

Automatic permutations

Autor(en): **Bartholdi, Laurent**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109875>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6

AUTOMATIC PERMUTATIONS

by Laurent BARTHOLDI

Finite state automata are wonderful little devices to produce interesting groups — for examples, see [1] or [2]. We fix a finite set X , called the *alphabet*. An *automaton* \mathcal{A} is given by a finite set Q , a map $\tau: Q \times X \rightarrow X \times Q$, and an element $q \in Q$.

It defines an *automatic transformation*, still written $\mathcal{A}: X^* \rightarrow X^*$ on strings over X , by the following rule: given $w = x_1 \dots x_n$, set $q_1 = q$, and compute $\tau(q_1, x_1) = (y_1, q_2)$, $\tau(q_2, x_2) = (y_2, q_3)$, etc. up to $\tau(q_n, x_n) = (y_n, q_{n+1})$. Then the image of w under \mathcal{A} is $y_1 \dots y_n$.

Part of the interest in these transformations is that they can be used to generate groups (and semigroups) with striking features, such as infinite finitely generated torsion groups, groups of intermediate word growth, of non-uniformly exponential word growth, etc.

It is easy to test whether an automatic transformation is the identity — assuming Q is minimal, this happens if $\tau(*, x) = (x, *)$ for all possible $*$'s. It is also easy to test whether it is invertible — this happens if the composition $x \rightarrow (q, x) \rightarrow \tau(q, x) = (y, *) \rightarrow y$ is a permutation of X for all $q \in Q$. It is finally easy to see that the product and inverse of automatic transformations are again automatic.

Therefore, in a group G generated by automatic invertible transformations, all elements of G are themselves represented by automatic transformations. It follows that the most basic decision problem — determining whether a word over a given generating set is trivial — is solvable for such groups.

What seems difficult to test, and is the object of this conjecture, is whether an automatic permutation \mathcal{A} has finite order; i.e. whether the following decision problem is solvable: “determine whether the cyclic subgroup generated by a given group element is finite or infinite”.

If the order of \mathcal{A} is finite, then this can be checked by computing powers of \mathcal{A} and seeing that one of them induces the identity transformation. But how can one determine that \mathcal{A} has infinite order? This would follow from

CONJECTURE 6.1. *If \mathcal{A} has finite order, then its order divides $(\#X!)^{\#Q}$.*

A sharper bound should actually be $\exp(\text{Sym}(X))^{\#Q}$. If $X = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ and $\sigma \in \text{Sym}(X)$ has order e and $Q = \{0, \dots, q\}$, the automaton defined by initial state q and

$$\tau(i, x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{if } i = 0, \\ (x + 1, i - 1) & \text{if } i > 0 \text{ and } x = 0, \\ (x + 1, 0) & \text{if } i > 0 \text{ and } x \neq 0 \end{cases}$$

has order e^q .

REFERENCES

- [1] BARTHOLDI, L., R. GRIGORCHUK, and V. NEKRASHEVYCH. From fractal groups to fractal sets. In: *Fractals in Graz 2001: Analysis, Dynamics, Geometry, Stochastics*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2003, 25–118.
- [2] BARTHOLDI, L., R. GRIGORCHUK and Z. ŠUNÍK. Branch groups. In: *Handbook of Algebra, vol. 3*. North-Holland, Amsterdam, 2003, 989–1112.

Laurent Bartholdi

EPFL
 SB IMB MAD
 CH-1015 Lausanne
 Switzerland
e-mail: laurent.bartholdi@gmail.com