

A conjecture in number theory

Autor(en): **Hilton, Peter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109908>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

39

A CONJECTURE IN NUMBER THEORY

by Peter HILTON

Given positive integers b , a , odd, $a < \frac{b}{2}$, $\gcd(a, b) = 1$, we construct a *symbol* or *coach*

$$(39.3) \quad b \left| \begin{array}{c} a_1 a_2 \cdots a_r \\ k_1 k_2 \cdots k_r \end{array} \right|, \quad a_1 = a,$$

where $b - a_i = 2^{k_i} a_{i+1}$, with k_i maximal positive ($i = 1, 2, \dots, r$), $a_{r+1} = a_1$. Then each a_i is odd with $a_i < \frac{b}{2}$. It is, moreover, known (see Chapter 4 of [1], [2]) that, if $k = \sum_i k_i$, then k is the *quasi-order* of 2 mod b , that is, k is the smallest positive integer such that $2^k \equiv \pm 1 \pmod{b}$. In fact,

$$(39.4) \quad 2^k \equiv (-1)^r \pmod{b}.$$

As indicated, if S is the set of all positive integers satisfying the conditions on a above, then $a_i \in S$, $1 \leq i \leq r$. It is possible that the set $\{a_i, 1 \leq i \leq r\}$ exhausts S . If not we may, of course, construct further coaches based on b . For example, with $b = 65$, there are 4 coaches

$$(39.5) \quad 65 \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 3 & 31 & 17 & 7 \\ \hline 6 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c|c|c|c|c} 7 & 29 & 9 & 11 & 27 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 19 & 23 & 21 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right|,$$

forming what we call the *complete symbol* for $b = 65$. We write $c = c(b)$ for the number of coaches in a complete symbol.

We conjecture that it should be possible to determine if a complete symbol has only one coach ($c = 1$), or, more generally, to determine the number of coaches, without having to construct the coaches — and thus determining the quasi-order of 2 mod b . It is, moreover, clear that the theory can be extended to arbitrary bases t and is not confined to the case $t = 2$.

REMARK 39.1. In fact, we know that $\Phi(b) = 2ck$, where Φ is the Euler totient function. Thus $c = 1$ if, and only if, $k = \frac{1}{2}\Phi(b)$. The rule

$$(39.6) \quad \Phi(b) = 2ck$$

is proved in [3], which is the contribution of Peter Hilton, Jean Pedersen and Byron Walden to a Festschrift for Martin Gardner.

REFERENCES

- [1] HILTON, P., D. HOLTON and J. PEDERSEN. *Mathematical Reflections. In a Room with Many Mirrors*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] HILTON, P., D. HOLTON and J. PEDERSEN. *Mathematical Vistas. From a Room with Many Windows*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] HILTON, P., J. PEDERSEN and B. WALDEN. A property of complete symbols. In: *Festschrift for Martin Gardner*, to appear.

Peter Hilton

Department of Mathematical Sciences
Binghamton University (SUNY)
Binghamton, NY 13902-6000
USA
e-mail: peter@math.binghamton.edu