l$, $i = 1, 2$ (voir (2.4)). S'il existe $\Delta \in SL(b_1, \mathbf{Z})$ tel que*

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Delta_*(\Phi_{2*}([M_2]))\,,$$

alors

$$\sigma^{st}(M_1) = \sigma^{st}(M_2)\,.$$

2.2 Groupes fondamentaux finis; théorème B

Si π est un groupe fini, l'homologie $H_*(\pi, \mathbf{Z})$ est un module de torsion et le comportement des constantes systoliques associées à ce groupe n'est pas clair en général. Soit $k = |\pi|$ le cardinal de π. Rappelons que l'ordre de chaque élément $\mathbf{a} \in H_*(\pi, \mathbf{Z})$ est un diviseur de k. Une classe naturelle et intéressante de groupes finis est celle des groupes possédant une classe homologique d'ordre maximal k. Cette classe coïncide avec celle des groupes dont chaque sous-groupe abélien est cyclique. Nous pouvons donner une autre caractérisation: c'est la classe des groupes dont l'homologie est périodique. Cette classe contient des exemples intéressants comme le fameux groupe d'isométrie de l'icosaèdre. Pour les détails et pour différents exemples de groupes non-cycliques, nous renvoyons le lecteur à [11], chap.VI.9. Le théorème suivant montre que, pour une classe homologique d'ordre maximal $|\pi|$, la constante systolique ne dépend que de cette classe.

Théorème B. *Soient M_1 et M_2 deux variétés orientables de dimension $m \geq 4$ et $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$ deux épimorphismes, où π est un groupe fini contenant k éléments. Supposons que*

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(\pi, \mathbf{Z})$$

et que cet élément soit d'ordre k. Alors

$$\sigma_{\phi_1}(M_1) = \sigma_{\phi_2}(M_2)\,.$$

L'analogue du corollaire A1 est également valable. Si π est un groupe cyclique d'ordre k, $H_{2m}(\pi, \mathbf{Z}) = 0$ et toute classe d'ordre k admet une réalisation normalisée par un espace lenticulaire.

Corollaire B1. *Soient M une variété orientable de dimension impaire m et $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_k$ un épimorphisme tel que $\Phi_*([M]) \in H_m(\mathbf{Z}_k, \mathbf{Z})$ soit d'ordre k. Alors la constante systolique relative $\sigma_\phi(M)$ est égale à la constante systolique d'une variété lenticulaire réalisant la même classe homologique de $\mathbf{Z}_k$.*

Si p est un nombre premier, chaque classe homologique non nulle de $H_*(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z})$ est d'ordre maximal et, d'après le théorème B, nous pouvons alors définir correctement la fonction systolique $\sigma\colon H_*(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{R}$. Remarquons que $\sigma(0) = 0$ puisque l'on sait, que pour chaque variété orientable M, et chaque épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi$, quel que soit le groupe de présentation finie π, la condition $\Phi_*([M]) = 0$ dans $H_*(\pi, \mathbf{Z})$ implique $\sigma_\phi(M) = 0$ (voir [2]).

COROLLAIRE B2. *Soient $p > 2$ un nombre premier, $l \geq 3$ un entier naturel et $d = PGDC(l, p-1)$. Alors la fonction systolique σ prend au plus $d+1$ valeurs différentes sur $H_{2l-1}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z})$ si $\frac{p-1}{d}$ est pair, et $\frac{d}{2}+1$ valeurs différentes si $\frac{p-1}{d}$ est impair. Ici, PGDC désigne le plus grand diviseur commun.*

Chaque épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \to \mathbf{Z}_p$ définit un élément $\phi^* \in H^1(M, \mathbf{Z}_p)$. Cet élément caractérise les variétés ϕ-essentielles. Remarquons que pour un groupe cyclique $\mathbf{Z}_p$, les variété orientables ϕ-essentielles n'apparaissent que pour les dimensions impaires. Pour une variété orientable quelconque M de dimension paire

$$\sigma_\phi(M) = 0\,,$$

quels que soient l'épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_p$ et l'entier naturel p.

COROLLAIRE B3. *Soient M une variété orientable de dimension $2l-1$ et*

$$\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_p$$

un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ est non nul si et seulement si

$$\phi^* \cup (\beta(\phi^*))^{l-1} \neq 0$$

dans $H^{2l-1}(M, \mathbf{Z}_p)$. Ici, β désigne l'homomorphisme de Bockstein.

Le groupe $\mathbf{Z}_2$ diffère un peu des autres groupes cycliques. Pour chaque dimension m, nous obtenons une seule variété lenticulaire $\mathbf{R}P^m$ dont nous notons $\sigma_m = \sigma_m(\mathbf{R}P^m)$ la constante systolique.

COROLLAIRE B4. *Soient M une variété orientable de dimension m et*

$$\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$$

un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ ne peut prendre que les deux valeurs 0 et σ_m. De plus, si m est pair, $\sigma_\phi(M) = 0$ pour chaque épimorphisme ϕ. Si m est impair, $\sigma_\phi(M) = \sigma_m$ si et seulement si $(\phi^*)^m \neq 0$ dans $H^m(M; \mathbf{Z}_2)$.

Le cas non-orientable est plus subtil : nous reviendrons à cette question dans la dernière partie.

3. Géométrie différentielle sur les polyèdres simpliciaux finis

Il n'est pas aisé de traiter les problèmes systoliques dans la catégorie des variétés et des métriques lisses. Pour cette raison, nous plaçons notre étude dans le cadre des polyèdres riemaniens finis et des CW-complexes finis. L'efficacité de cette approche a été montrée dans [1], [2], [4], [6], [20] et [21]. Définissons d'abord les objets nécessaires, voir [24] et [28] pour plus de détails : un polyèdre simplicial est un espace topologique muni d'une triangulation. Tous les polyèdres considérés dans la suite seront des polyèdres finis et donc compacts. Les complexes cellulaires (CW-complexes) utilisés seront de type général. Par contre, chaque construction métrique utilisant des CW-complexes dans la suite nous conduira à l'obtention d'un CW-complexe fini. La classe de CW-complexes la plus utile ici est la classe des CW-complexes finis ayant une seule cellule de dimension maximale.

Définition 3.1. Un complexe cellulaire fini X est dit *muni d'une triangulation compatible* si :

1. X est triangulé ;
2. pour chaque k-cellule (B^k, χ) de X, $\chi(B^k(\frac{1}{2}))$ est un sous-polyèdre simplicial de X, où $B^k(r)$ est la boule euclidienne k-dimensionnelle de rayon r, $B^k = B^k(1)$ et χ est l'application caractéristique d'une cellule.

Chaque complexe cellulaire fini est équivalent à homotopie près à un complexe cellulaire triangulé compatiblement (voir, par exemple, [25]) . Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est une application continue entre deux complexes cellulaires finis triangulés compatiblement, alors elle est équivalente à homotopie près à une application simultanément cellulaire et simpliciale. Tous les complexes cellulaires finis considérés ci-dessous seront supposés triangulés compatiblement et toutes les applications seront supposées cellulaires et simpliciales.

Soient P un polyèdre fini et $\tau \subset P$ un simplexe de la triangulation considérée. Ce simplexe est homéomorphe par définition au q-simplexe standard

$$\Delta^q = \mathbf{conv}\{e_0, \ldots, e_q\} \subset \mathbf{R}^{q+1},$$

où **conv** désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble et $\{e_i\}_{i=0}^q$ est un repère orthonormé. Les coordonnées cartésiennes $\{x_i\}_{i=0}^q$ de $\mathbf{R}^{q+1}$ fournissent les coordonnées barycentriques de Δ^q et de $\tau \subset P$. On définit un *voisinage extérieur* de $\tau \subset P$ comme un ouvert U de $\sum_{i=0}^q x_i = 1$ contenant Δ^q.

DÉFINITION 3.2. Une *métrique riemannienne sur un polyèdre* P est une famille de métriques riemanniennes $\{g_\tau\}_{\tau\subset P}$, où τ parcourt l'ensemble des simplexes de P, vérifiant les conditions suivantes :

1. Chaque g_τ est une métrique riemannienne lisse sur un voisinage extérieur de τ.
2. Pour chaque paire de simplexes $\tau_1, \tau_2 \subset P$, on a l'égalité
$$g_{\tau_1}|_{\tau_1\cap\tau_2} = g_{\tau_2}|_{\tau_1\cap\tau_2}$$
considérée comme une égalité de deux formes quadratiques dans les coordonnées barycentriques de $\tau_1 \cap \tau_2$.

Une structure simpliciale sur P permet de travailler avec les applications continues et lisses par morceaux de l'intervalle $I(1) = [0,1]$ dans P. Si P est muni d'une métrique riemannienne g, on peut définir la longueur d'un chemin lisse par morceaux $\alpha\colon I(1) \to P$ en posant
$$l_g(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'|_g dt\,.$$
On utilise cette longueur pour définir la métrique sur P comme dans le cas des variétés :
$$\rho_g(x,y) = \inf_\alpha l_g(\alpha)\,, \tag{3.1}$$
où α parcourt l'ensemble des chemins lisses par morceaux joignant $x, y \in P$. Obtenu de cette façon, l'espace métrique (P, ρ_g) est un espace de longueur. Considérons un polyèdre riemannien (P, g) et un épimorphisme $\phi\colon \pi_1(P) \to \pi$ où π est un groupe fixé de présentation finie.

DÉFINITION 3.3. La borne inférieure
$$\mathrm{sys}_\phi(P,g) = \inf_\gamma l_g(\gamma)\,,$$
où γ parcourt l'ensemble des courbes fermées, lisses par morceaux, non $\phi_\sharp$-triviales, est appelée la *ϕ-systole de* (P, g).

Pour un polyèdre riemannien quelconque (P, g) et pour chaque k-simplexe $\tau \in P$, le k-volume $\mathrm{Vol}_k(\tau, g)$ de τ est bien défini. Posons
$$\mathrm{Vol}_k(P,g) = \sum_{\dim\tau=k} \mathrm{Vol}_k(\tau,g)\,,$$
où τ parcourt l'ensemble des k-simplexes de P. Remarquons que $\mathrm{Vol}_k(P, g)$ dépend de la métrique g ainsi que de la structure simpliciale considérée. Par

exemple, $\mathrm{Vol}_k(P,g)$ $(k<m)$ est modifié par une subdivision simpliciale. Si $\dim P = m$, la somme totale des m-volumes de tous les m-simplexes est appelée *volume* de P pour la métrique g. On note cette valeur $\mathrm{Vol}(P,g)$. Remarquons que $\mathrm{Vol}(P,g)$ coïncide avec la mesure de Hausdorff m-dimensionnelle pour la métrique (3.1).

Définissons les constantes ϕ-systolique et stable pour un polyèdre quelconque P de dimension m comme dans le cas des variétés par

$$\sigma_\phi(P) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(P,g)}{\mathrm{sys}_\phi(P,g)^m} \quad \text{et} \quad \sigma^{st}(P) = \inf_g \frac{\mathrm{Vol}(P,g)}{\mathrm{sys}^{st}(P,g)^m}, \tag{3.2}$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes simpliciales sur P.

Comme dans le cas des variétés, on peut définir la notion de polyèdre essentiel et démontrer un théorème analogue au théorème de Gromov, voir [18]. Nous n'allons pas nous servir de cette notion pour les polyèdres. Remarquons seulement qu'il existe deux types d'essentialité pour les polyèdres : l'essentialité algébrique, qui se définit à l'aide de la "classe fondamentale" du polyèdre, et l'essentialité géométrique, qui se définit au moyen des applications dans les complexes de dimension plus petite. Ces deux notions coïncident pour les variétés si on fait un choix convenable de coefficients en homologie. Elles ne sont pas équivalentes pour un polyèdre arbitraire (nous reviendrons sur ce sujet dans le dernier chapitre).

3.1 Principes de comparaison et d'extension

Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application simpliciale entre deux polyèdres. Si g est une métrique riemannienne sur Y, son image réciproque $f^*(g)$ est une forme quadratique symétrique positive, mais dégénérée en général si f n'est pas un homéomorphisme. Pour obtenir une vraie métrique sur X assez proche de $f^*(g)$, fixons une métrique h sur X. Par exemple, on peut choisir h comme la métrique induite par le plongement canonique $X \longrightarrow \Delta^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$, où N est le nombre de sommets de X. Pour $t>0$, on pose $f^t(g) = f^*(g) + t^2 h$. Ceci définit une métrique riemannienne (simpliciale) sur X. Appelons cette métrique la *t-image réciproque* de g (comparer avec [2], §2, où des métriques analogues ont été construites). Il est évident que f contracte les distances par rapport aux métriques $f^t(g)$ et g pour chaque $t>0$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Lip} f^t \leq 1, \quad \forall t > 0. \tag{3.3}$$

Nous allons travailler dans la suite avec de petites valeurs du paramètre t.

Par définition, une application $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est dite *monotone* si l'image réciproque d'un point $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble

connexe de X, quel que soit ce point $y \in Y$. Nous avons besoin d'une version faible de cette définition adaptée aux applications simpliciales.

DÉFINITION 3.4. Une application simpliciale $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux polyèdres simpliciaux est dite *k-monotone*, si pour tout k-simplexe $\tau \subset Y$ et pour tout point $y \in \overset{\circ}{\tau}$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble connexe de X.

Les applications m-monotones des polyèdres m-dimensionnels jouent un rôle fondamental dans la suite. La m-monotonie signifie que l'image réciproque d'un m-simplexe ouvert quelconque est soit un m-simplexe ouvert, soit vide. La proposition suivante est vérifiée (voir [2], §2):

LEMME 3.1. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application simpliciale, m-monotone entre deux polyèdres m-dimensionnels. Alors pour chaque métrique riemannienne g sur Y et chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\mathrm{Vol}_m(X, f^t(g)) \leq \mathrm{Vol}_m(Y, g) + \varepsilon, \quad t < \delta .$$

PROPOSITION 3.2 (PRINCIPE DE COMPARAISON). *Soient K_i, $i = 1, 2$, deux polyèdres m-dimensionnels et $\phi_i\colon \pi_1(K_i) \longrightarrow \pi$ deux épimorphismes. S'il existe une application m-monotone $f\colon K_1 \longrightarrow K_2$ telle que $\phi_1 = \phi_2 \circ f_*$, alors*

$$\sigma_{\phi_1}(K_1) \leq \sigma_{\phi_2}(K_2) .$$

Démonstration. Fixons un ε positif et soit g une métrique simpliciale quelconque sur K_2. Prenons $t < \delta = \delta(\varepsilon)$ comme dans le lemme 3.1. De (3.3), on obtient

$$\mathrm{sys}_{\phi_1}(K_1, f^t(g)) \geq \mathrm{sys}_{\phi_2}(K_2, g) .$$

Ceci, avec le lemme 3.1, nous amène à l'inégalité suivante

$$\frac{\mathrm{Vol}(K_1, f^t(g))}{(\mathrm{sys}_{\phi_1}(K_1, f^t(g)))^m} \leq \frac{\mathrm{Vol}(K_2, g) + \varepsilon}{(\mathrm{sys}_{\phi_2}(K_2, g))^m} ,$$

ce qui achève la démonstration, puisque ε est arbitraire. □

Le principe de comparaison nous permet de comparer les constantes systoliques de deux variétés admettant une application de degré 1 entre elles. Soient M et N deux variétés m-dimensionnelles et $f\colon M \longrightarrow N$ une application de degré absolu 1 [15]. On choisit deux triangulations sur ces variétés. La structure des applications de degré absolu 1 entre deux variétés

simpliciales est bien étudiée. Le résultat principal de [31] montre qu'une telle application f est équivalente à homotopie près à une application f_1 simpliciale et monotone. En appliquant la proposition 3.2, nous obtenons (voir [2], §8)

COROLLAIRE 3.3. *Soit $f\colon M \longrightarrow N$ une application de degré absolu 1 entre deux variétés m-dimensionnelles. Alors*

$$\sigma_{\phi\circ f_*}(M) \leq \sigma_\phi(N)\,,$$

pour tout épimorphisme $\phi\colon \pi_1(N) \longrightarrow \pi$.

COROLLAIRE 3.4. *Soient M_i, $i = 1,2$, deux variétés équivalentes à homotopie près et $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$ deux épimorphismes liés par cette équivalence, alors*

$$\sigma_{\phi_1}(M_1) = \sigma_{\phi_2}(M_2)\,.$$

EXEMPLE 3.1. On considère la sphère

$$S^{2m-1} = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1\,; \quad z_k \in \mathbf{C}\}$$

et l'isométrie A d'ordre p définie par:

$$A(z_1,\ldots,z_m) = (e^{2\pi i\frac{q_1}{p}} z_1,\ldots,e^{2\pi i\frac{q_m}{p}} z_m)\,,$$

où les q_k, $1 \leq k \leq m$, sont des entiers premiers à p. L'opérateur A définit une action de $\mathbf{Z}_p$ sur S^{2m-1} et l'espace quotient est appelé espace lenticulaire: on le note $L(q_1,\ldots,q_m;p)$ ou $L(\overline{\mathbf{q}},p)$. La classification homotopique des espaces lenticulaires [27] implique:

$$L(q_1,\ldots,q_m;p) \simeq L(q'_1,\ldots,q'_m;p) \Longleftrightarrow q_1\ldots q_m \equiv \pm k^m q'_1\ldots q'_m \mod p\,,$$

pour un k entier. On supposera dans la suite, pour des raisons géométriques, que p est premier. Soit $d = \mathrm{PGDC}(m,p-1)$ le plus grand diviseur commun. On associe à chaque espace lenticulaire $L(q_1,\ldots,q_m;p)$ l'élément $q_1\ldots q_m \mod p$ du groupe multiplicatif $\mathbf{Z}_p^*$ du corps $\mathbf{Z}_p$. Disons que deux éléments q et q' de $\mathbf{Z}_p^*$ sont équivalents si $q \equiv \pm k^m q' \mod p$ pour un $k \in \mathbf{Z}_p^*$. Nous voyons donc que les classes d'équivalence homotopique des espaces lenticulaires coïncident avec les classes d'équivalence des éléments dans $\mathbf{Z}_p^*$. Un calcul facile dans le groupe cyclique $\mathbf{Z}_p^*$ nous amène à d (si $\frac{p-1}{d}$ est pair) ou $\frac{d}{2}$ (sinon) classes d'équivalence homotopique des espaces lenticulaires.

Du corollaire 3.4 ci-dessus, nous obtenons finalement que la fonction $\sigma(\overline{\mathbf{q}},p) = \sigma(L(\overline{\mathbf{q}},p))$ prend au maximum d (si $\frac{p-1}{d}$ est pair), ou $\frac{d}{2}$ (sinon) valeurs différentes non nulles sur les espaces lenticulaires $(2m-1)$-dimensionnels de groupe fondamental $\mathbf{Z}_p$.

Pour comparer les constantes systoliques de variétés non-équivalentes, nous avons besoin d'un procédé d'élargissement ou d'extension d'une variété.

Soient K un polyèdre et $h\colon S^{k-1} \longrightarrow K$ une application simpliciale. On a l'homéomorphisme évident

$$K \underset{h}{\cup} B^k = Z(h) \underset{S^{k-1}}{\cup} CS^{k-1},$$

où $Z(h)$ est le cylindre de l'application h et CX est le cône sur l'espace X. En considérant la triangulation du cylindre d'une application simpliciale [25] et en prolongeant cette triangulation sur le cône, nous obtenons une triangulation de $K \underset{h}{\cup} B^k$ qui coïncide avec la triangulation donnée sur K. Nous utiliserons toujours dans la suite ce procédé d'extension d'une triangulation donnée à une cellule recollée par une application simpliciale.

LEMME 3.5 (Extension métrique). *Soient K un polyèdre m-dimensionnel et $k \geq 2$. Soit $h\colon S^{k-1} \longrightarrow K$ une application simpliciale et notons $L = K \underset{h}{\cup} B^k$ le polyèdre obtenu en recollant à K le disque k-dimensionnel B^k par h. Pour toute métrique riemannienne g sur K, il existe une métrique g' sur L qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) $g'|_K = g$;
2) *pour tous points $p, q \in K$ et pour toute courbe $\gamma(t) \subset L$ joignant ces points dans L, il existe une courbe $\gamma_1(t) \subset K$ joignant ces points dans K, homotope à $\gamma(t)$ dans L et telle que*

$$l_g(\gamma_1) \leq l_{g'}(\gamma).$$

Démonstration. On munit la sphère S^{k-1} de la métrique ds_R^2 à courbure constante $\frac{1}{R}$ avec R suffisamment grand pour avoir l'inégalité $\operatorname{Lip} h < 1$. On munit ensuite le cylindre $Z = S^{k-1} \times [0,2]$ de la métrique suivante :

$$g' = \begin{cases} (h^*(g)(1-u) + u ds_R^2) + du^2, & 0 \leq u \leq 1, \\ ds_R^2 + du^2, & 1 \leq u \leq 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ici, u est la coordonnée de l'intervalle $[0,2]$ et $h^*(g)$ est l'image réciproque de la métrique g induite par l'application simpliciale h sur S^{k-1}.

On recolle ensuite un chapeau demi-sphérique k-dimensionnel C de rayon R sur le bord $S^{k-1} \times \{2\}$ du cylindre Z. Ceci nous prolonge la métrique g' au disque $B^k = Z \bigcup C$. Remarquons que la condition

$$g'|_{S^{k-1} \times \{0\}} = h^*(g)$$

nous assure le recollement métrique de g et g' en une métrique définie sur $K \underset{h}{\cup} B^k$. On note encore g' la métrique ainsi obtenue.

Soient p et q deux points de K et γ une courbe de L joignant ces deux points. Supposons tout d'abord que γ intersecte l'intérieur de C (noté $\operatorname{int} C$). Si $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ sont deux points de ∂C consécutifs (i.e. $\{\gamma(t)\ ;\ t_1 < t < t_2\} \subset \operatorname{int} C$), on remplace cette portion de l'arc γ par un arc géodésique joignant ces deux points dans ∂C. Il est alors évident que cette opération diminue la longueur de γ. En répétant cette opération pour toutes les paires (t_1, t_2) telles que $\{\gamma(t)\ ;\ t_1 < t < t_2\} \subset \operatorname{int} C$, nous obtenons une nouvelle courbe $\gamma'(t) \subset K \bigcup Z$ homotope à $\gamma(t)$ et vérifiant $l_{g'}(\gamma') \leq l_{g'}(\gamma)$.

On peut donc supposer que $\gamma \bigcap \operatorname{int} C = \varnothing$. On procède alors ainsi : la projection naturelle de Z sur $S^{k-1} \times \{0\}$ définit une rétraction par déformation $r\colon K \bigcup Z \longrightarrow K$, qui n'augmente pas les distances par construction de g'. On projette alors γ sur K par r et on obtient ainsi une courbe $\gamma_1 = r \circ \gamma$ vérifiant la propriété attendue. Les propriétés 1) et 2) sont donc bien vérifiées. $\square$

PROPOSITION 3.6 (Principe d'extension). *Soit K un polyèdre m-dimensionnel. Pour $2 \leq k \leq m-1$ et pour toute application (simpliciale) $h\colon S^{k-1} \longrightarrow K$, soit $L = K \underset{h}{\cup} B^k$ le polyèdre obtenu en recollant le disque k-dimensionnel B^k par h.*

1) *Soit $\phi\colon \pi_1(K) \longrightarrow \pi$ un épimorphisme. Si $k = 2$, on suppose de plus que $\{h\} \in \ker \phi$. Alors,*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_{\widehat{\phi}}(L)\,,$$

où $\widehat{\phi}$ est la factorisation naturelle de ϕ ($\widehat{\phi} \neq \phi$ seulement dans le cas où $k = 2$ et $\{h\} \neq 0$).

2) *On suppose $k \geq 3$ ou que h induit une application nulle de l'homologie rationnelle unidimensionnelle dans le cas $k = 2$. Alors,*

$$\sigma^{st}(K) = \sigma^{st}(L)\,.$$

Démonstration. L'inclusion $K \longrightarrow L$ vérifie les conditions de la proposition 3.2 : ceci implique les inégalités

$$\sigma_\phi(K) \leq \sigma_{\widehat{\phi}}(L) \quad \text{et} \quad \sigma^{st}(K) \leq \sigma^{st}(L).$$

Pour démontrer les inégalités réciproques, soit g une métrique simpliciale quelconque sur K et soit g' une extension de cette métrique à L vérifiant le lemme 3.5. On considère une courbe fermée non contractile γ sur L. Elle intersecte forcément K, et par le lemme 3.5, on peut l'homotoper en une autre courbe $\gamma_1 \subset K$ telle que $l_g(\gamma_1) \leq l_{g'}(\gamma)$. Ceci implique

$$\mathrm{sys}_{\widehat{\phi}}(L, g') = \mathrm{sys}_\phi(K, g) \quad \text{et} \quad \mathrm{sys}_{st}(L, g') = \mathrm{sys}_{st}(K, g).$$

Pour achever la démonstration, il reste à remarquer que, pour des raisons de dimension, la cellule recollée ne contribue pas au volume : $\mathrm{Vol}(L, g') = \mathrm{Vol}(K, g)$. $\square$

Soit K un polyèdre de dimension m. Un CW-complexe fini X est une *extension* de K s'il est le résultat du recollement sur K d'un nombre fini de cellules de dimension comprise entre 3 et $m-1$, c'est-à-dire

$$X = K \bigcup_{k=3}^{m-1} \bigcup_{i_k=1}^{q_k} B^k_{i_k}. \tag{3.5}$$

Les applications de recollement seront toujours supposées simpliciales. Une extension possède ainsi une triangulation naturelle (extension de celle donnée sur K). La proposition 3.6 implique

COROLLAIRE 3.7. *Soit X une extension de K. Si $\phi\colon \pi_1(K) \longrightarrow \pi$ est un épimorphisme, alors*

$$\sigma_\phi(K) = \sigma_\phi(X).$$

D'autre part,

$$\sigma^{st}(K) = \sigma^{st}(X).$$

3.2 EXISTENCE DES EXTENSIONS

Dans la suite de ce chapitre, nous établissons un des points topologiques principaux dans l'étude des constantes systoliques unidimensionnelles. On considère deux m-variétés ($m \geq 4$) orientables M_i, $i = 1, 2$, de même groupe fondamental π. Soient $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi, i = 1, 2$, deux isomorphismes et $\Phi_i\colon M_i \longrightarrow K(\pi, 1), i = 1, 2$, les applications induites correspondantes.

THÉORÈME 3.8. *Si* $\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2])$ *dans* $H_m(\pi, \mathbf{Z})$, *alors il existe une extension* X_1 *de* M_1 *et une application* $h\colon M_2 \longrightarrow X_1$, *telle que l'application* h_* *induite sur les groupes fondamentaux vérifie* $h_* = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$.

REMARQUE. Dans la démonstration de ce théorème (voir ci-dessous), nous utilisons de manière cruciale le fait que M_2 soit une variété en utilisant notamment la dualité de Poincaré. Remarquons que ce théorème n'est plus valable pour des complexes cellulaires orientables ayant une seule m-cellule comme le montre l'exemple suivant. Posons $M_1 = \mathbf{R}P^3 \times S^2$ et $M_2 = \mathbf{R}P^4 \bigcup_{2b} B^5$, où $b \in \pi_4(\mathbf{R}P^4)$ est un générateur. On voit facilement que, pour cet exemple, $\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) = 0$. D'autre part, il n'existe pas d'application de M_2 dans un complexe de dimension strictement inférieure à 5 induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux. En effet, le contraire nous amène à une application $f\colon M_2 \longrightarrow \mathbf{R}P^\infty$ telle que $f(M_2) \subset \mathbf{R}P^4$ et f_* est un isomorphisme des groupes fondamentaux. Mais toute application $f\colon \mathbf{R}P^4 \longrightarrow \mathbf{R}P^4$ induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux induit sur le groupe $\pi_4(\mathbf{R}P^4) \simeq \mathbf{Z}$ un monomorphisme qui consiste à multiplier par un nombre impair. Cette application f ne se prolonge donc jamais sur la 5-cellule B^5 de M_2. Cela signifie que le théorème 3.8 ne peut être vérifié pour M_1 et M_2.

Le recollement de cellules de dimension strictement inférieure à m ne modifie pas l'homologie m-dimensionnelle. L'inclusion

$$M_1 \subset X_1 \tag{3.6}$$

induit donc un isomorphisme $H_m(X_1, \mathbf{Z}) \simeq H_m(M_1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, et la classe fondamentale $[X_1]$ de X_1 est bien définie. Nous choisissons $[X_1]$ correspondant à $[M_1]$ par l'application (3.6).

COROLLAIRE 3.9. *Si* $\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) \in H_m(K(\pi, 1), \mathbf{Z})$ *est un élément d'ordre* v, *l'application* h *induit une application en homologie* m*-dimensionnelle vérifiant*

$$h_*([M_2]) = l[X_1] \quad \textit{avec } l \equiv 1 \bmod v\,.$$

Si l'ordre v *est infini,* $l = 1$ *et* h_* *est un isomorphisme.*

Démonstration. Si on pose $l = \deg h$, on a: $h_*([M_2]) = l[X_1]$. L'application

$$\Phi_1\colon M_1 \longrightarrow K(\pi, 1)$$

se prolonge en une application

$$\widehat{\Phi_1}\colon X_1 \longrightarrow K(\pi, 1)$$

du fait de l'asphéricité de $K(\pi, 1)$. On obtient de là $\widehat{\Phi_1}_*([X_1]) = \Phi_{1*}([M_1])$. L'application composée

$$\widehat{\Phi_1} \circ h\colon M_2 \longrightarrow K(\pi, 1)$$

induit le même isomorphisme de groupes fondamentaux que l'application Φ_2, donc elles sont homotopes. On en déduit:

$$\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2]) = \widehat{\Phi_1}_* \circ h_*([M_2]) = \widehat{\Phi_1}_*(l[X_1]) = l\Phi_{1*}([M_1]).$$

Donc $l \equiv 1 \bmod v$, puisque $\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_{2*}([M_2])$ est un élément d'ordre v. Si $v = \infty$, on obtient évidemment $l = 1$. Ceci achève la démonstration. □

REMARQUE. Pour la démonstration du théorème A, la non finitude de l'ordre de l'image de la classe fondamentale intervient exactement à cet endroit. L'application h ci-dessus n'est pas uniquement définie, mais la condition de non finitude garantit qu'elle soit toujours de degré 1.

Dans le cas où l'ordre v est fini, un exemple simple est $M_1 = M_2 = \mathbf{R}P^{2k+1}$. Il n'est pas nécessaire de recoller des cellules supplémentaires à M_1. Pour tout entier impair l, on peut trouver une application $h\colon M_2 \longrightarrow M_1$ de degré l, induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux.

Démonstration du théorème 3.8. Notre prochain raisonnement est un peu plus général que nécessaire pour le cas orientable. Il couvre également le cas de deux variétés simultanément non-orientables. Pour cette raison, nous préférons considérer les classes fondamentales à coefficients locaux. Deux variétés M_1 et M_2 sont dites simultanément non-orientables, si les sous-groupes d'orientations $G_i \lhd \pi_1(M_i)$, $i = 1, 2$, vérifient l'égalité:

$$\phi_1(G_1) = \phi_2(G_2) \text{ dans } \pi. \tag{3.7}$$

Sous cette condition, nous pouvons utiliser trois systèmes Φ_i-cohérents de coefficients locaux sur M_i et $K(\pi, 1)$, définis respectivement par les sous-groupes G_i, $i = 1, 2$, et $\phi_i(G_i)$.

Nous allons construire une CW-réalisation du $K(\pi, 1)$ en attachant des cellules à M_1. Par hypothèse, $\pi_1(M_1) = \pi$. On commence par attacher des cellules de dimension 3, de manière à annuler le $\pi_2(M_1)$. Nous obtenons un nouveau CW-complexe que nous notons $M_1(3)$:

$$M_1(3) = M_1 \bigcup_\alpha B^3_\alpha,$$

où α parcourt une base de $\pi_2(M_1)$ comme π-module. Ensuite, on attache des cellules de dimension 4 à $M_1(3)$ de manière à annuler le $\pi_3(M_1(3))$. Nous obtenons un nouvel espace $M_1(4)$. On itère ainsi le procédé en annulant successivement les groupes d'homotopie pour $k \geq 3$ et on obtient ainsi une suite de CW-complexes $\{M_1(k)\}_{k\geq 3}$ vérifiant les propriétés suivantes:

1) $M_1 \subset M_1(3) \subset M_1(4) \subset \cdots$;
2) $\pi_1(M_1(k)) = \pi, \quad k = 3, 4, \ldots$;
3) $\pi_s(M_1(k)) = 0, \quad 2 \leq s \leq k-1$.

Remarquons que les complexes $M_1(k)$ sont en général des CW-complexes infinis, même pour $k = 3$ (voir [29]).

Pour un CW-complexe A, notons $A^{(k)}$ son k-squelette. Soit

$$M_1 = M_1^{(m-1)} \bigcup_{\alpha} \mathbf{e}^m ,$$

une décomposition cellulaire de M_1 possédant une unique m-cellule, où $\alpha\colon S^{m-1} \longrightarrow M_1^{(m-1)}$ est l'application de recollement. Le procédé $\{M_1(k)\}_{k\geq 3}$ nous fournit une certaine décomposition cellulaire de l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ (comparer à [25]). Nous avons pour les complexes $M_1(k)$ $(k = 3, 4, \ldots)$ les égalités suivantes:

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{aligned} &1) \quad M_1(m-1) = K(\pi,1)^{(m-1)} \bigcup_{\alpha} \mathbf{e}^m ; \\ &2) \quad M_1(k) \qquad = K(\pi,1)^{(k)}, \quad k \geq m . \end{aligned}$$

L'inclusion $i\colon M_1 \longrightarrow M_1(k)$ induit un isomorphisme de groupes fondamentaux. Soit $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ un système de coefficients locaux défini sur M_1 et $M_1(m-1)$ par le même sous-groupe d'indice 2. On considère l'application induite en homologie

$$\text{(3.9)} \qquad i_*\colon H_m(M_1, \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) \longrightarrow H_m(M_1(m-1), \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) .$$

De la suite exacte associée à une paire et de l'axiome d'excision pour les coefficients locaux, on constate aussitôt que i_* est un isomorphisme. Soit $[M_1]_{\mathcal{O}}$ la classe fondamentale de M_1 dans le système $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$. Nous appellerons "classe fondamentale" de $M_1(m-1)$ l'image $i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) \in H_m(M_1(m-1), \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})$.

En appliquant le théorème d'approximation cellulaire, on remarque que Φ_2 induit une application

$$\text{(3.10)} \qquad g\colon M_2 \longrightarrow M_1(m) ,$$

qui vérifie $\Phi_{1*} \circ g_* = \Phi_{2*}$ sur les groupes fondamentaux. Contrairement à l'application caractéristique Φ_2, l'application (3.10) n'est pas définie uniquement à homotopie près. Cependant, nous pouvons la choisir convenablement:

LEMME 3.10. *Si* $\Phi_{1*}([M_1]_{\mathcal{O}}) = \Phi_{2*}([M_2]_{\mathcal{O}}) \in H_m(K(\pi,1),\mathcal{O}_{\mathbf{Z}})$, *on peut choisir* g *dans (3.10) de sorte que*

$$g_*([M_2]_{\mathcal{O}}) = i_*([M_1]_{\mathcal{O}})\,. \tag{3.11}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la structure cellulaire (3.8) nous permet de voir Φ_1 comme une inclusion

$$\Phi_1 = i\colon M_1 \longrightarrow M_1(k) \text{ pour } k \geq m+1\,. \tag{3.12}$$

Soit g une application quelconque induite par Φ_2 (voir (3.10)). Si X est un CW-complexe et $\mathcal{A}$ est un système local de base $\mathbf{Z}$ sur X, alors pour toute application

$$a\colon S^k \longrightarrow X, \qquad k \geq 2\,,$$

le système induit $a_*(\mathcal{A})$ est trivial sur S^k, donc coïncide avec $\mathbf{Z}$. On voit de là que l'homomorphisme d'Hurewicz

$$\mathcal{H}\colon \pi_k(X) \longrightarrow H_k(X,\mathcal{A}), \qquad k \geq 2$$

est bien défini.

Deux applications g et g' obtenues comme en (3.10) sont homotopes dans $M_1(m+1)$ et l'inclusion (3.8) 2) induit l'isomorphisme

$$H_m(M_1(m+1),\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) \simeq H_m(K(\pi,1),\mathcal{O}_{\mathbf{Z}})\,.$$

On considère le diagramme suivant de suites exactes pour la paire $(M_1(m+1), M_1(m))$

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{m+1}(M_1(m+1),M_1(m)) & \xrightarrow{\partial^{\pi}_{m+1}} & \pi_m(M_1(m)) & \xrightarrow{j^{\pi}_m} & \pi_m(M_1(m+1)) = 0 \\
\Big\downarrow \mathcal{H}_{m+1} & & \Big\downarrow \mathcal{H}_m & & \Big\downarrow \mathcal{H}_m \\
H_{m+1}(M_1(m+1),M_1(m);\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\partial^{H}_{m+1}} & H_m(M_1(m);\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{j^{H}_m} & H_m(M_1(m+1);\mathcal{O}_{\mathbf{Z}})\,,
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont les homomorphismes d'Hurewicz. Les égalités $\pi_k(M_1(m+1),M_1(m)) = 0$, $k \leq m$, impliquent que

$$\mathcal{H}_{m+1}\colon \pi_{m+1}(M_1(m+1),\, M_1(m)) \longrightarrow H_{m+1}(M_1(m+1),\, M_1(m);\, \mathbf{Z})$$

est un épimorphisme. La propriété d'excision pour les coefficients locaux implique

$$H_{m+1}(M_1(m+1),\, M_1(m);\, \mathbf{Z}) \simeq H_{m+1}(M_1(m+1),\, M_1(m);\, \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})\,.$$

Donc, la flèche verticale $\mathcal{H}_{m+1}$ est aussi un épimorphisme. De la première ligne, nous voyons que ∂^{π}_{m+1} est un épimorphisme sur $\pi_m(M_1(m))$ et de la

deuxième ligne, nous obtenons que $\partial^{\mathcal{H}}_{m+1}$ est un épimorphisme sur $\ker j^{\mathcal{H}}_m$. Ceci implique que $\mathcal{H}_m$ est naturellement un épimorphisme sur $\ker j^{\mathcal{H}}_m$. Autrement dit, chaque élément de $\ker j^{\mathcal{H}}_m$ peut être représenté comme un cycle sphérique.

D'après l'hypothèse du lemme, chaque application g de (3.10) vérifie :

$$-g_*([M_2]_{\mathcal{O}}) + i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) \in \ker j^{\mathcal{H}}_m .$$

Il existe donc une application

$$u\colon S^m \longrightarrow M_1(m)$$

telle que

$$u_*(\mathbf{s}) = -g_*([M_2]_{\mathcal{O}}) + i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) , \tag{3.13}$$

où $\mathbf{s} \in H_m(S^m, \mathbf{Z})$ est la classe fondamentale de la sphère.

On considère l'application $g'\colon M_2 \longrightarrow M_1(m)$ définie par le diagramme suivant

$$g'\colon M_2 \longrightarrow M_2 \vee S^m \xrightarrow{g \vee u} M_1(m) , \tag{3.14}$$

où l'application de gauche consiste à contracter le bord d'un m-disque local dans M_2. Il est évident que g et g' induisent le même homomorphisme de groupes fondamentaux. On voit sans peine que

$$g'_*([M_2]_{\mathcal{O}}) = g_*([M_2]_{\mathcal{O}}) + u_*(\mathbf{s}) .$$

Avec (3.13), ceci implique

$$g'_*([M_2]_{\mathcal{O}}) = i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) . \qquad \square$$

Supposons l'application $g\colon M_2 \longrightarrow M_1(m)$ choisie de sorte qu'elle vérifie (3.11). On va maintenant démontrer qu'elle est déformable en une application

$$\widehat{g}\colon M_2 \longrightarrow M_1(m-1) .$$

LEMME 3.11. *Il existe une application*

$$\widehat{g}\colon M_2 \longrightarrow M_1(m-1) ,$$

telle que g_* et $\widehat{g}_*$ coïncident sur les groupes fondamentaux.

Démonstration. Prenons une décomposition cellulaire de M_2 ayant une seule m-cellule, et choisissons g cellulaire. Soit

$$g^{(m-1)}\colon M_2^{(m-1)} \longrightarrow M_1(m-1)$$

sa restriction au $(m-1)$-squelette. Posons

$$\widehat{g}^{(m-1)} = g^{(m-1)} ,$$

et démontrons que cette application est prolongeable à M_2.

Considérons l'obstruction à prolonger cette application (voir, par exemple, [22]). Soit

$$\mathcal{A} = \{\pi_{m-1}(M_1(m-1); x)\}$$

le système local des groupes homotopiques. Puisque l'application $g^{(m-1)}$ induit un isomorphisme de groupes fondamentaux, désignons par la même lettre $\mathcal{A}$ le système local induit sur $M_2^{(m-1)}$. Il est également naturel de noter $\mathcal{A}$ la restriction de ce système à $M_1 \subset M_1(m-1)$.

Soient $\mathbf{b} \in H^m(M_2, \mathcal{A})$ l'obstruction à prolonger $g^{(m-1)}$ et $\mathbf{a} \in H^m(M_1(m), \mathcal{A})$ l'obstruction à prolonger l'application identité

$$\mathbf{id}\colon M_1(m-1) \longrightarrow M_1(m-1)$$

à $M_1(m)$. Il est évident que $\mathbf{b} = g^*(\mathbf{a})$. On applique l'opérateur de dualité de Poincaré à M_2, et l'homomorphisme g_* sur l'homologie 0-dimensionnelle. Ceci, avec (3.11), implique :

$$\begin{aligned} g_*([M_2]_{\mathcal{O}} \cap \mathbf{b}) &= g_*([M_2]_{\mathcal{O}} \cap g^*(\mathbf{a})) = g_*([M_2]_{\mathcal{O}}) \cap \mathbf{a} \\ &= i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) \cap \mathbf{a} = i_*([M_1]_{\mathcal{O}}) \cap i^*(\mathbf{a})) = 0\,. \end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie, puisque l'obstruction à prolonger

$$i\colon M_1 \longrightarrow M_1(m-1)$$

est triviale, et donc $i^*(\mathbf{a}) = 0$.

Remarquons enfin que g_* est un isomorphisme en 0-homologie, et donc que $[M_2]_{\mathcal{O}} \cap \mathbf{b} = 0$ dans $H_0(M_2, \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})$. Par la dualité de Poincaré, nous en déduisons que $\mathbf{b} = 0$ dans $H^m(M_2, \mathcal{A})$.

Pour conclure la démonstration, il reste à remarquer que l'obstruction à prolonger $g^{(m-1)}$ est nulle. Cette application est donc prolongeable sur M_2, avec un changement éventuel de $g^{(m-1)}$ sur $M_2^{(m-1)}$, mais sans toucher $g^{(m-2)}$ sur $M_2^{(m-2)}$. Puisque $m \geq 4$, un tel changement ne modifie pas l'application sur le 2-squelette, et le prolongement $\widehat{g}$ ainsi obtenu induit le même homomorphisme de groupes fondamentaux que g. Ceci achève la démonstration. $\square$

Pour conclure la démonstration du théorème 3.8, nous considérons l'application

$$\widehat{g}\colon M_2 \longrightarrow M_1(m-1)\,.$$

Compte-tenu de la compacité de M_2, nous voyons que l'image $\widehat{g}(M_2)$ est compacte dans $M_1(m-1)$ et, par une propriété générale des CW-complexes,

elle n'intersecte qu'un nombre fini de cellules de $M_1(m-1)$. Considérons la collection finie de toutes ces cellules de dimensions $3, 4, \ldots, m-1$. Le recollement de chaque cellule de cette collection fait intervenir un nombre fini de cellules de dimension strictement inférieure à celle de la cellule considérée. En réunissant toutes les cellules nécessaires pour ce procédé, nous obtenons un sous-complexe fini de $M_1(m-1)$ contenant l'image $\widehat{g}(M_2)$. La démonstration du théorème est achevée. $\square$

3.3 Démonstration du théorème A

3.3.1 Réduction du groupe fondamental

Lemme 3.12. *Soient M une variété orientable de dimension $m \geq 4$ et $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi$ un épimorphisme. Il existe une variété orientable M_1 telle que*

1) $\pi_1(M_1) = \pi$;
2) *l'application caractéristique* $\Phi_1\colon M_1 \longrightarrow K(\pi, 1)$ *vérifie* $\Phi_{1*}([M_1]) = \Phi_*([M])$ *dans* $H_m(K(\pi, 1); \mathbf{Z})$;
3) $\sigma_\phi(M) = \sigma(M_1)$. *Si* $\pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}$, *alors* $\sigma^{st}(M) = \sigma^{st}(M_1)$.

Démonstration. Les deux groupes $\pi_1(M)$ et π étant de présentation finie, nous pouvons choisir pour chaque épimorphisme $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \pi$ un nombre fini d'éléments $\{r_1, \ldots, r_s\} \in \ker \phi$ tels que

$$\langle \pi_1(M)\,;\ r_i = e\,,\ i = 1, 2, \ldots, s \rangle = \pi\,.$$

Géométriquement, ceci signifie qu'on peut recoller s cellules (disques) 2-dimensionnelles à M le long des s lacets $\{\gamma_i\}_{i=1}^s$ correspondant aux relations $\{r_i\}_{i=1}^s$. Le complexe ainsi obtenu,

$$\widehat{M} = M \bigcup_{\gamma_i} B_i^2\,,$$

vérifie la condition $\pi_1(\widehat{M}) = \pi$, et l'application caractéristique $\Phi\colon M \to K(\pi, 1)$ se prolonge à $\widehat{M}$. La proposition 3.6 implique

$$\sigma_\phi(M) = \sigma(\widehat{M})\,; \quad \text{et} \quad \sigma^{st}(M) = \sigma^{st}(\widehat{M})\,, \quad \text{si} \quad \pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}\,. \tag{3.15}$$

On peut considérer les lacets $\{\gamma_i\}_{i=1}^s$ comme des cercles plongés disjoints. L'orientabilité implique la trivialité des fibrés normaux de ces plongements. Nous obtenons la variété désirée M_1 en faisant des chirurgies d'indice 2 de M le long des $\{\gamma_i\}_{i=1}^s$. Ceci signifie qu'on remplace les voisinages tubulaires disjoints $\gamma_i \times B^{m-1}$ $(1 \leq i \leq s)$ par des anses $U_i = B^2 \times S^{m-2}$ $(1 \leq i \leq s)$.

Les propriétés 1) et 2) sont évidentes par construction. Pour démontrer la propriété 3), remarquons que M_1 admet une application m-monotone sur $\widehat{M}$ (projection de U_i sur B^2). Alors la proposition 3.2 et (3.15) impliquent

$$(3.16)\quad \sigma(M_1) \leq \sigma_\phi(M); \quad \text{et} \quad \sigma^{st}(M_1) \leq \sigma^{st}(M), \quad \text{si} \quad \pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}\,.$$

On considère le complexe suivant:

$$\widehat{M_1} = M_1 \bigcup_{\{0\}\times S^{m-2}\subset U_i} B_i^{m-1}\,,$$

où $0 \in B^2$ est le centre du 2-disque correspondant aux anses U_i, $1 \leq i \leq s$. Remarquons qu'on peut obtenir M à partir de M_1 en faisant des chirurgies réciproques (d'indice $m-1$): il existe alors une application m-monotone de M sur $\widehat{M_1}$, et elle induit l'épimorphisme ϕ sur les groupes fondamentaux. En appliquant la proposition 3.2 à cette application et la proposition 3.6 à $\widehat{M_1}$, on obtient les inégalités réciproques de (3.16):

$$\sigma_\phi(M) \leq \sigma(\widehat{M_1}) = \sigma(M_1)\,;$$

$$\sigma^{st}(M) \leq \sigma^{st}(\widehat{M_1}) = \sigma^{st}(M_1), \quad \text{si} \quad \pi = H_1(M, \mathbf{Z})/\operatorname{Tors}\,. \qquad \square$$

Sous les hypothèses du théorème A, nous pouvons donc supposer $\pi_1(M_i) \simeq \pi$, $i = 1, 2$. Les applications caractéristiques $\Phi_i\colon M_i \longrightarrow K(\pi, 1)$, $i = 1, 2$, correspondent aux isomorphismes $\phi_i\colon \pi_1(M_i) \longrightarrow \pi$ et définissent donc un isomorphisme entre $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$. Nous considérons cet isomorphisme fixé pour la suite.

3.3.2 Transformation de l'application h

Soient maintenant X_1 une extension de M_1 et $h\colon M_2 \longrightarrow X_1$ l'application vérifiant le théorème 3.8. Par le corollaire 3.9, on a $\deg h = 1$.

Proposition 3.13. *L'application h est homotope à une application m-monotone*

$$h'\colon M_2 \longrightarrow X_1\,.$$

Pour la démonstration, nous choisissons deux triangulations sur M_2 et X_1, et, en appliquant le théorème d'approximation simpliciale, nous prenons h simpliciale par rapport à ces deux triangulations. Le complexe X_1 est une variété relative orientable [28], et M_1 est une variété fermée orientable. En

appliquant littéralement la démonstration du théorème 4.1 [15] à cette situation, nous pouvons déformer h en une application $\widetilde{h}$ de sorte que : il existe deux m-simplexes τ_1 et τ_2 de X_1 et M_2 respectivement, tels que la restriction de $\widetilde{h}$ à τ_2 soit un homéomorphisme (linéaire) sur τ_1 et $\widetilde{h}^{-1}(\overset{\circ}{\tau_1}) = \overset{\circ}{\tau_2}$. Nous pouvons toujours représenter M_1 comme un complexe ayant une seule m-cellule. Nous supposons la structure simpliciale choisie cohérente avec cette structure cellulaire. Soit

$$X_1^{m-1} = M_1^{m-1} \bigcup_{k=3}^{m-1} \bigcup_{i=1}^{q_k} \mathbf{e}_{i_k}^k \tag{3.15}$$

le $(m-1)$-squelette cellulaire de X_1. Considérons enfin une équivalence homotopique $q\colon X_1 \longrightarrow X_1$, constante sur $X_1^{(m-1)}$, et qui contracte $X_1 \setminus \overset{\circ}{\tau_1}$ en $X_1^{(m-1)}$. Après quelques subdivisions éventuelles de X_1, nous pouvons choisir q simpliciale. Pour achever la démonstration, nous subdivisons autant de fois que nécessaire M_2, et posons finalement

$$h' = q \circ \widetilde{h}.$$

En appliquant le principe de comparaison à h', et le principe d'extension à X_1, il vient :

$$\sigma(M_2) \leq \sigma(X_1) = \sigma(M_1)\,; \quad \sigma^{st}(M_2) \leq \sigma^{st}(X_1) = \sigma^{st}(M_1)\,.$$

Si on échange les rôles de M_1 et M_2 dans le raisonnement ci-dessus, on obtient l'inégalité réciproque. Ceci achève la démonstration. □

4. Systoles associées aux groupes finis

4.1 Démonstration du théorème B

En appliquant le lemme 3.12, nous pouvons supposer que $\pi_1(M_1) = \pi_1(M_2) = \pi$. Soient X_1 une extension de M_1 et $h\colon M_2 \longrightarrow X_1$ l'application obtenue en appliquant le théorème 3.8. Si π contient k éléments, d'après l'hypothèse du théorème B et compte tenu du corollaire 3.9, nous avons

$$h_*([M_2]) = l[X_1]\,, \quad l \equiv 1 \bmod k\,. \tag{4.1}$$

On considère le revêtement universel $q\colon \widetilde{M}_1 \longrightarrow M_1$. Prenons une décomposition cellulaire possédant une unique m-cellule (et une 0-cellule) et notons K son $(m-2)$-squelette. La variété $\widetilde{M}_1$ est simplement connexe, et comme $m \geq 4$, K est donc également simplement connexe.

Soit CK le cone sur K. Posons

$$\widehat{X}_1 = X_1 \bigcup_q CK,$$

où le recollement est effectué par l'application $q\colon K \longrightarrow M_1 \subset X_1$. Puisque K est simplement connexe, $\widehat{X}_1$ a le même groupe fondamental que X_1, et comme $\dim K \leq m-2$, $\widehat{X}_1$ est de nouveau une extension de M_1. L'inclusion $X_1 \subset \widehat{X}_1$ nous permet de prolonger h, et (4.1) reste valable pour $\widehat{X}_1$. D'autre part, nous avons l'application

$$q'\colon \widetilde{M}_1 \bigcup_K CK \longrightarrow M_1 \bigcup_q CK \subset \widehat{X}_1,$$

qui vérifie $q'_*([\widetilde{M}_1 \bigcup CK]) = k[\widehat{X}_1]$. L'espace $\widetilde{M}_1 \bigcup CK$ est équivalent à homotopie près au complexe suivant:

$$Y = \bigvee_{i=1}^{s} S_i^{m-1} \bigcup_f B^m,$$

où s est le nombre de $(m-1)$-cellules de $\widetilde{M}_1$, le disque B^m correspond à la m-cellule et f est l'application de recollement. La contraction du $(m-2)$-squelette ne modifie pas la m-homologie: $H_m(Y, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Ceci implique que f est homotope à zéro, et donc que Y est équivalent à homotopie près à un bouquet de sphères. Il existe donc une application

$$\widehat{q}\colon S^m \longrightarrow \widehat{X}_1 \tag{4.2}$$

vérifiant

$$\widehat{q}_*[S^m] = k[\widehat{X}_1].$$

Soit $l = sk + 1$. On considère la composition d'applications suivante:

$$M_2 \longrightarrow M_2 \vee S^m \xrightarrow{\mathbf{id} \vee \{-\mathbf{s}\}} M_2 \vee S^m \xrightarrow{h \vee \widehat{q}} \widehat{X}_1, \tag{4.3}$$

où la première application consiste à contracter dans un point une sphère $S^{m-1} \subset M_2$ localement plongée et $-\mathbf{s}$ est une application de la sphère S^m dans elle-même de degré $-s$. Il est évident que l'application composée $\widehat{h}\colon M_2 \longrightarrow \widehat{X}_1$ définie par (4.3) vérifie $\deg \widehat{h} = 1$.

En appliquant la proposition 3.13, nous pouvons supposer l'application $\widehat{h}$ m-monotone. Remarquons que, par construction, $\widehat{h}$ induit un isomorphisme de groupes fondamentaux. Du principe de comparaison pour $\widehat{h}$ et du principe d'extension pour $\widehat{X}_1$, nous obtenons donc l'inégalité suivante:

$$\sigma(M_2) \leq \sigma(\widehat{X}_1) = \sigma(M_1).$$

L'inégalité réciproque s'obtient en inversant les rôles de M_1 et M_2 dans le raisonnement ci-dessus. La démonstration est ainsi achevée. $\square$

Le corollaire B1 est maintenant une conséquence directe du théorème B (voir aussi l'exemple 3.1). Un calcul du nombre de classes d'équivalence homotopique des espaces lenticulaires implique le corollaire B2.

Soit $\mathbf{a} \in H^1(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ un générateur, le groupe $H^{2l-1}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ est engendré par $\mathbf{a} \cup \beta(\mathbf{a})^{l-1}$, où β est l'homomorphisme de Bokstein (le dernier élément se réduit à $\mathbf{a}^{2l-1}$ dans le cas où $p = 2$). Si M est ϕ-essentielle, on a $\Phi^*(\mathbf{a} \cup \beta(\mathbf{a})^{l-1}) \neq 0$ dans $H^{2l-1}(M, \mathbf{Z}_p)$. D'autre part, $\phi^* = \Phi^*(\mathbf{a})$ pour un choix convenable de générateur $\mathbf{a}$. Ceci implique les corollaires B3 et B4.

4.2 Topologie des $\mathbf{Z}_2$-systoles

Les systoles associées au groupe $\mathbf{Z}_2$ possèdent des propriétés topologiques particulières. On considère l'ensemble de toutes les paires $\{(M, \phi)\}$, où M est une variété orientable de dimension m et $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ est un épimorphisme. Introduisons une structure de semi-groupe en posant

$$(M, \phi) + (N, \psi) = (M\#N, \phi * \psi), \tag{4.4}$$

où $\phi * \psi$ est le produit libre des deux homomorphismes ϕ et ψ agissant sur

$$\pi_1(M\#N) = \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

(si $m > 2$). Pour $m = 2$, $\phi * \psi$ désigne le produit amalgamé. Notons $\mathcal{M}_\phi^m$ ce semi-groupe. Suivant la théorie du bordisme, nous ne considérons ici que la somme connexe de deux variétés, choix justifié par la nature géométrique du problème. Définissons ensuite l'application

$$\Sigma_m\colon \mathcal{M}_\phi^m \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \tag{4.5}$$

par la formule $\Sigma_m(M, \phi) = \frac{\sigma_\phi(M)}{\sigma_m} \mod 2$.

Théorème 4.1. *L'application Σ_m est un homomorphisme.*

Démonstration. On obtient du corollaire B4 que $\Sigma_m = 0$ si m est pair. Considérons deux paires (M_i, ϕ_i), $i = 1, 2$, la dimension m étant impaire. Soient $\Phi_i\colon M_i \longrightarrow \mathbf{R}P^m \subset \mathbf{R}P^\infty$, $i = 1, 2$ les applications correspondantes. Remarquons que $\deg \Phi_i$ est impair si M_i est essentielle, et qu'il est pair sinon. En appliquant la construction (4.3) ci-dessus à M_i, avec $\widehat{X}_1 = \mathbf{R}P^m$ et $\widehat{q}$ de (4.2) étant le (double) revêtement canonique, nous pouvons supposer que le degré de Φ_i est 1, ou bien 0, selon l'essentialité de M_i.

On considère la composition d'applications

$$M_1 \# M_2 \xrightarrow{h} M_1 \vee M_2 \xrightarrow{\Phi_1 \vee \Phi_2} \mathbf{R}P^m \vee \mathbf{R}P^m \xrightarrow{p} \mathbf{R}P^m, \tag{4.6}$$

où h contracte en un point la sphère de recollement, et où p agit comme l'identité sur chaque composante du bouquet. Il est évident que

$$(p \circ (\Phi_1 \vee \Phi_2) \circ h)_* = \phi_1 * \phi_2 \quad \text{et} \quad \deg(p \circ (\Phi_1 \vee \Phi_2) \circ h) = \deg \Phi_1 + \deg \Phi_2 .$$

Si $\deg \Phi_1 = \deg \Phi_2 = 1$, on tire de la construction (4.3) l'existence d'une autre application $f\colon M_1 \# M_2 \longrightarrow \mathbf{R}P^m$ telle que $f_* = \phi_1 * \phi_2$ et $\deg f = 0$. Si $\deg \Phi_1 + \deg \Phi_2 < 2$, on prend pour f l'application définie par (4.6). Dans les deux cas, nous obtenons une application

$$f\colon M_1 \# M_2 \longrightarrow \mathbf{R}P^m$$

induisant l'application $\phi_1 * \phi_2$ sur les groupes fondamentaux et qui vérifie la congruence suivante :

$$\deg f \equiv (\deg \Phi_1 + \deg \Phi_2) \bmod 2.$$

Le théorème est maintenant immédiat d'après le corollaire B4. □

5. Remarques finales et questions ouvertes

1. Pour chaque variété essentielle M de dimension m, $\sigma(M) > 0$ et une borne inférieure universelle a été trouvée par M. Gromov dans [18], chap. 0. Il a établi l'inégalité suivante ne dépendant que de la dimension de la variété essentielle M :

$$\sigma(M) \geq \frac{1}{6^m (m+1)^m m^{m^2} ((m+1)!)^{\frac{m}{2}}} .$$

Actuellement, c'est la meilleure borne inférieure connue pour les constantes systoliques dans les dimensions $m \geq 3$. Néanmoins, elle paraît loin d'être optimale. On sait ([18], chap.5) que pour toute surface M de groupe fondamental infini, $\sigma(M) > \frac{3}{4}$. De plus, la meilleure borne inférieure dans le cas deux-dimensionnel est $\sigma(\mathbf{R}P^2) = \frac{2}{\pi}$. La constante systolique pour l'espace projectif m-dimensionnel $\sigma_m = \sigma(\mathbf{R}P^m)$ semble un bon candidat pour être la meilleure borne inférieure en dimension m. Cette conjecture est complètement ouverte pour $m \geq 3$, et on ne connaît ni le comportement asymptotique de σ_m, ni d'estimée raisonnable de σ_m. D'après le corollaire B4, la conjecture est vérifiée pour les variétés orientables possédant

certaines propriétés topologiques : si M est orientable et admet un élément $\alpha \in H^1(M, \mathbf{Z}_2)$, tel que $\alpha^m \neq 0$ dans $H^m(M, \mathbf{Z}_2)$, alors

$$\sigma(M) \geq \sigma_m .$$

On sait actuellement très peu de choses sur les constantes systoliques fondamentales qui apparaissent naturellement (voir le théorème B et ses corollaires). Par exemple, on ne sait ni comparer les constantes systoliques $\sigma(L(\mathbf{q};p))$ d'espaces lenticulaires différents, ni si la fonction $\sigma(L(\mathbf{q};p))$ *est croissante en* p. Une réponse affirmative à cette question semblerait très naturelle.

2. La comparaison des constantes systoliques pour les variétés non-orientables pose certaines difficultés topologiques. Pour deux variétés m-dimensionnelles de même groupe fondamental π, les sous-groupes d'orientation ne sont en général pas cohérents par un automorphisme du π (voir la démonstration du théorème 3.8). La situation se complique encore si les variétés considérées admettent des épimorphismes sur un groupe fixé π. Même si les variétés représentent la même classe d'homologie de π, les sous-groupes d'orientation peuvent ne pas concorder avec les noyaux correspondants. Ce phénomène est déjà visible dans le cas 2-dimensionnel avec $\pi = \mathbf{Z}_2$. Dans le cas $\pi = \mathbf{Z}_2$, nous ne pouvons énoncer que la version faible du corollaire B4 (voir [1]) :

Soient M une variété non-orientable de dimension m et $\phi\colon \pi_1(M) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ un épimorphisme. Alors $\sigma_\phi(M)$ vérifie l'inégalité suivante

$$\sigma_\phi(M) \leq \sigma_m .$$

Si m est impair et $\widetilde{M}_\phi$ est orientable, alors $\sigma_\phi(M) = 0$.

Ici $\widetilde{M}_\phi$ désigne le revêtement double correspondant à $\ker \phi$.

3. Pour démontrer des résultats sur l'égalité de constantes sytoliques, nous avons utilisé des CW-complexes spéciaux : les extensions. Ce sont des complexes (orientables) ayant une unique cellule de dimension maximale m. Ceci nous ramène au problème de comparaison des constantes systoliques des CW-complexes ayant une cellule de dimension maximale (comparer avec le théorème 3.8). Malheureusement, notre approche ne fournit pas de résultats, même pour le groupe le plus élémentaire $\pi = \mathbf{Z}_2$.

Un exemple assez simple, et intéressant, est donné par le polyèdre suivant

$$X_{(3)} = \mathbf{R}P^2 \bigcup_{3b} B^3 ,$$

où $b \in \pi_2(\mathbf{R}P^2)$ est un générateur. On peut choisir une application 3-monotone $f\colon \mathbf{R}P^3 \longrightarrow X_{(3)}$, induisant l'identité sur les groupes fondamentaux. Ceci justifie l'inégalité :

$$\sigma(X_{(3)}) \geq \sigma_3 .$$

Pour démontrer l'inégalité réciproque dans le cadre de notre approche, nous avons besoin de construire une application 3-monotone de $X_{(3)}$ dans $\mathbf{R}P^3$: une telle application n'existe pas. La question de savoir si cette dernière inégalité est stricte demeure ouverte.

Cet exemple nous amène à poser la question suivante :

Soient X un polyèdre fini orientable et $\phi\colon \pi_1(X) \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ un épimorphisme. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour la constante systolique $\sigma_\phi(X)$ en fonction de X et de ϕ ?

L'essentialité de Gromov est un invariant algébrique. Cet invariant est lié à *l'essentialité géométrique*. Soient X un polyèdre fini (orientable) de dimension m, π un groupe de présentation finie et $\phi\colon \pi_1(X) \longrightarrow \pi$ un épimorphisme. X est dit *géométriquement ϕ-essentiel* s'il n'existe aucune application $f\colon X \longrightarrow K$, où K est un polyèdre, qui vérifie les conditions suivantes :

$$1)\ \dim X > \dim K ; \qquad 2)\ \pi_1(K) = \pi ; \qquad 3)\ \ker f_* = \ker \phi .$$

L'essentialité algébrique de Gromov implique évidemment l'essentialité géométrique. Dans le cas des variétés orientables, ces deux notions d'essentialité sont équivalentes [2]. L'exemple suivant nous montre que, dans le cas général, c'est-à-dire pour un polyèdre quelconque, les deux notions peuvent différer. Posons

$$X_{(2)} = \mathbf{R}P^2 \bigcup_{2b} B^3 .$$

On peut voir facilement que $X_{(2)}$ est géométriquement essentiel. D'autre part, si $h\colon X_{(2)} \longrightarrow \mathbf{R}P^\infty$ est l'application canonique, alors l'application induite

$$h\colon H_3(X_{(2)};\mathbf{k}) \longrightarrow H_3(\mathbf{R}P^\infty;\mathbf{k})$$

est triviale quels que soient les coefficients $\mathbf{k}$. Ceci nous conduit à poser la question suivante :

Est-ce qu'il existe des paires (X, ϕ), *où* X *est un polyèdre (orientable) géométriquement* ϕ*-essentiel, telles que* $\sigma_\phi(X) = 0$ *?*

REMERCIEMENTS. Je remercie Pierre de la Harpe de m'avoir fait découvrir le groupe de Thompson et Vlad Sergiescu pour ses renseignements sur l'homologie de ce groupe. Je remercie également Florent Balacheff pour ses interventions et suggestions multiples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BABENKO, I. Géométrie systolique des variétés de groupe fondamental $\mathbf{Z}_2$. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, Grenoble 2004, vol. 22, 25–52.

[2] —— Asymptotic invariants of smooth manifolds. *Russian Acad. Sci. Izv. Math. 41* (1993), 1–38.

[3] —— Extremal problems in geometry, surgeries of manifolds and problems in group theory. *Izv. Math. 59* (1995), 321–332.

[4] —— Forte souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52* (2002), 1259–1284.

[5] BABENKO, I. and M. KATZ. Systolic freedom of orientable manifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31* (1998), 787–809.

[6] BABENKO, I., M. KATZ and A. SUCIU. Volumes, middle-dimensional systoles, and Whitehead products. *Math. Res. Lett. 5* (1998), 461–471.

[7] BAVARD, C. Inegalité isoperimétrique pour la bouteille de Klein. *Math. Ann. 274* (1986), 439–441.

[8] BERGER, M. A l'ombre de Loewner. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 5* (1972), 241–26.

[9] —— *Systoles et applications selon Gromov. Séminaire Bourbaki 1992/93*, exp. 771. *Astérisque 216* (1993), 279–310.

[10] —— Riemannian geometry during the second half of the twentieth century. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 100* (1998), 45–208.

[11] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics *87*, Springer, 1982.

[12] BROWN, K. S. and R. GEOGHEGAN. An infinite-dimensional torsion-free FP_∞ group. *Invent. Math. 77* (1984), 367–381.

[13] CANNON, J. W., W. J. FLOYD and W. R. PARRY. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *L'Enseignement Math. (2) 42* (1996), 215–256.

[14] CROKE, C. and M. KATZ. Universal volume bounds in Riemannian manifolds. *Surv. Differ. Geom. 8* (2003), 109–137.

[15] EPSTEIN, D. B. A. The degree of a map. *Proc. London Math. Soc. (3) 16* (1966), 369–383.

[16] GHYS, E. and V. SERGIESCU. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helv. 62* (1987), 185–239.

[17] GROMOV, M. Systoles and intersystolic inequalities. Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honeur de Marcel Berger. Collection SMF *1* (1996), 291–362.

[18] —— Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom. 18* (1983), 1–147.

[19] —— *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces.* Birkhäuser, 1999.

[20] KATZ, M. and A. SUCIU. Volume of Riemannian manifolds, geometric inequalities, and homotopy theory. In *Rothenberg Festschrift.* M. Farber, W. Lueck, S. Weinberger, eds. *Contemp. Math. 231*, AMS, 1999.

[21] —— Systolic freedom of loop spaces. *Geom. Funct. Anal. 11* (2001), 60–73.

[22] HU, S.-T. *Homotopy Theory.* Academic Press, New York and London, 1959.

[23] OLUM, P. Mapping of manifolds and the notion of degree. *Ann. of Math (2) 58* (1953), 458–480.

[24] PONTRYAGIN, L. S. *Foundations of Combinatorial Topology.* Graylock Press, 1952.

[25] POSTNIKOV, M. M. *Lectures on Algebraic Topology. Homotopy Theory of Cell Complexes.* "Nauka", Moscow, 1985.

[26] PU, P. M. Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds. *Pacific J. Math. 2* (1952), 55–71.

[27] DE RHAM, G. *Type d'homotopie des rotations et des espaces lenticulaires.* Lecture Notes in Mathematics *48.* Springer-Verlag, Berlin, 1960, 96–101.

[28] SPANIER, E. H. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, 1966.

[29] STALLINGS, J. A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated. *Amer. J. Math. 85* (1963), 541–543.

[30] THOM, R. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv. 28* (1954), 17–86.

[31] WRIGHT, A. H. Monotone mappings and degree one mappings between PL-manifolds. Geometric Topology, Proc. Conf. Parc City, Utah 1974. Lecture Notes in Mathematics *438*, Springer-Verlag, Berlin 1975, 441–459.

(Reçu le 14 février 2006)

Ivan K. Babenko

Université Montpellier II
Centre National de la Recherche Scientifique UMR 5149
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier
Place Eugène Bataillon, Bât. 9, CC051
34095 Montpellier CEDEX 5
France
e-mail : babenko@darboux.math.univ-montp2.fr