$$P(a^2) = a\,, \quad P(b^2) = b\,, \quad P(4) = 2\,, \quad 2aP'(a^2) = 2bP'(b^2) = 1\,.$$

Un examen de la concavité permet d'établir aisément que l'on a

$$y \leqslant P(y^2) \qquad (0 \leqslant y \leqslant 2)\,. \tag{4.2}$$

Par intégration sur $[0, 2]$, nous obtenons, pour toute mesure μ,

$$\sigma_1 \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant 4} \lambda_j s_{2j} = \alpha a + \beta b + 2\gamma = 1 - s\,,$$

où l'égalité découle du fait que la relation $P(y^2) = y$ a lieu $\mathrm{d}\mu^*$-presque partout.

Cette estimation implique bien (4.1) puisque le membre de gauche est égal au premier moment de $\mathrm{d}\mu^*$. La majoration (1.6) est, quant à elle, obtenue en intégrant (4.2) relativement à la mesure de répartition logarithmique normalisée des $\tau_0(p)$ $(p \leqslant x)$ sur $[0, 2]$ et en exploitant les estimations de [11] sous la forme

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\tau_0(p)^{2k}}{p} = s_{2k} \log_2 x + O(1) \qquad (0 \leqslant k \leqslant 4,\, x \to \infty)\,.$$

Le fait que de telles formules asymptotiques résultent de la seule connaissance de l'ordre du pôle des séries de Dirichlet $\sum_{n \geqslant 1} \tau_0(n)^{2k}/n^s$ en $s = 1$ peut, par exemple, être établi en faisant appel au lemme 2.4. Nous omettons les détails.

REMERCIEMENTS. L'auteur tient à exprimer sa gratitude envers Jean-Pierre Ferrier, Guillaume Hanrot, Anne de Roton, Patrick Sargos, Mark Watkins et Jie Wu pour leur aide lors de la préparation de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELIGNE, P. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 43* (1974), 273–307.

[2] DABOUSSI, H. and H. DELANGE. On a theorem of P. D. T. A. Elliott on multiplicative functions. *J. London Math. Soc. (2) 14* (1976), 345–356.

[3] ELLIOTT, P. D. T. A. A mean-value theorem for multiplicative functions. *Proc. London Math. Soc. (3) 31* (1975), 418–438.

[4] —— Mean value theorems for multiplicative functions bounded in mean α-power, $\alpha > 1$. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A 29* (1980), 177–205.

[5] —— Multiplicative functions and Ramanujan's τ-function. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A 30* (1980/81), 461–468.

[6] —— *Duality in Analytic Number Theory.* Cambridge Tracts in Mathematics *122*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] ELLIOTT, P. D. T. A., C. J. MORENO and F. SHAHIDI. On the absolute value of Ramanujan's τ-function. *Math. Ann. 266* (1984), 507–511.

[8] HALBERSTAM, H. and H.-E. RICHERT. On a result of R. R. Hall. *J. Number Theory 11* (1979), 76–89.

[9] HALL, R. R. and G. TENENBAUM. Effective mean value estimates for complex multiplicative functions. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110* (1991), 337–351.

[10] HILDEBRAND, A. On Wirsing's mean value theorem for multiplicative functions. *Bull. London Math. Soc. 18* (1986), 147–152.

[11] KIM, H. H. and F. SHAHIDI. Cuspidality of symmetric powers with applications. *Duke Math. J. 112* (2002), 177–197.

[12] LEVIN, B. V., N. M. TIMOFEEV and S. T. TULJAGANOV. Distribution of the values of multiplicative functions (en russe). *Litovsk. Mat. Sb. 13* (1973), 87–100, 232.

[13] MAUCLAIRE, J.-L. On some arithmetical functions. *Functiones et Approximatio 35* (2006), 219–233.

[14] MORENO, C. J. and F. SHAHIDI. The fourth moment of Ramanujan τ-function. *Math. Ann. 266* (1983), 233–239.

[15] RANKIN, R. A. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$ on the line $\Re s = 13/2$. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 35* (1939), 351–372.

[16] —— Sums of powers of cusp form coefficients. II. *Math. Ann. 272* (1985), 593–600.

[17] TENENBAUM, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Cours spécialisés, 1. Société Mathématique de France (1995).

[18] —— (en collaboration avec Jie WU). *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*. Cours spécialisés, 2. Société Mathématique de France (1996).

(Reçu le 22 février 2007; version révisée reçue le 18 juin 2007)

Gérald Tenenbaum

Institut Élie Cartan
Université Henri-Poincaré Nancy 1
BP 239
F-54506 Vandœuvre Cedex
France
e-mail: gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr