Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 57 (2011)

Artikel: Le cerf-volant d'une constellation
Autor: Popescu-Pampu, Patrick
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-283535

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 57 (2011), 303–347

LE CERF-VOLANT D'UNE CONSTELLATION

par Patrick POPESCU-PAMPU

RÉSUMÉ. On considère un point lisse O d'une surface analytique complexe S. Une *constellation* basée en O est un ensemble de points infiniment voisins de O. Les constellations finies sont codées combinatoirement soit à l'aide d'un *diagramme d'Enriques*, soit à l'aide du *graphe dual* du diviseur obtenu en éclatant les points, deux arbres décorés. Des algorithmes de passage d'un arbre à l'autre sont connus, mais aucun ne permet de se représenter géométriquement leur relation. Nous associons ici à chaque constellation un complexe simplicial de dimension deux, appelé son *cerf-volant*, qui contient canoniquement le diagramme d'Enriques et le graphe dual. De plus, les décorations de ces deux arbres s'expriment très simplement en termes de la géométrie affine du cerf-volant. La transition vers les calculs de fractions continues, ubiquitaires dans ce contexte, est assurée par des plongements partiels des cerfs-volants dans un complexe simplicial canoniquement associé à une base d'un réseau, son *lotus universel*. Cette dernière notion est généralisée en toutes dimensions.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction 304
2. Constellations de points infiniment voisins 306
3. Le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation . . 310
4. Construction des voilures et des cerfs-volants 314
5. Modèles affines canoniques des membranes 319
6. Le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation comme sous-arbres du cerf-volant 323
7. Interprétation valuative 328
8. Le lotus universel et les fractions continues 332
9. Les lotus universels de dimension quelconque 341

Achevé de composer le 22 décembre 2011 à 08 : 59

1. Introduction

Depuis le travail fondateur [21] de Max Noether, divers problèmes de géométrie birationnelle des surfaces ou des courbes planes ont été étudiés à l'aide de la notion de *point infiniment voisin* d'un point lisse donné sur une surface. La première étude systématique de cette notion dans un traîté de géométrie algébrique semble être celle faite par Enriques et Chisini [10].

En géométrie birationnelle apparaissent naturellement des suites d'éclatements centrés en des points infiniment voisins de points lisses de surfaces. Si tous ces éclatements sont effectués au-dessus d'un unique point O, leurs centres forment ce que Campillo, González-Sprinberg et Lejeune-Jalabert [4] appelèrent une *constellation* de points infiniment voisins de O. Il est important de bien comprendre la géométrie des constellations, en particulier comment les points se suivent les uns les autres lors des processus d'éclatements successifs les faisant apparaître.

Dans [10] (voir aussi [7]) fut introduit un arbre enraciné, appelé depuis *diagramme d'Enriques*, qui retient exactement le processus précédent: ses sommets correspondent bijectivement aux points de la constellation, la racine correspondant à O, et l'on relie deux sommets si l'un des points correspondants apparaît en éclatant l'autre. De plus, les arêtes sont de deux types, soit courbes, soit droites, et dans une suite d'arêtes droites s'éloignant de la racine de l'arbre, on dit à chaque pas si l'on va tout droit ou si l'on part transversalement. Avec ces décorations, le diagramme d'Enriques code complètement la combinatoire de la constellation.

Ultérieurement fut introduit un autre diagramme codant différemment la combinatoire de la constellation: le *graphe dual* du diviseur obtenu en éclatant tous les points de la constellation (voir [2] et [27]). Dans ce cas, ce sont les sommets qui sont décorés (par les auto-intersections des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel qui leur correspondent).

Les descriptions précédentes montrent que les sommets des deux graphes sont naturellement en correspondance bijective. Mais de cette manière les arêtes ne se correspondent pas. D'autre part, comme les deux diagrammes contiennent la même information, on peut en principe passer de l'un à l'autre. Des algorithmes de passage ont été décrits, utilisant tous des calculs de fractions continues (voir [2], [7], [3]). Mais ils ne permettent pas de *penser géométriquement* le lien entre les deux graphes, ce qui rend le dialogue difficile entre personnes utilisant des codages différents.

Dans cet article, je décris une manière de visualiser simultanément le diagramme d'Enriques et le graphe dual. Pour cela, j'associe à chaque

constellation un complexe simplicial (réalisé géométriquement) de dimension deux, dont certains points sont distribués en types. Je l'appele *le cerf-volant de la constellation*. Il est composé de pièces élémentaires simpliciales de dimensions 1 et 2 – *les voiles élémentaires : axes, demi-pétales et pétales* – et de segments – *les cordes* – recollés lors d'un jeu d'assemblage dicté par le processus d'éclatement menant au déploiement complet de la constellation par éclatements successifs. Certaines cordes se retrouvent recollées à l'intérieur des voiles élémentaires, les autres flottant librement. L'union des voiles élémentaires forme *la voilure* du cerf-volant de la constellation. Celle-ci peut être munie canoniquement d'une structure affine recollant celles des voiles élémentaires. Quant aux cordes, leur union forme *le cordage*, qui est un sous-arbre du cerf-volant vu en tant qu'espace topologique. Tout ceci est expliqué dans les sections 2–5.

Le théorème principal de cet article (Théorème 6.2) montre que *le diagramme d'Enriques et le graphe dual se plongent naturellement dans le cerf-volant*. Plus précisément, le diagramme d'Enriques est isomorphe au cordage et le graphe dual est isomorphe à une partie du bord de la voilure. De plus, les deux types de décorations s'interprètent en termes très simples à l'aide de la structure affine du cerf-volant. En particulier, les arêtes droites du diagramme d'Enriques correspondent aux cordes internes, et elles vont tout droit selon la convention d'Enriques et Chisini si et seulement si elles forment une géodésique pour la structure affine de la voilure !

Dans la Section 7, j'explique le lien de la notion de cerf-volant avec l'arbre valuatif de Favre et Jonsson [11]. Plus précisément, les voilures de toutes les constellations finies se recollent en un complexe simplicial infini, la voilure du *firmament* de O, c'est-à-dire de la constellation de tous les points infiniment voisins de O. Cette voilure peut être munie naturellement d'un feuilletage de dimension 1, dont l'espace des feuilles est l'arbre valuatif.

Jusqu'à présent, le passage d'un graphe à l'autre était décrit à l'aide de fractions continues. Ces calculs peuvent eux aussi être interprétés à l'aide du cerf-volant. Pour cela, j'introduis dans la Section 8 la notion de *lotus universel* associé à une base d'un réseau bidimensionnel. Il s'agit d'un complexe simplicial bidimensionnel infini dont la structure permet de 'voir' les développements en fractions continues et dans lesquels se plongent les sous-complexes homéomorphes à des disques des voilures des cerfs-volants. Dans la Section 9 j'explique brièvement une extension de la notion de lotus en dimension quelconque, ainsi que la généralisation de la notion de fraction continue suggérée par cette extension.

Achevé de composer le 22 décembre 2011 à 08 : 59

REMERCIEMENTS. Je remercie Charles Favre pour ses explications concernant l'arbre valuatif, Evelia García Barroso pour les longues discussions que nous avons eues au sujet du vocabulaire de cet article, Bernard Teissier pour m'avoir suggéré le nom de 'lotus', ainsi que Pedro González Pérez et Monique Lejeune-Jalabert pour leurs remarques sur des versions préliminaires de cet article.

2. CONSTELLATIONS DE POINTS INFINIMENT VOISINS

Dans cette section, j'explique les notions de *points infiniment voisins*, de *points proches*, d'*astres*, de *firmament* et de *constellations*.

Dans tout ce qui suit, nous travaillerons avec des surfaces analytiques complexes lisses. Mais nos considérations se transposent sans aucun changement au cas des surfaces algébriques lisses sur un corps algébriquement clos, pourvu que tous les points soient interprétés comme des points fermés.

Soit (S, O) un germe de surface lisse. Notons par $\mathcal{O}_{S,O}$ son algèbre locale et par $\mathcal{F}_{S,O}$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_{S,O}$. Soit:

$$(S_O, E_O) \xrightarrow{\pi_O} (S, O)$$

le *morphisme d'éclatement* du point O. Les points de la courbe exceptionnelle $E_O := \pi_O^{-1}(O)$ (qui est une courbe rationnelle lisse canoniquement isomorphe au projectifié de l'espace tangent de S en O), sont appelés *les points infiniment voisins de O à hauteur* 1, ou bien *les points directement proches* de O.

DÉFINITION 2.1. Si $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$ est un morphisme composé d'éclatements de points, alors un point du diviseur exceptionnel réduit $E := \pi^{-1}(O)$ est appelé *un point infiniment voisin* de O.

En associant à chaque point infiniment voisin de O la valuation divisorielle de $\mathcal{F}_{S,O}$ qui calcule la multiplicité au point respectif, on définit naturellement une relation d'équivalence sur l'ensemble des points infiniment voisins de O sur les divers éclatés (Σ, E) de (S, O): deux points sont *équivalents* si les valuations associées sont égales. Par la suite, lorsque l'on parlera de points infiniment voisins, il s'agira d'une classe d'équivalence de points identifiés de la manière précédente. On dira qu'une surface (Σ, E) obtenue par une suite d'éclatements au-dessus de O et telle que E contient un représentant de la classe d'équivalence est *un modèle contenant le point infiniment voisin*.

On dit qu'un point infiniment voisin de O est *à hauteur* $d > 0$ s'il est directement proche d'un point à hauteur $d-1$. Il est dit *proche de* O si dans un modèle Σ il se trouve sur la transformée stricte sur Σ de E_O (on utilise ici le fait qu'un morphisme π non-trivial du type précédent se factorise nécessairement par l'éclatement π_O de O). Ceci est alors vrai pour tout modèle le contenant.

REMARQUE 2.2. La notion de point infiniment voisin a été introduite (sous l'appellation '*unendlich nahe einander*') par Max Noether dans [21], afin d'étudier les singularités des courbes algébriques planes à l'aide de suites d'éclatements successifs. Les notions de points infiniments voisins et de points proches ont été utilisées par Enriques et Chisini [10] pour formuler des conditions de passage par des points bases pour les systèmes linéaires de courbes planes. Ultérieurement, Zariski [28] les a reformulées dans le langage des idéaux et les a utilisées dans l'étude des idéaux primaires pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,O}$. On trouvera une introduction à ces aspects dans l'article de survol [19] de Lejeune-Jalabert.

DÉFINITION 2.3. Notons par $\mathcal{C}_O$ l'ensemble des points infiniment voisins de O, en incluant O lui-même. Nous appellerons ses éléments des *astres*, $\mathcal{C}_O$ étant le *firmament* de O.

La hauteur peut être vue comme une fonction:

$$H\colon \mathcal{C}_O \to \mathbf{N}\,.$$

La relation de proximité s'étend naturellement à $\mathcal{C}_O$ tout entier. Chaque astre $A \in \mathcal{C}_O \setminus O$ est proche d'*un* ou de *deux* autres astres. Afin d'étudier les deux possibilités, considérons un modèle $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$ contenant A.

• *Si A se trouve sur une seule composante irréductible E_i de E*, on l'appelle un *astre libre*. Il est proche uniquement de l'astre A_i dont l'éclatement crée la courbe E_i. Notons $p_D(A) := A_i$, et appelons ce point *le prédécesseur direct* de A.

• *Si A se trouve sur deux composantes E_i et E_j de E*, on l'appelle un *astre satellite*. Dans ce cas, A est proche de deux autres astres $A_i \neq A_j$ dont les éclatements créent E_i et E_j respectivement. L'un d'entre eux – supposons qu'il s'agit de A_i – est nécessairement proche de l'autre, A_j. Notons $p_D(A) := A_i$, $p_I(A) := A_j$ et appelons A_i *le prédécesseur direct* de A et A_j *le prédécesseur indirect* de A.

Étendons les définitions précédentes en posant $p_D(O) := O$. Nous obtenons ainsi une application surjective :

$$p_D \colon \mathcal{C}_O \longrightarrow \mathcal{C}_O .$$

Elle vérifie $H \circ p_D = H - 1$ sur $\mathcal{C}_O \setminus O$ et $H(O) = 0$. Les fibres de p_D au-dessus d'un astre sont les points directement proches de celui-ci, à l'exception de O, pour qui la fibre $p_D^{-1}(O)$ contient aussi l'astre O lui-même.

Nous pouvons reformuler de la manière suivante la définition d'une *constellation* donnée par Campillo, González-Sprinberg et Lejeune-Jalabert dans [4] et [5] :

DÉFINITION 2.4. Une *constellation* centrée en O est un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$ qui est stable sous l'application p_D.

Par la suite, nous nous restreindrons essentiellement à des constellations *finies* centrées en O.

REMARQUE 2.5. On peut penser au couple (S, O) comme à une représentation visuelle d'un point brillant sur le ciel. Jadis on interprétait un tel point comme étant une étoile, mais avec l'avènement des lunettes astronomiques, puis des téléscopes de plus en plus puissants, on a appris à y voir des amas d'autres points brillants, pouvant être eux-mêmes des galaxies ou des étoiles. C'est pour cette raison que j'utilise le terme *astre*, ne voulant pas préjuger de sa nature en l'appelant *étoile*. De plus, une constellation est une configuration particulière d'astres, ce qui montre que le vocabulaire utilisé ici s'adapte bien à celui introduit par Campillo, González-Sprinberg et Lejeune-Jalabert. En fait, ces derniers étudièrent des constellations en dimension quelconque (on pourra consulter pour l'état de l'art à ce sujet le survol [6]). Par ailleurs, un vocabulaire à connotations célestes a aussi été utilisé par Hironaka [15]. Mais sa notion d'*étoile* est différente de celle d'*astre* et ce qu'il appelle *voûte étoilée* est différent du *firmament*.

À la constellation finie $\mathcal{C}$ nous pouvons associer le morphisme biméromorphe :

$$\pi_{\mathcal{C}} \colon (S_{\mathcal{C}}, E_{\mathcal{C}}) \to (S, O) \tag{2.1}$$

obtenu en éclatant successivement les astres de $\mathcal{C}$ selon leur hauteur : on démarre à $i = 0$ et à chaque étape $i \geq 0$ on éclate tous les astres de $\mathcal{C}$ de hauteur i. Intuitivement, cela correspond à faire des zooms successifs au

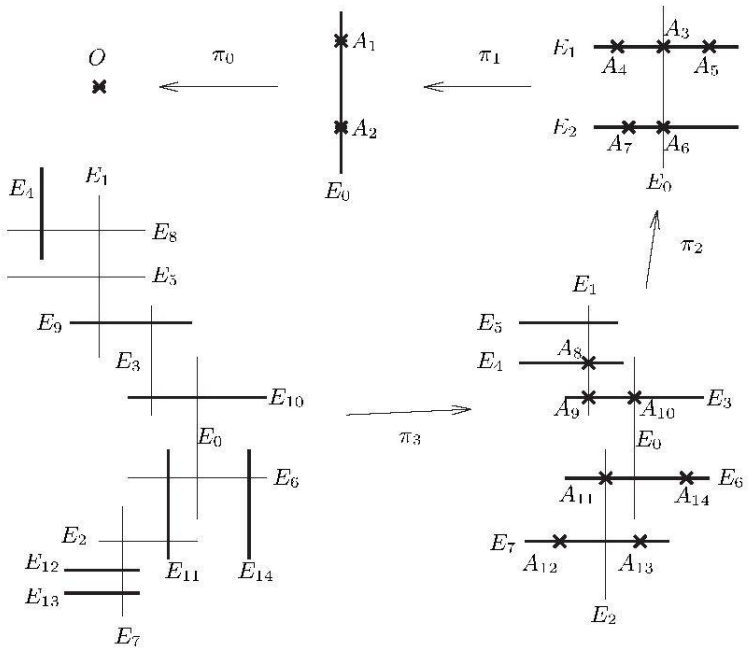

FIGURE 1
Une constellation et sa suite d'éclatements

voisinage de chaque point brillant apparaissant par le zoom antérieur, pour voir si ce point correspond plutôt à un astre ou à un amas d'astres.

EXEMPLE 2.6. La figure 1 représente un exemple schématique de suite d'éclatements associée à une constellation $\mathcal{C}$ de 15 astres infiniment voisins de O, y compris O. Les flèches indiquent des morphismes d'éclatements successifs, π_i étant l'éclatement simultané des astres de hauteur i. Les astres éclatés sont indiqués par des astérisques. Les composantes du diviseur exceptionnel apparues à chaque étape sont indiquées en traits gras. On numérote les astres différents de O par $A_1, \ldots, A_{14}$. La composante créée par l'éclatement de A_i est notée E_i, la même notation servant pour toutes ses transformées strictes. L'application $p_D \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
O & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
O & O & O & A_1 & A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & A_4 & A_3 & A_3 & A_6 & A_7 & A_7 & A_6 .
\end{array}$$

Les astres libres sont A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_{12}, A_{13}, A_{14} et les satellites sont A_3, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}. Pour ces derniers, l'application p_I est donnée par:

$$\begin{array}{cccccc} A_3 & A_6 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ O & O & A_1 & A_1 & O & A_2 \,. \end{array}$$

3. Le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation

Dans cette section je rappelle les deux principaux codages de la combinatoire d'une constellation: son *diagramme d'Enriques* et son *graphe dual*.

Voici d'abord la définition du diagramme d'Enriques:

Définition 3.1. Soit $\mathcal{C}$ une constellation finie. Son *diagramme d'Enriques* $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ est le graphe décoré enraciné défini de la manière suivante:

• Ses sommets sont en bijection avec les astres de $\mathcal{C}$; sa racine correspond à O.

• Deux sommets sont reliés par une arête lorsqu'ils représentent des astres dont l'un est directement voisin de l'autre.

• Une arête est *courbe* si l'astre supérieur est libre; sinon elle est *droite*; deux arêtes droites successives vont tout droit lorsque leurs deux astres supérieurs ont même prédécesseur indirect; sinon, elles forment une ligne brisée; une arête droite sortant d'une arête courbe a la même tangente que celle-ci au sommet commun; tous les autres couples d'arêtes successives forment une ligne brisée.

Les règles précédentes ont été posées dans [10] afin de permettre de dessiner le diagramme dans le plan. Mais il faut bien voir qu'elles décrivent en fait uniquement une structure supplémentaire sur un graphe abstrait, sans privilégier un plongement plan par rapport à un autre.

La distance géodésique d'un sommet de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ à O est égale à la hauteur de l'astre correspondant. Orientons chaque arête de son sommet le plus bas (dit *sommet initial*) vers son sommet le plus haut (dit *sommet terminal*). On dit que l'arête *aboutit* au sommet terminal. Il est immédiat de voir que l'on a les règles suivantes pour lire sur le diagramme d'Enriques $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ les fonctions p_D et p_I:

PROPOSITION 3.2. *Un sommet A de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ correspond à un astre satellite si et seulement si l'arête y aboutissant est droite. Dans ce cas, $p_D(A) = B$, où B est le sommet initial de cette arête et $p_I(A) = C$, où :*

1. *C est le sommet initial de l'arête aboutissant à B, si cette arête et BA forment une ligne brisée ;*
2. *sinon, C est le sommet le plus bas sur la géodésique joignant B à O, tel que la géodésique CB ne soit pas brisée.*

EXEMPLE 3.3. La figure 2 représente le diagramme d'Enriques de la constellation de la figure 1. Grâce à la Proposition 3.2, on vérifie les valeurs de p_I données dans l'Exemple 2.6.

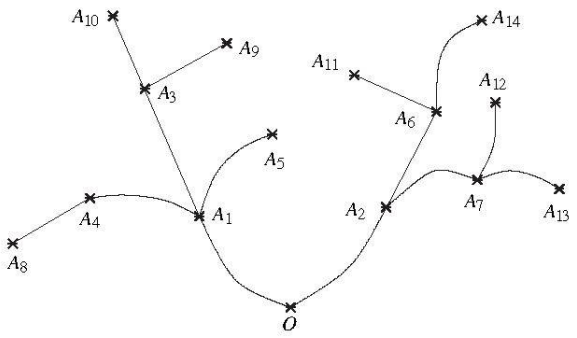

FIGURE 2
Le diagramme d'Enriques de la constellation de la figure 1

Un deuxième type de graphe décoré est utilisé pour représenter la combinatoire d'une constellation. Sa définition utilise le morphisme (2.1) :

DÉFINITION 3.4. Soit $\mathcal{C}$ une constellation finie. Son *graphe dual* $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est le graphe dual du diviseur réduit $E_{\mathcal{C}}$ de la surface lisse $S_{\mathcal{C}}$, chaque sommet étant pondéré par l'auto-intersection de la composante irréductible qui lui correspond.

Rappelons que ces auto-intersections peuvent se calculer récursivement lors du processus d'éclatements, en utilisant le fait que lorsqu'on éclate un point

sur une courbe compacte lisse Γ, et que l'on désigne par Γ_1 sa transformée stricte, on a :

$$\Gamma_1^2 = \Gamma^2 - 1 .$$

EXEMPLE 3.5. La figure 3 représente le graphe dual associé à la constellation de la figure 1. Les sommets sont numérotés par les composantes irréductibles de E_C qu'ils représentent, et ils sont pondérés par les auto-intersections respectives.

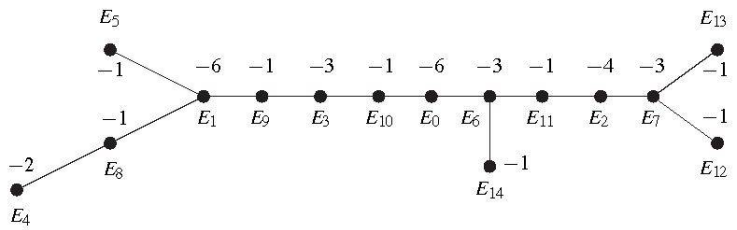

FIGURE 3
Le graphe dual de la constellation de la figure 1

REMARQUE 3.6. Le graphe dual d'un diviseur réduit sur une surface lisse est considéré en passant par Du Val [9]. Mais il ne semble avoir commencé à être utilisé systématiquement qu'à la suite de l'article [20] de Mumford et de la présentation [16] qui en a été faite par Hirzebruch.

Les sommets des graphes $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ sont en bijection naturelle : on associe au sommet de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ représentant l'astre A, le sommet de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ représentant la courbe exceptionnelle obtenue en éclatant A. Cette bijection ne respecte pas les structures des deux graphes. En fait, ceux-ci ne sont en général même pas abstraitement isomorphes, comme on peut le voir en comparant les figures 2 et 3. Néanmoins, ils codent tous les deux la même information : il est possible de donner des *algorithmes* permettant de passer de l'un à l'autre (voir [7] ou [3]).

L'un des buts de cet article est de faciliter la compréhension *géométrique* de la relation entre les deux graphes.

L'idée de base est de représenter chaque astre d'une constellation par *deux* points distincts : un premier le représentant en tant que point fermé sur l'un des modèles, et un deuxième représentant le diviseur exceptionnel créé

par l'éclatement de ce point fermé. De plus, *chaque fois que le point fermé sera vu comme intersection de deux courbes lisses transverses, on aura un triangle affine canoniquement associé à ce diviseur à croisements normaux et un plongement canonique des deux points dans le triangle.*

Expliquons cela de manière plus détaillée. Soit $(E \cup E', A) \hookrightarrow \Sigma$ un germe de diviseur à croisements normaux sur une surface lisse Σ. C'est-à-dire que E et E' sont deux germes en A de courbes lisses transverses. Notons par E_A le diviseur exceptionnel de l'éclatement de A dans Σ. On associe au diviseur à croisements normaux $(E \cup E', A)$ un triangle affine dont les sommets correspondent bijectivement aux courbes E, E', E_A et le milieu du segment $[E, E']$ au point A. À l'astre A correspondent de cette manière *deux* points privilégiés dans le triangle, A et E_A (voir la figure 4). On peut penser que A représente la courbe E_A sous forme embryonnaire, et que le segment qui les relie dans le triangle représente l'*embryogénèse*.

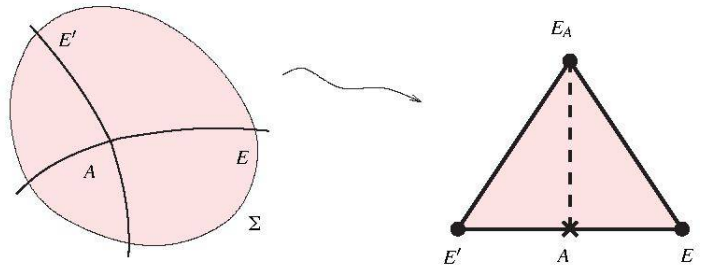

FIGURE 4
Le triangle associé à un diviseur à croisements normaux

Lorsque l'on considère le processus d'éclatements associé à une constellation, on se retrouve avec une suite de germes de diviseurs à croisements normaux : les germes des diviseurs exceptionnels des composés d'éclatements aux astres satellites de la constellation. On associe à chacun d'entre eux un triangle comme précédemment. Ces divers triangles se recollent ensuite naturellement. Plus de soin doit être accordé aux astres libres, pour lesquels on a seulement des *demi-triangles*.

4. Construction des voilures et des cerfs-volants

Dans cette section j'explique les définitions de deux types de complexes simpliciaux géométriques bidimensionnels connexes, les *voilures* et les *cerfs-volants*. Ces définitions sont récursives, par rajouts de *voiles élémentaires* décorées appelées *axes* (des segments), *demi-pétales* et *pétales* (des triangles) et d'autres segments appelés *cordes*. Les structures affines des pétales et demi-pétales joints le long d'arêtes se recollent canoniquement, ce qui sera expliqué dans la Section 5. Le lien avec les constellations sera expliqué, quant à lui, dans la Section 6.

La définition suivante introduit des termes permettant de parler en termes intuitifs des pièces du jeu de construction de cerfs-volants et de leurs règles de recollement. On dira qu'un triangle affine a des *arêtes*, ce qui permettra d'en distinguer certaines en tant que *côtés*, *base* ou *axe*.

Définition 4.1 (voir la figure 5). Un *pétale* est un triangle affine dont tous les sommets sont *pleins*, l'un d'entre eux étant *terminal* et les deux autres étant *de base*. De plus, ces derniers sont ordonnés : on parlera du premier et du deuxième sommet de base. L'arête qui les joint est *la base* et son milieu est *le point étoilé*. Les arêtes joignant le sommet terminal à l'un des sommets de base sont appelés *côtés*. Le segment joignant le sommet terminal au point étoilé est appelé l'*axe* du pétale.

Un *demi-pétale* est un triangle affine ayant un sommet *étoilé* et deux sommets *pleins*, l'un d'entre eux étant *de base* et l'autre *terminal*. Sa *base* est l'arête qui joint le sommet étoilé au sommet de base. Son *côté* est l'arête qui joint les deux sommets pleins. Son *axe* est l'arête qui joint le sommet étoilé au sommet terminal.

Un *axe* est un segment affine dont l'un des sommets est *étoilé* et l'autre est *plein*. On dira que les pétales, les demi-pétales et les axes sont les *voiles élémentaires*.

Le vocabulaire précédent est motivé, premièrement, par le fait que les pétales convenablement recollés forment des *lotus* (voir la Définition 5.2) et, deuxièmement, par le fait qu'un demi-pétale est affinement isomorphe aux moitiés des pétales obtenues en coupant ceux-ci le long des axes. Dans les dessins, nous représenterons ces axes par des traits hachurés. Ce sont eux qui matérialiseront la correspondance bijective naturelle entre points étoilés et sommets pleins dans les complexes simpliciaux que nous construirons.

Les cordes ont aussi leurs sommets décorés en types :

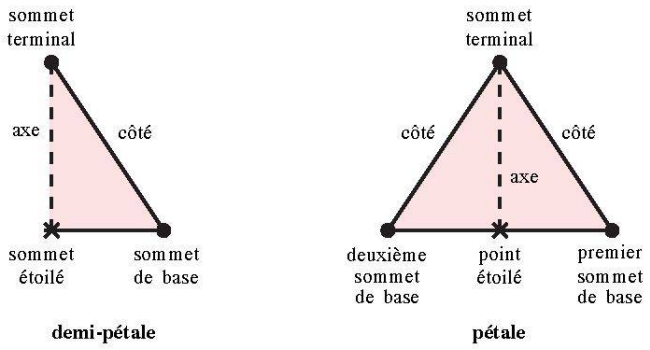

FIGURE 5
Les voiles élémentaires bidimensionnelles

DÉFINITION 4.2. Une *corde* est un segment affine dont l'un des sommets est *initial* et l'autre *final*.

En ayant à notre disposition un kit de construction formé d'axes, de demi-pétales et de pétales à volonté, nous pouvons assembler des *voilures* plus compliquées par un processus de construction dont les étapes élémentaires sont les suivantes :

1. On part d'un axe, d'un demi-pétale ou d'un pétale, qui sont les voilures ayant un seul simplexe.
2. Si $\mathcal{S}$ est une voilure déjà construite, on peut au choix :
   (a) prendre un nouveau demi-pétale et recoller son sommet de base à un sommet plein de $\mathcal{S}$ (voir la figure 6);

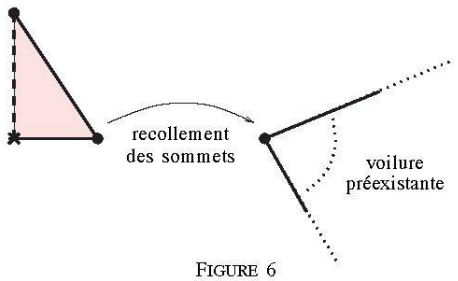

FIGURE 6
Rattachement d'un demi-pétale

(b) prendre un nouveau pétale et recoller sa base à un côté de $\mathcal{S}$ par l'unique isomorphisme affine qui envoie le deuxième sommet de base du nouveau pétale sur le sommet terminal de la voile élémentaire à laquelle appartient le côté latéral. Un côté de l'ancienne voilure est ainsi remplacé par deux nouveaux côtés (voir la figure 7).

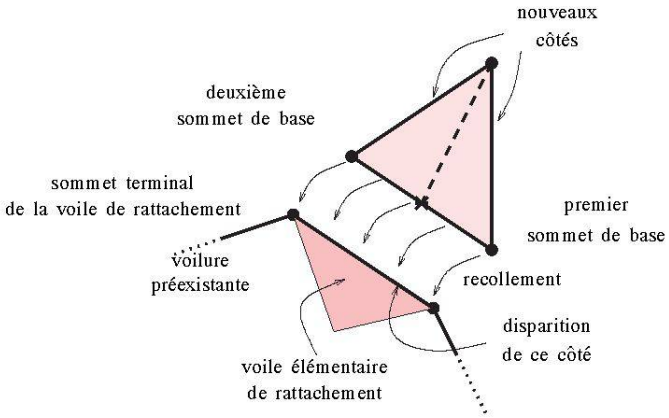

FIGURE 7
Rattachement d'un pétale

Remarquons qu'on utilise au plus un seul axe pour construire une voilure, et ce, uniquement au début du processus. Précisons que :

• On appelle *bord* d'une voilure l'union des arêtes adjacentes à un unique triangle (pétale ou demi-pétale).

• On appelle *côtés* des voilures les arêtes de leurs bords qui sont un côté de l'un des pétales ou demi-pétales constituants. Les autres arêtes du bord sont des axes de pétales ou de demi-pétales.

DÉFINITION 4.3. Les complexes simpliciaux construits par le processus précédent, et dont les arêtes gardent les décorations des voiles élémentaires utilisées, s'appellent des *voilures*. Si l'on enlève les sommets d'une voilure $\mathcal{S}$, celle-ci se décompose en composantes connexes. Les *membranes* de $\mathcal{S}$ sont les adhérences de chacune de ces composantes connexes dans la voilure.

L'une des membranes est l'axe de la voilure, si la construction démarre par celui-ci. Chacune des autres membranes est un complexe simplicial purement bidimensionnel homéomorphe à un disque, ayant un unique demi-pétale, le reste des triangles étant des pétales.

EXEMPLE 4.4. La figure 13 représente une voilure. Cette voilure a 8 membranes en dehors de l'axe, 5 d'entre elles étant réduites à un demi-pétale, les 3 restantes ayant 1, 2 et respectivement 3 pétales dans leur constitution.

Chaque membrane bidimensionnelle *s'oriente canoniquement* de la manière suivante :

• on oriente le demi-pétale initial en choisissant l'ordre suivant des sommets : sommet de base, sommet terminal, sommet étoilé ;

• on propage cette orientation par continuité à toute la membrane.

Ceci permet de parler de *côté droit* et de *côté gauche* de chaque pétale d'une membrane : le côté droit est celui que l'on rencontre en tournant positivement lorsque l'on sort de la base. Lorsque l'on recolle un pétale à un autre, on peut donc dire si le recollement se fait *sur le côté droit* ou *sur le côté gauche*. Considérons une suite de pétales $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ recollés les uns aux autres dans cet ordre. Si les recollements sont toujours effectués du même côté, on dira que ces pétales *tournent dans le même sens*. Cette notion peut s'étendre au cas où l'on part d'un demi-pétale et que le recollement se fait continuellement sur le côté droit. Ces observations seront utilisées dans la Section 8 (voir en particulier l'Exemple 8.7 et la Proposition 8.8).

À chaque voilure $\mathcal{S}$ on associe canoniquement un *cerf-volant* $\mathcal{KS}$. Pour cela, lors de la construction de $\mathcal{S}$ *on attache une corde en même temps qu'on recolle une voile élémentaire*. Ceci se fait de la manière suivante :

(a) si l'on recolle un *demi-pétale*, on attache aussi une corde en identifiant son sommet final au sommet étoilé du demi-pétale et son sommet initial au sommet étoilé ou au point étoilé qui correspond au sommet plein auquel a été attaché le demi-pétale. On dira qu'il s'agit d'une *corde libre* du cerf-volant (voir la figure 8).

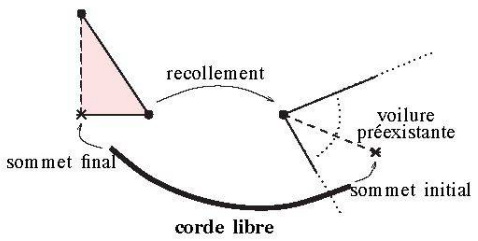

FIGURE 8
Rattachement d'une corde libre

(b) si l'on recolle un *pétale*, notons par τ la voile élémentaire de $\mathcal{S}$ à laquelle on la rattache, par B son sommet terminal, par C le sommet de base tel que le segment BC soit celui le long duquel le nouveau pétale est attaché et par M le point étoilé de τ. On recolle alors une corde le long de l'axe, par un isomorphisme affine qui envoie le sommet initial de la corde sur M. On dira qu'il s'agit d'une *corde satellite* du cerf-volant (voir la figure 9).

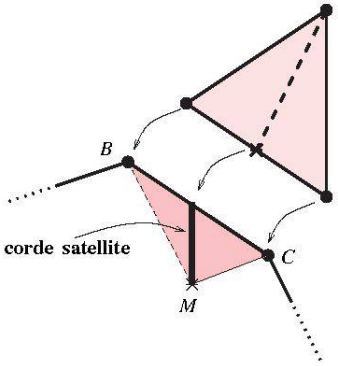

FIGURE 9
Rattachement d'une corde satellite

DÉFINITION 4.5. Soit $\mathcal{S}$ une voilure. L'union des cordes libres et satellites rattachées par le processus précédent est appelée le *cordage*. Le couple formé par le complexe simplicial obtenu en recollant son cordage à une voilure $\mathcal{S}$ et par ce cordage est appelé le *cerf-volant* de $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{KS}$.

REMARQUE 4.6. Les notations ont été choisies car "$\mathcal{S}$" est l'initiale de "*sails*" (signifiant "voilure" en anglais) et "$\mathcal{K}$" est celle de "*kite*" (signifiant "cerf-volant").

EXEMPLE 4.7. Dans la figure 14 est représenté le cerf-volant associé à la voilure de la figure 13. Comme la figure est plane, on est parfois obligés, pour des raisons topologiques, de représenter certaines cordes libres – que l'on figurera toujours par des lignes courbes – intersectant la voilure ailleurs qu'en leurs extrémités. C'est ici le cas de la corde joignant A_6 et A_{14}. Quant aux cordes A_1A_5 et A_7A_{12}, on aurait pu les dessiner sans de telles intersections, mais on a préféré montrer que ces intersections supplémentaires ne nuisent pas tellement à la lisibilité de la figure, une fois l'œil entraîné.

REMARQUE 4.8. Les cordes forment un arbre enraciné qui est abstraitement isomorphe au graphe d'adjacence des voiles élémentaires composant la voilure. On aurait donc pu s'en tenir là, en ne définissant que les voilures, mais pas les cerfs-volants. Nous avons choisi de réaliser de cette manière le graphe d'adjacence par le cordage du cerf-volant, afin de pouvoir énoncer le point (1) du Théorème 6.2.

5. MODÈLES AFFINES CANONIQUES DES MEMBRANES

Dans cette section, j'explique comment associer canoniquement à chaque base d'un réseau bidimensionnel, un complexe simplicial de dimension deux plongé dans le cône convexe qu'elle engendre – son *lotus universel*. Puis, j'explique comment plonger canoniquement chaque membrane bidimensionnelle d'une voilure dans le lotus universel. Ce plongement définit un *recollement canonique* des structures affines des voiles élémentaires constituant chaque membrane.

Considérons un *réseau bidimensionnel* N (c'est-à-dire un groupe abélien libre de rang 2) et une base (e_1, e_2) de ce réseau. Notons par $\sigma(e_1, e_2)$ le cône convexe engendré par la base dans l'espace vectoriel réel $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ associé et par $N_+(e_1, e_2) := N \cap \sigma(e_1, e_2)$. Notons par $\tau(e_1, e_2)$ le triangle qui est contenu dans le plan réel $N_{\mathbf{R}}$ et qui joint les points $e_1, e_2, e_1 + e_2$.

Cette construction peut être ensuite répétée à partir de chacune des bases $(e_1, e_1 + e_2)$ et $(e_2, e_1 + e_2)$ de N. Ainsi, de proche en proche, on construit un complexe simplicial infini plongé dans le cône $\sigma(e_1, e_2)$: à la n-ème étape de construction, on rajoute 2^n triangles à ceux déjà construits. Chaque triangle a ainsi un unique prédécesseur.

REMARQUE 5.1. On obtient ainsi tous les triangles $\tau(f_1, f_2)$, où (f_1, f_2) varie parmi les bases du réseau N formées d'éléments de $N_+(e_1, e_2)$. Ceci provient du fait que si (f_1, f_2) est une telle base, alors à l'exception du cas où $\{f_1, f_2\} = \{e_1, e_2\}$, l'un des deux vecteurs $f_1 - f_2$, $f_2 - f_1$ est à nouveau dans $N_+(e_1, e_2)$, ce qui permet de construire une preuve par récurrence. Pour le voir, supposons que ce ne soit pas le cas. Sans réduire la généralité, on peut alors supposer que $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$, où $f_i = (x_i, y_i)$. On en déduit que $x_2\, y_1 \geq (x_1 + 1)(y_2 + 1)$. Mais le fait que (f_1, f_2) est une base de N se traduit par l'équation $|x_2 y_1 - x_1 y_2| = 1$, ce qui implique que $x_1 = y_2 = 0$. On déduit que $\{f_1, f_2\} = \{e_1, e_2\}$, comme annoncé.

La figure 10 représente l'union de tous les triangles de ce complexe simplicial, qui sont contenus dans le parallélogramme engendré par $10e_1, 10e_2$. Bernard Teissier m'a dit que cette figure lui suggérait un lotus. Cela me mena à introduire le vocabulaire suivant:

DÉFINITION 5.2. Un *pétale* (relatif à la base (e_1, e_2)) est l'un des triangles $\tau(f_1, f_2)$, où (f_1, f_2) est une base du réseau N formée d'éléments de $N_+(e_1, e_2)$. Le complexe simplicial obtenu en prenant l'union de tous les pétales relatifs à (e_1, e_2), est appelé *le lotus universel* $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ (relatif à (e_1, e_2), ou associé au cône $\sigma(e_1, e_2)$). Un *lotus* (relatif à (e_1, e_2)) est l'union d'un ensemble de pétales qui contient $\tau(e_1, e_2)$ et qui, avec chaque pétale, contient aussi son prédécesseur.

Bien sûr, à transformations affines préservant les réseaux près, il n'y a qu'un seul lotus universel.

REMARQUE 5.3 (Adressée aux personnes connaissant les bases de la géométrie torique). Considèrons la surface torique affine complexe de réseau des poids N et d'éventail formé par le cône $\sigma(e_1, e_2)$ et ses faces. Elle est isomorphe au plan $\mathbf{C}^2$, muni de sa structure torique canonique. Considérons la suite des éclatements des orbites de dimension 0. C'est une suite de morphismes toriques, obtenue en subdivisant successivement les cônes de dimension 2 de l'éventail de l'étape précédente. Si on dessine à chaque fois le triangle ayant comme sommets les deux vecteurs primitifs des arêtes d'un cône de dimension 2 et celui de l'arête le subdivisant, on obtient exactement les pétales du lotus. Le lotus permet donc de visualiser d'un seul coup d'œil la suite infinie des morphismes d'éclatement des orbites de dimension 0.

Considérons à présent une membrane d'une voilure, différente de l'axe. Elle peut se plonger canoniquement dans le lotus universel $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ par une application qui identifie chaque pétale de la membrane à un pétale du lotus universel:

• on plonge le demi-pétale initial dans $\sigma(e_1, e_2)$, par l'unique application affine qui envoie le sommet étoilé en $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, le sommet de base en e_1 et le sommet terminal en $e_1 + e_2$.

• on plonge le pétale recollé le long du côté du demi-pétale, en envoyant son premier sommet de base sur e_1, son deuxième sommet de base sur $e_1 + e_2$ et son sommet terminal sur $2e_1 + e_2$.

• chaque nouveau pétale se plonge en respectant les incidences.

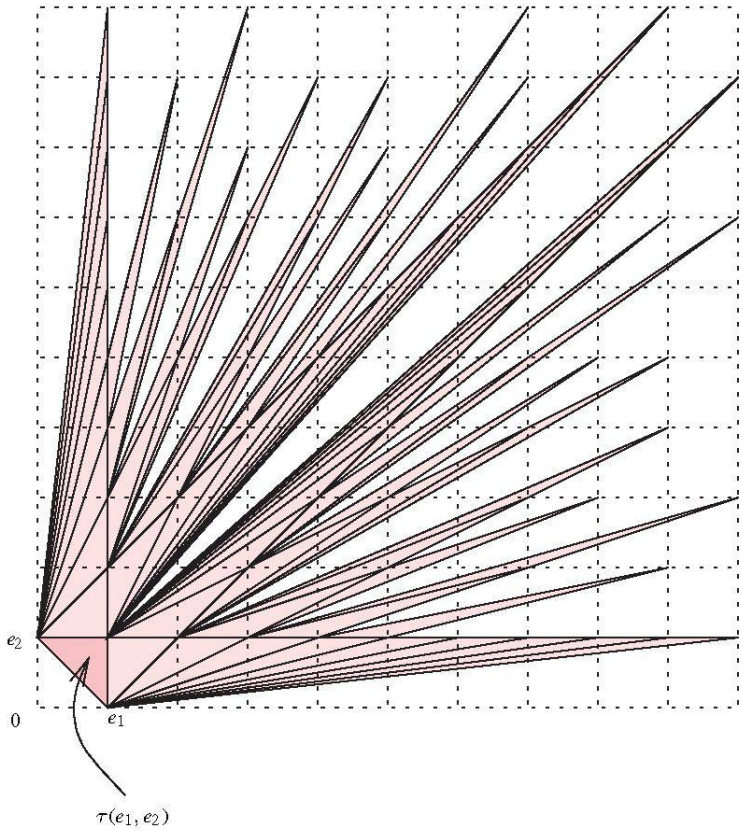

FIGURE 10
Évocation du lotus universel $\mathcal{L}(e_1, e_2)$

Grâce à ce plongement, on obtient *une structure affine entière canonique* sur chaque membrane, recollant les structures affines des voiles élémentaires la composant. Le fait que la structure soit *entière* signifie ici simplement que l'on sait dire quels sont les points entiers : ce sont exactement les sommets des pétales. Mais le sommet étoilé du demi-pétale initial n'est que demi-entier !

EXEMPLE 5.4. La figure 11 représente une membrane et son plongement affine canonique dans le lotus universel. L'unique demi-pétale est mis en évidence à l'aide d'un motif spécial.

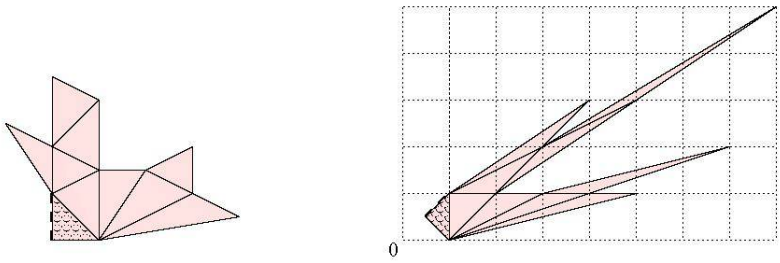

FIGURE 11
Une membrane et son plongement affine canonique dans le lotus universel

Grâce à l'existence de ce plongement canonique, cela a un sens de dire qu'une ligne polygonale contenue dans une membrane *va tout droit* (c'est-à-dire que c'est une géodésique pour la structure affine du recollement) ou non. Ceci permet d'exprimer en termes affines le fait qu'une suite de pétales tourne dans le même sens :

PROPOSITION 5.5. *À l'intérieur de l'une des membranes d'une voilure, on considère une suite de voiles élémentaires* $\tau_1, \ldots, \tau_n$, *telle que deux successives soient adjacentes et construites dans cet ordre. Alors ces voiles tournent toujours dans le même sens si et seulement si la suite des cordes satellites associées est une géodésique pour la structure affine canonique de la membrane.*

EXEMPLE 5.6. Cette proposition est illustrée dans la figure 12 pour la membrane de la figure 11. Elle permet de repérer sur la membrane représentée

combinatoirement (à gauche) les cordes satellites alignées dans le plongement canonique dans le lotus universel (à droite). Il est important de savoir faire cette reconnaissance sur une voilure déformée, car lorsque le nombre de voiles croît, très rapidement le plongement affine canonique devient impossible à dessiner à cause de l'allongement des triangles.

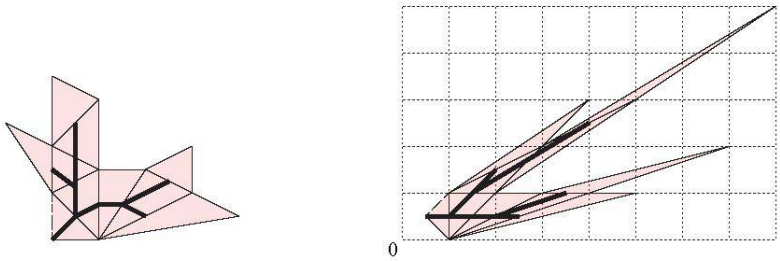

FIGURE 12
Cordes satellites d'une membrane

REMARQUE 5.7. Considérons à l'intérieur de chaque pétale du lotus universel $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ les deux segments joignant le milieu de sa base aux milieux des côtés. Leur union est un arbre binaire plongé dans $\sigma(e_1, e_2)$. Décorons chaque sommet étoilé $\frac{1}{2}(a_1e_1 + a_2e_2)$ par la fraction $\frac{a_1}{a_2}$. On obtient ainsi un arbre isomorphe à *l'arbre de Stern-Brocot* décrit dans [13, p. 116]. Ce dernier arbre représente géométriquement la construction des suites de Farey par itération de l'opération $(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}) \to \frac{m+m'}{n+n'}$, en partant de la suite $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$, et en considérant à chaque étape les couples successifs de la suite construite à l'étape précédente. Il est construit en reliant chaque nouvelle fraction à celle ayant été créée en dernier parmi les deux lui ayant donné naissance.

6. LE DIAGRAMME D'ENRIQUES ET LE GRAPHE DUAL D'UNE CONSTELLATION COMME SOUS-ARBRES DU CERF-VOLANT

Dans cette section, j'explique comment associer une voilure, donc aussi un cerf-volant, à chaque constellation finie centrée en O. Puis, je montre comment lire le graphe dual de la constellation à partir de la voilure et le diagramme

d'Enriques à partir du cerf-volant (Théorème 6.2). En fait, le graphe dual est canoniquement isomorphe à une partie du bord de la voilure et le diagramme d'Enriques est isomorphe au cordage du cerf-volant. Je termine en expliquant comment modifier tout cela lorsque l'on se donne en plus un germe en O de diviseur à croisements normaux réduit.

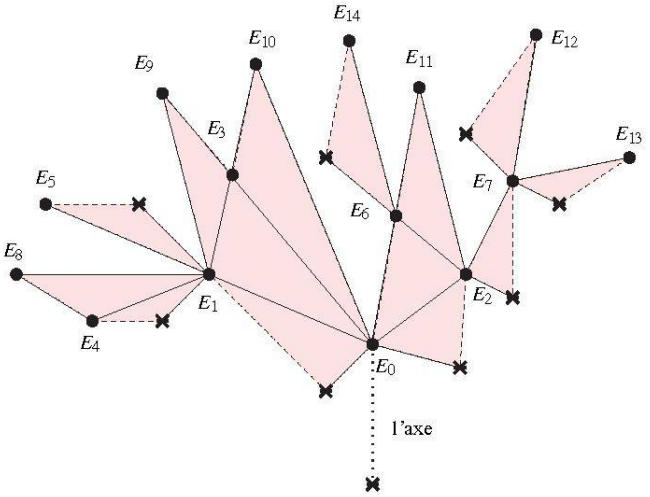

FIGURE 13
La voilure de la constellation de la figure 1

Notons par $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$ une constellation finie et par $\mathcal{C}' \supset \mathcal{C}$ une constellation qui contient un astre de plus $A \in \mathcal{C}_O$. Expliquons comment construire la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C}')$ de $\mathcal{C}'$ à partir de celle $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. Cela se fera en rajoutant un pétale $v(A)$, qui contient des points marqués $I(A)$ et $T(A)$ représentant respectivement le point A et le diviseur E_A obtenu en l'éclatant.

Le procédé de construction est exactement le même que celui décrit dans la Section 4 pour les voilures abstraites. Nous utiliserons la même numérotation:

1. Si $\mathcal{C} = O$, alors $\mathcal{S}(\{O\})$ est réduit à l'axe. On note par $I(O)$ le sommet initial de l'axe et par $T(O)$ le sommet terminal.
2. Si $\mathcal{C} \neq \varnothing$, alors nous avons deux cas:
   (a) *Si A est un astre libre* et que $B = p_D(A)$, on colle un demi-pétale $v(A)$ à $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ en identifiant son sommet de base au sommet terminal $T(B)$ de $v(B)$. On note par $I(A)$ le sommet étoilé du demi-pétale et par $T(A)$ son sommet terminal, vus comme points de la voilure obtenue après recollement.

(b) *Si A est un astre satellite* et que $B = p_D(A), C = p_I(A)$, on colle un pétale $v(A)$ à $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ en recollant sa base au côté latéral $T(B)T(C)$ de $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ par l'unique isomorphisme affine qui envoie le deuxième sommet de base du pétale $v(A)$ sur $T(B)$. On note par $I(A)$ le point étoilé de $v(A)$ et par $T(A)$ son sommet terminal, vus comme points de la voilure obtenue après recollement.

Comme à chaque voilure est associé canoniquement un cerf-volant (Définition 4.5), on obtient *le cerf-volant $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$ de la constellation $\mathcal{C}$*.

EXEMPLE 6.1. La figure 13 représente la voilure de la constellation dont la suite associée d'éclatements a été schématisée dans la figure 1. La figure 14 représente le cerf-volant associé.

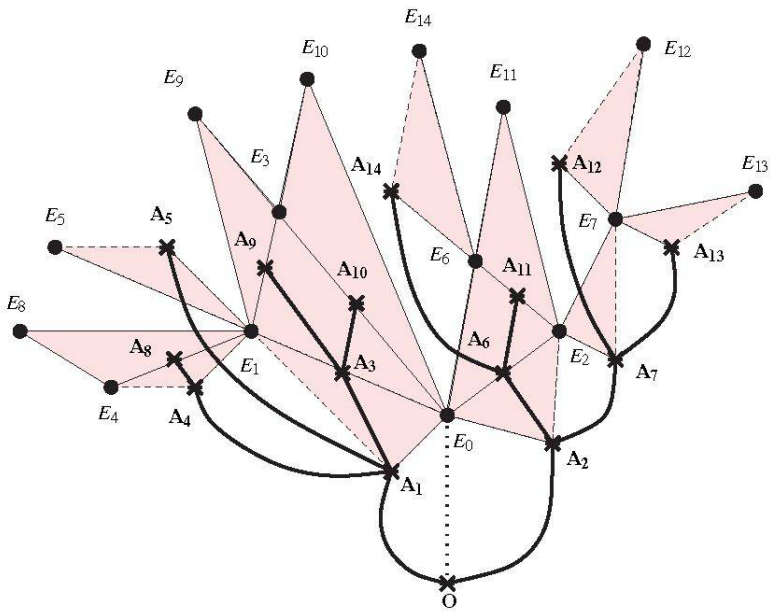

FIGURE 14
Le cerf-volant de la constellation de la figure 1

Le théorème suivant explique comment retrouver le diagramme d'Enriques et le graphe dual d'une constellation à partir du cerf-volant associé. On peut le prouver aisément par récurrence, en regardant ce qui se passe à chaque étape d'éclatement.

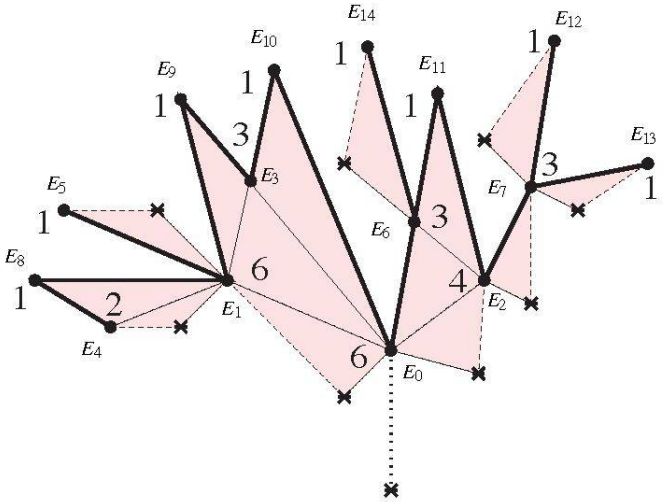

FIGURE 15
Plongement du graphe dual dans la voilure de la constellation de la figure 1

THÉORÈME 6.2. *Soit $\mathcal{C}$ une constellation finie centrée en O.*

1. *Le diagramme d'Enriques $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ est isomorphe au cordage du cerf-volant $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$ de la constellation, par un isomorphisme qui envoie chaque astre A de $\mathcal{C}$ sur $I(A)$. Les côtés courbes de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ correspondent aux cordes libres de $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$. Les segments droits maximaux de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ correspondent aux géodésiques maximales du cordage dans la réalisation affine canonique des membranes de la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C})$.*
2. *Le graphe dual $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est isomorphe au graphe obtenu comme union des côtés de la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, par un isomorphisme qui envoie chaque astre A de $\mathcal{C}$ dans $T(A)$. L'auto-intersection d'une composante du diviseur exceptionnel correspondant à un sommet plein v de $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$ est égale à l'opposé du nombre de voiles élémentaires arrivant en v, l'axe y compris.*

Remarquons aussi que deux sommets pleins de $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$ sont reliés par une arête si et seulement si, lors du processus d'éclatement des astres de $\mathcal{C}$, on trouve une surface sur laquelle les centres des deux valuations divisorielles associées se rencontrent.

EXEMPLE 6.3. Pour l'exemple récurrent de cet article, le diagramme d'Enriques est visible sur la figure 14: c'est le cordage du cerf-volant. Les

arcs courbes et droits sont visibles directement. Pour déterminer les segments qui vont tout droit, on utilise la Proposition 5.5. On voit alors que la ligne polygonale $A_1\ A_3\ A_{10}$ est droite, mais que $A_2\ A_6\ A_{11}$ ne l'est pas, ce qui est conforme à la figure 2. Quant au graphe dual, nous l'avons représenté en traits gras sur la figure 15. À côté de chaque sommet est écrit le nombre de voiles élémentaires y aboutissant, l'axe y compris. On vérifie ainsi que l'on obtient bien le graphe de la figure 3.

Avoir plongé à la fois le diagramme d'Enriques et le graphe dual dans le même espace, de manière à lire localement dans cet espace leurs structures supplémentaires (les arêtes allant tout droit et les auto-intersections), permet d'enrichir la compréhension de tout algorithme de passage de l'un à l'autre. En effet, étant donnée une partie de l'un des graphes, on peut déterminer ainsi de quelle partie de l'autre graphe dépend sa structure.

Expliquons maintenant comment associer une voilure (donc un cerf-volant) à une constellation finie $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$, lorsque l'on se donne de plus un germe en O de diviseur à croisements normaux réduit. Cette extension est nécessaire par exemple si l'on veut pouvoir décrire le cerf-volant de $\mathcal{C}$ à partir de celui d'une sous-constellation $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ et des constellations complémentaires, centrées en certains points du diviseur exceptionnel obtenu en éclatant $\mathcal{D}$.

Nous considérons deux cas, suivant que le germe (E, O) de diviseur en O est lisse ou pas. Nous notons par $\mathcal{S}(\mathcal{C}, E)$ la voilure associé au couple $(\mathcal{C}, E)$.

• *Supposons que E est lisse en O.* On fait alors la même construction que précédemment, mais en partant d'un demi-pétale $v(E)$, dont le côté joignant le sommet étoilé au sommet terminal est identifié à l'axe $\mathcal{V}(\{O\})$. On obtient donc une inclusion naturelle $\mathcal{S}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{C}, E)$.

• *Supposons que E a deux composantes E_1 et E_2 en O.* Chacune d'entre elles est donc lisse, et elles se coupent transversalement. On fait alors la même construction que précédemment, mais en partant d'un pétale $v(E)$ dont les sommets de base représentent, dans l'ordre, E_1 et E_2. On obtient donc des inclusions canoniques $\mathcal{S}(\mathcal{C}, E_i) \subset \mathcal{S}(\mathcal{C}, E)$.

REMARQUE 6.4. C'est le travail [12] en collaboration avec García Barroso et González Pérez qui m'a convaincu de la nécessité de cet élargissement des notions de voilure et de cerf-volant à des complexes simpliciaux qui ne commencent pas nécessairement par un axe, mais par un pétale (correspondant au cas où le diviseur a deux composantes) ou un demi-pétale (si ce diviseur n'a qu'une composante).

7. Interprétation valuative

Les voilures correspondant à toutes les constellations finies centrées en O peuvent être canoniquement recollées. L'on obtient alors la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C}_O)$ du firmament $\mathcal{C}_O$ tout entier. On peut lui donner une interprétation valuative, analogue à celle de l'arbre valuatif de Favre et Jonsson [11]. De plus, il y a une manière naturelle de projectifier $\mathcal{S}(\mathcal{C}_O)$ pour obtenir cet arbre valuatif. C'est ce que nous allons voir dans cette section.

Dans ce qui suit, pour abréger nous noterons $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{S,O}$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{S,O}$. Soit $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

Définition 7.1. Étendons la relation d'ordre usuelle de $\mathbf{R}$ à $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en posant $\infty > \lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Une *valuation de F dominant O* est une fonction $\nu\colon \mathcal{F} \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que:

1. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{F}$;
2. $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ pour tous $x, y \in \mathcal{F}$;
3. $\nu(\lambda) := \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in \mathbf{C}^* \\ \infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$;
4. $\nu(\mathcal{M}) \subset \mathbf{R}_+^* \cup \{\infty\}$.

Remarque 7.2. Parfois, dans la définition d'une valuation, on demande que les éléments non-nuls du corps aient une valuation *finie*. Mais cette condition n'est pas fermée par passage à la limite de la convergence simple des valuations vues comme fonctions sur le corps. De tels passages à la limite sont essentiels dans [11].

Notons par $\mathcal{V}_{S,O}$ l'ensemble des valuations de $\mathcal{F}$ dominant O et par $\mathcal{A}_{S,O}$ le sous-ensemble de $\mathcal{V}_{S,O}$ des valuations normalisées par la condition:

$$\min \nu(\mathcal{M}) = 1\,. \tag{7.1}$$

Comme l'expliquent Favre et Jonsson de manière détaillée dans [11], l'ensemble $\mathcal{V}_{S,O}$ admet une topologie naturelle d'espace fonctionnel localement compact, qui fait du sous-espace topologique $\mathcal{A}_{S,O}$ un *arbre réel* compact (d'où la notation $\mathcal{A}$ pour le désigner).

Si $A \in \mathcal{C}_O$, notons par ν_A la *valuation divisorielle* associée. Elle peut être définie des deux manières équivalentes suivantes, en partant d'un modèle $(\Sigma, E) \xrightarrow{\pi} (S, O)$ contenant A:

• si $f \in \mathcal{F}$, alors $\nu_A(f)$ est la multiplicité de la fonction $f \circ \pi$ au point A du modèle Σ;

• si $f \in \mathcal{F}$, alors $\nu_A(f)$ est l'ordre d'annulation de $f \circ \pi \circ \pi_A$ le long de E_A, où $\Sigma_A \xrightarrow{\pi_A} \Sigma$ est l'éclatement de A dans Σ et E_A est le diviseur exceptionnel ainsi créé.

Reprenons les notations de la section précédente : $\mathcal{C}$ désigne donc une constellation finie et A est un astre que l'on rajoute à $\mathcal{C}$. L'exemple des valuations divisorielles permet déjà de comprendre que le firmament $\mathcal{C}_O$ se plonge dans l'ensemble des valuations dominant O. Nous allons voir à présent *comment plonger canoniquement la voile élémentaire $v(A)$ associée à A dans l'espace valuatif $\mathcal{V}_{S,O}$*. Nous allons inverser l'ordre considéré auparavant, en traitant d'abord le cas où A est *satellite*, ensuite celui où A est *libre* et enfin celui où $A = O$.

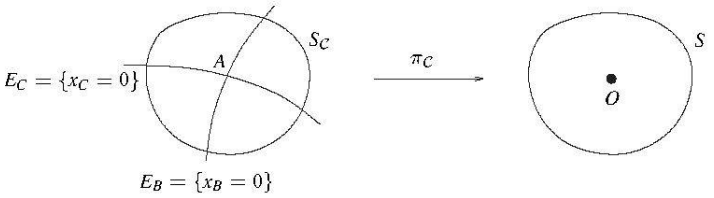

FIGURE 16
Le cas d'un astre satellite

• *Supposons que A est satellite* (voir la figure 16). Avec les notations de l'équation (2.1), notons par E_B et E_C les transformées strictes, sur la surface S_C, des diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant les points $B = p_D(A), C = p_I(A)$. Ces deux courbes s'intersectent transversalement au point A. Notons par N_A le réseau abstrait engendré par les valuations divisorielles ν_B et ν_C. Notons par (e_B, e_C) la base de N_A correspondant au couple (ν_B, ν_C).

DÉFINITION 7.3. Une valuation $\nu \in \mathcal{V}_{S,O}$ est dite *monomiale* par rapport à ν_B et ν_C s'il existe $(b, c) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus 0$ tels que pour tout $f \in F^*$:

$$\nu(f) = \min\{b \cdot m_B + c \cdot m_C \mid c_{m_B,m_C} \neq 0,\ f \circ \pi_{\mathcal{C}} = \sum_{(m_B,m_C)} c_{m_B,m_C} x_B^{m_B} x_C^{m_C}\}$$

où (x_B, x_C) est un système de coordonnées locales au voisinage de $A \in S_{\mathcal{C}}$ tel que E_B, E_C soient définis par les équations $x_B = 0$, respectivement $x_C = 0$. Nous noterons par $b\ \nu_B \oplus c\ \nu_C$ la valuation monomiale précédente.

Comme le montre un calcul rapide de changements de variables, cette définition est indépendante du choix du système de coordonnées locales. Le

nom de ce type de valuations est motivé par le fait que la valuation d'une fonction se détermine uniquement à partir des valuations $\nu_B(x_B^{m_B}x_C^{m_C})$ et $\nu_C(x_B^{m_B}x_C^{m_C})$ des monômes intervenant dans l'écriture de $f\circ\pi_{\mathcal{C}}$ dans le système de coordonnées (x_B, x_C).

De cette manière, les notations étant celles du début de la Section 5, le cône $\sigma(e_B, e_C)$ de l'espace vectoriel $(N_A)_{\mathbf{R}}$ se plonge dans $\mathcal{V}_{S,O}$, en associant à chaque vecteur $b\cdot e_B + c\cdot e_C$ la valuation monomiale $b\ \nu_B \ominus c\ \nu_C$. Notons par $\sigma(\nu_B, \nu_C)$ son image. On prend comme voile élémentaire $v(A)$ (ici un pétale) le triangle affine du plan $(N_A)_{\mathbf{R}}$ dont les sommets sont $e_B, e_C, e_B + e_C$. Par le plongement précédent, il se réalise comme triangle dans l'espace valuatif $\mathcal{V}_{S,O}$, de sommets $\nu_B, \nu_C, \nu_B \ominus \nu_C$. Le fait que les sous-triangles de l'espace topologique $\mathcal{V}_{S,O}$ correspondant aux pétales $v(A), v(B), v(C)$ se retrouvent recollés comme décrit dans la construction de la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ provient du lemme élémentaire suivant:

LEMME 7.4. *On a l'égalité suivante de valuations:* $\nu_A = \nu_B \oplus \nu_C$.

• *Supposons que A est libre.* Notons par E_B la transformée stricte sur la surface $S_{\mathcal{C}}$ du diviseur exceptionnel obtenu en éclatant $B = p_D(A)$. C'est l'unique composante de $E_{\mathcal{C}}$ qui contient le point A. Dans ce cas on choisit une *curvette* Γ passant par A, c'est-à-dire un germe en A de courbe lisse transverse à E_B. Cette curvette jouera le rôle de E_C. Notons par $\nu_\Gamma \in \mathcal{V}_{S,O}$ la valuation divisorielle associée.

On fait la même construction que précédemment, le couple (ν_B, ν_Γ) de valuations jouant le même rôle que (ν_B, ν_C). Cette fois-ci une partie des valuations monomiales $b\ \nu_B \bigcirc c\ \nu_\Gamma$ dépendent bien sûr du choix de la curvette, mais le point important est que la moitié du cône de ces valuations n'en dépend pas:

LEMME 7.5. *Lorsque la curvette Γ varie, l'intersection dans $\mathcal{V}_{S,O}$ des cônes $\sigma(\nu_B, \nu_\Gamma)$, est égale au cône $\sigma(\nu_B, \nu_A)$. Plus précisément, parmi les valuations de la forme $b\ \nu_B \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\ \ \ \

• *Supposons que* $A = O$. Considérons un système quelconque de coordonnées centré en O. Il lui correspond un triangle affine, pétale initial du lotus associé. Lorsque l'on varie le système de coordonnées, l'intersection de tous ces pétales est égale au segment affine des valuations de la forme $\lambda\nu_O$, avec $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$. On envoie bijectivement l'axe sur ce segment par l'unique application affine qui associe $\frac{1}{2}\nu_A$ au sommet initial O et ν_A au sommet terminal E_O.

On peut raisonner de même dans le cas où on se donne de plus au point O un germe de diviseur à croisements normaux. En résumant les considérations précédentes :

PROPOSITION 7.6. *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_O$ une constellation finie et E un germe de diviseur à croisements normaux au point O. Les voilures $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, $\mathcal{S}(\mathcal{C}, E)$ de la constellation $\mathcal{C}$ se plongent canoniquement dans l'espace valuatif $\mathcal{V}_{S,O}$, en préservant les structures affines des membranes.*

On peut montrer que les cerfs-volants $\mathcal{KS}(\mathcal{C})$, $\mathcal{KS}(\mathcal{C}, E)$ se plongent aussi canoniquement dans le même espace. L'idée est de considérer pour chaque astre libre A contenu sur une composante E_i une curvette passant par A et un système de coordonnées centré en l'astre A_i dont l'un des axes de coordonnées soit l'image de cette curvette. On relie les valuations représentatives de A et A_i par un segment dans le plan des valuations monomiales par rapport à ce système de coordonnées, et on montre que ce segment est indépendant des choix.

Dans la suite de la section, pour chaque astre A, nous identifierons $v(A)$ à un sous-triangle de $\mathcal{V}_{S,O}$. Il est plongé dans l'espace des valuations monomiales par rapport à (ν_B, ν_C) (si A est satellite) ou (ν_A, ν_B) (si A est libre). Traçons sur ce triangle le feuilletage $\mathcal{F}_A$ obtenu en l'intersectant avec les droites partant de l'origine dans le cône des valuations monomiales correspondant. L'espace des feuilles s'identifie canoniquement (par intersection) à l'union des côtés latéraux de $v(A)$. Mais ces côtés latéraux sont des valuations normalisées par la condition (7.1). En recollant les feuilletages des voiles élémentaires de la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, on obtient un feuilletage $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Les applications de passage au quotient par les feuilles se recollent en une application :

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}}} \mathcal{D}(\mathcal{C})$$

dans laquelle la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ est vue comme sous-espace de l'espace des valuations $\mathcal{V}_{S,O}$ et le graphe dual $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ est vu comme sous-espace de l'arbre $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ des valuations normalisées.

Si on a une inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ de constellations finies, on a des rétractions naturelles $\mathcal{S}(\mathcal{C}') \to \mathcal{S}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{D}(\mathcal{C}') \to \mathcal{D}(\mathcal{C})$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}'}} & \mathcal{D}(\mathcal{C}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{C}}} & \mathcal{D}(\mathcal{C}). \end{array}$$

On peut prendre alors les limites projectives des morphismes $\phi_{\mathcal{C}}$. Notons par :

$$\mathcal{S}(\mathcal{C}_O) := \varprojlim \mathcal{S}(\mathcal{C})$$

la voilure du firmament. Comme la limite projective des graphes duaux $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ s'identifie à l'arbre valuatif $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ (voir [11]), on obtient :

PROPOSITION 7.7. *Le quotient de la voilure $\mathcal{S}(\mathcal{C}_O)$ du firmament par le feuilletage limite projective des feuilletages $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ s'identifie naturellement à l'arbre valuatif $\mathcal{A}_{S,O}$.*

8. LE LOTUS UNIVERSEL ET LES FRACTIONS CONTINUES

Dans cette section j'indique comment interpréter géométriquement les développements en fractions continues des nombres positifs à l'aide du lotus universel. Cette interprétation est indispensable dès qu'on veut décrire le cerf-volant de la constellation associée au processus de résolution plongée minimale d'un germe de courbe plane en termes des exposants de Newton-Puiseux de ses branches et de leurs contacts mutuels (voir [12]).

Comme dans [23], j'utiliserai les notations suivantes pour les fractions continues *euclidiennes* (uniquement des signes $+$) et *de Hirzebruch-Jung* (uniquement des signes $-$) :

$$[x_1, x_2, \dots]^{\pm} := x_1 \pm \cfrac{1}{x_2 \pm \cfrac{1}{\dots}}.$$

Considérons à nouveau un réseau bidimensionnel N, muni d'une base (e_1, e_2). Notons par $D(e_1, e_2)$ la droite de $N_{\mathbf{R}}$ qui joint les points e_1, e_2. Les couples de points entiers successifs sur cette droite sont de la forme $((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2)$, où $a \in \mathbf{Z}$. Ils forment des bases de N.

Considérons à présent la droite passant par 0 et parallèle à la droite $D(e_1, e_2)$:

$$D_{\infty}(e_1, e_2) := \mathbf{R}(e_1 - e_2) \subset N_{\mathbf{R}}.$$

Notons par $P(e_1, e_2)$ le demi-plan ouvert bordé par $D_\infty(e_1, e_2)$ et contenant $D(e_1, e_2)$, puis par $\Delta_0(e_1, e_2)$ le triangle de sommets $0, e_1, e_2$. On a évidemment:

LEMME 8.1. *L'union des cônes* $\sigma((1-a)e_1+ae_2, -ae_1+(a+1)e_2)$, *lorsque* a *parcourt* $\mathbf{Z}$, *est égale à* $P(e_1, e_2) \cup 0$.

Introduisons alors:

DÉFINITION 8.2. *Le multilotus universel* $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$ associé à la base (e_1, e_2) est l'union des lotus universels associés à tous les cônes du lemme précédent, ainsi que des triangles $\Delta_0((1-a)e_1+ae_2, -ae_1+(a+1)e_2)$ (voir la figure 17):

$$\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2) := \bigcup_{a\in\mathbf{Z}} \mathcal{L}((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2) \cup \bigcup_{a\in\mathbf{Z}} \Delta_0((1-a)e_1 + ae_2, -ae_1 + (a+1)e_2).$$

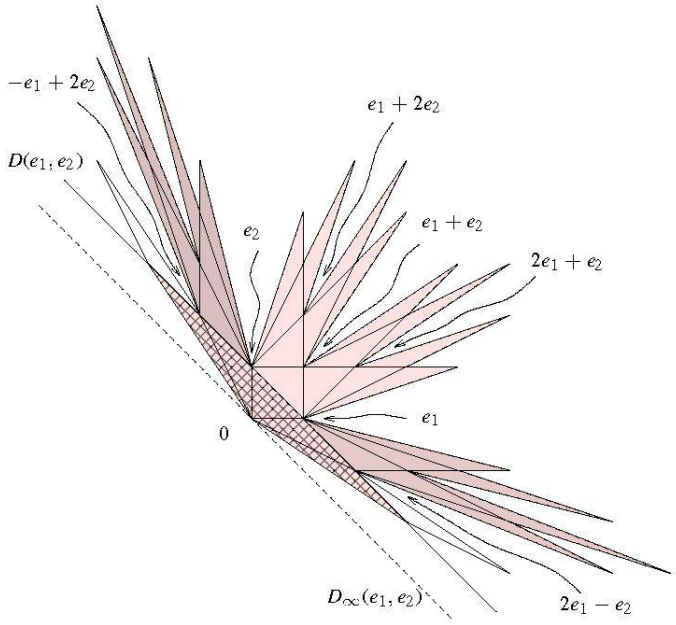

FIGURE 17
Le multilotus universel $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$

Les sommets du multilotus universel forment l'ensemble $\mathrm{Prim}(P(e_1, e_2))$ des vecteurs primitifs du demi-plan ouvert $P(e_1, e_2)$, auquel on rajoute 0.

Considérons à présent $\mathbf{H}(N_{\mathbf{R}})$, le *plan hyperbolique* dont l'horizon est la droite projective réelle $\mathbf{P}(N_{\mathbf{R}})$.

REMARQUE 8.3. Une construction canonique de $\overline{\mathbf{H}}(N_{\mathbf{R}}) := \mathbf{H}(N_{\mathbf{R}}) \cup \mathbf{P}(N_{\mathbf{R}})$ peut être faite de la manière suivante. À chaque *structure presque complexe* J sur $N_{\mathbf{R}}$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $N_{\mathbf{R}}$ vérifiant $J^2 = -I$) on associe la décomposition $N_{\mathbf{C}} = N_J^i \oplus N_J^{-i}$ en somme directe des espaces propres du complexifié $J_{\mathbf{C}} \colon N_{\mathbf{C}} \to N_{\mathbf{C}}$ de J. Les droites complexes N_J^i et N_J^{-i} sont conjuguées par rapport à la conjugaison canonique $u + iv \to u - iv$ de $N_{\mathbf{C}} = N_{\mathbf{R}} + iN_{\mathbf{R}}$. L'application $J \to N_J^i$ identifie bijectivement l'ensemble des structures presque complexes sur $N_{\mathbf{R}}$ avec l'ensemble des droites complexes imaginaires de N_C. Ce dernier ensemble s'identifie à $\mathbf{P}(N_C) \setminus \mathbf{P}(N_{\mathbf{R}})$, c'est-à-dire au complémentaire d'un cercle dans la sphère de Riemann $\mathbf{P}(N_C)$. Chacun des deux hémisphères ainsi délimités représente les structures presque complexes définissant l'une des deux orientations de $N_{\mathbf{R}}$. On considère alors sur chacun des hémisphères l'unique métrique hyperbolique définissant la même structure conforme. La conjugaison restreinte à $\mathbf{P}(N_C) \setminus \mathbf{P}(N_R)$ est une isométrie renversant l'orientation héritée de celle de $\mathbf{P}(N_C)$. On peut donc définir $\mathbf{H}(N_{\mathbf{R}})$ au choix, soit comme *l'espace des J préservant une orientation fixée de $N_{\mathbf{R}}$*, soit comme *l'espace des couples non-ordonnés* $\{J, -J\}$.

Pour chaque $v \in N_{\mathbf{R}} \setminus 0$, nous noterons par $[v] \in \mathbf{P}(N_{\mathbf{R}})$ le point correspondant à la droite $\mathbf{R}v$. Pour chaque base (u, v) de N, soit $L([u], [v])$ l'unique droite hyperbolique de $\mathbf{H}(N_{\mathbf{R}})$ qui joint $[u]$ et $[v]$. Lorsque (u, v) varie parmi toutes les bases de N, on obtient des droites qui forment les arêtes d'une triangulation de $\overline{\mathbf{H}}(N_{\mathbf{R}})$, appelée *la triangulation modulaire* $\mathcal{M}(N)$. Le multilotus universel est un plongement combinatoire de la triangulation modulaire dans $N_{\mathbf{R}}$, associée canoniquement à la base (e_1, e_2) :

PROPOSITION 8.4. *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & \mathrm{Prim}(P(e_1, e_2)) \cup 0 & \to & \mathbf{P}(N) \\ & v \neq 0 & \mapsto & [v] \\ & 0 & \mapsto & [e_1 - e_2] \end{array}$$

est une bijection qui envoie le multilotus universel $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$ en la triangulation modulaire $\mathcal{M}(N)$.

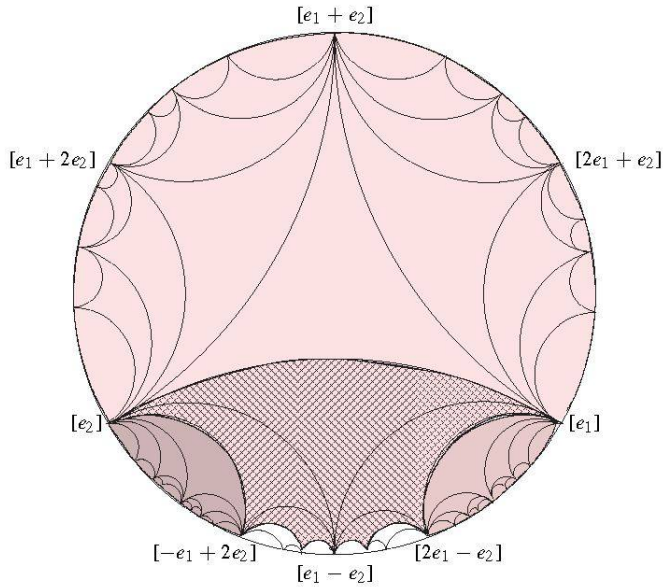

FIGURE 18
La triangulation modulaire $\mathcal{M}(N)$

Dans la figure 18 est représentée la triangulation modulaire. Dans les figures 17 et 18 sont représentées avec les mêmes couleurs certains sous-complexes de $\overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2)$ et leurs images par l'application Φ. En particulier, on voit que le lotus universel $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ correspond à la partie de la triangulation modulaire située dans le demi-plan hyperbolique bordé par la droite $L([e_1], [e_2])$ et contenant $[e_1 + e_2]$ dans son adhérence.

REMARQUE 8.5. Dans certains travaux (voir entre autres [24], [25], [14], [17]), les fractions continues sont interprétées géométriquement à l'aide de la triangulation modulaire $\mathcal{M}(N)$. Par la proposition précédente, ces interprétations peuvent se faire de manière équivalente sur le multilotus universel. Dans la suite de cette section, j'explique une interprétation différente, faite uniquement à l'aide du lotus universel, et ayant l'avantage de se généraliser en dimensions plus grandes (voir la Section 9). C'est une réinterprétation de celle de Klein (voir [18] et [23]), mais la généralisation qu'elle suggère en dimension plus grande est différente de celle proposée par Klein et reprise entre autres par Arnold [1].

DÉFINITION 8.6. Considérons une demi-droite $l \subset N_{\mathbf{R}}$ d'origine 0 et contenue dans l'intérieur du cône $\sigma(e_1, e_2)$. Notons par $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ sa pente par rapport à la base (e_1, e_2) (égale au quotient x_2/x_1, si $x_1e_1 + x_2e_2$ est un vecteur directeur de l). Le *lotus de l (ou de λ)*, noté $\Lambda(l) = \Lambda(\lambda)$, est l'union des pétales du lotus universel $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ dont l'intérieur intersecte l.

On peut imaginer le lotus $\Lambda(l)$ construit en rajoutant successivement des pétales $\tau_1, \tau_2, \ldots$ à $\tau_0 := \tau(e_1, e_2)$, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de 0 le long de l : chaque fois que l'on entre dans un nouveau pétale, on le rajoute à la suite déjà construite. Considérons deux cas, suivant que l est ou non de pente rationnelle.

• *Si l est de pente rationnelle*, c'est-à-dire que l contient des éléments non-nuls du réseau N, notons par $S(l)$ l'unique élément primitif de N contenu dans l. Le segment $[0, S(l)]$ ne contient pas d'autres points de N à part ses extrémités, ce qui permet de montrer que :

$$[0, S(l)] = \Lambda(l) \cap l.$$

Dans ce cas, $\Lambda(l)$ contient un nombre fini de pétales $\tau_0, \ldots, \tau_n$ et $S(l)$ est un sommet de τ_n. Pour $i = 1, 2$, notons par $P_i(l)$ la ligne polygonale joignant e_i à $S(l)$ et contenue dans le bord de $\Lambda(l)$.

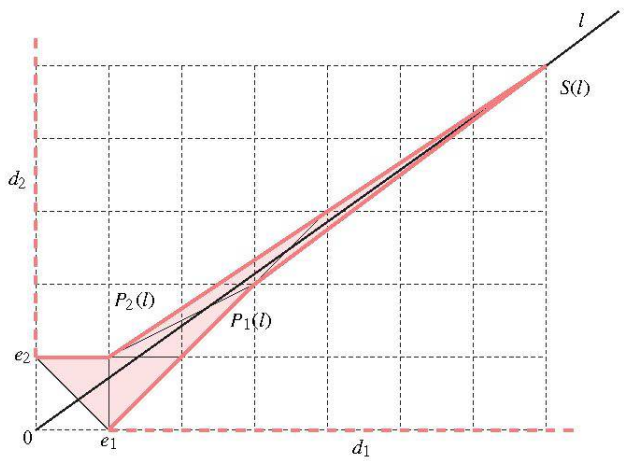

FIGURE 19
La lotus de la demi-droite rationnelle $\mathbf{R}_+(7e_1 + 5e_2)$

• *Si l est de pente irrationnelle*, la suite $\tau_0, \tau_1, \ldots$ est infinie. Pour $i = 1, 2$, notons par $P_i(l)$ la ligne polygonale contenue dans le bord de $\Lambda(l)$, partant de e_i et allant vers l'infini en s'éloignant toujours strictement de 0 (ou, de manière équivalente, la composante connexe de $\partial\Lambda(l)\backslash]e_1, e_2[$ contenant e_i).

Notons par d_i la demi-droite fermée contenue dans la droite engendrée par le vecteur e_i, d'origine le point e_i et ne contenant pas 0. Posons aussi :

$$Q_i(l) := \begin{cases} d_i \cup P_i(l) \cup (l \setminus [0, S(l)]), & \text{si } l \text{ est rationnelle}, \\ d_i \cup P_i(l), & \text{si } l \text{ est irrationnelle}. \end{cases}$$

Associons aussi à chaque pétale τ_i l'un des symboles 'δ' ou 'γ', suivant que τ_{i+1} est attaché du côté *droit* ou *gauche* de τ_i et convenons que le symbole du dernier pétale (si l est rationnelle) est le même que celui de l'avant-dernier.

EXEMPLE 8.7. La figure 19 représente le lotus de la demi-droite l passant par $S(l) = 7e_1 + 5e_2$. Il est formé de 5 pétales. $P_1(l)$ joint dans l'ordre les points $e_1, 3e_1 + 2e_2, S(l)$ et $P_2(l)$ joint dans l'ordre les points $e_2, e_1 + e_2, S(l)$. Les symboles des pétales sont, dans l'ordre, $\delta, \gamma, \gamma, \delta, \delta$.

La proposition suivante relie la construction du lotus de λ à la construction géométrique de Klein lui permettant de donner une interprétation géométrique du développement en fractions continues euclidiennes de λ (voir [23]). On en déduit l'interprétation géométrique annoncée des fractions continues euclidiennes à l'aide du lotus universel.

PROPOSITION 8.8.

1. *Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, la ligne polygonale $Q_i(l)$ est le bord de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points du réseau N contenus dans le cône strictement convexe de côtés $\mathbf{R}_+ e_i$ et l.*
2. *Regroupons les pétales $\tau_0, \tau_1, \ldots$ du lotus $\Lambda(l)$ en paquets maximaux de triangles successifs ayant le même symbole. On considère que le premier paquet est toujours formé de pétales tournant à gauche. Désignons par $a_1, a_2, \ldots$ les cardinaux des paquets successifs. Alors, si λ désigne la pente de l dans la base (e_1, e_2), on a :*

$$\lambda = [a_1, a_2, \ldots]^+.$$

REMARQUE 8.9. J'ai expliqué dans [23] que l'on pouvait comprendre la dualité des enveloppes convexes des points entiers situés dans deux cônes supplémentaires à l'aide d'un *diagramme en zig-zag*. Dans le cas où ces cônes sont celui de côtés $\mathbf{R}_+(e_1 - e_2)$, l et celui de côtés l, $\mathbf{R}_+(e_2 - e_1)$, la ligne en zig-zag associée obtenue en partant du point $e_1 - e_2$ est l'union du segment $[e_1 - e_2, e_2]$ et des segments qui séparent à l'intérieur du lotus $\Lambda(l)$ les unions de pétales tournant dans le même sens. On pourra comparer ceci aux considérations de [14].

Au début de la section, le multilotus universel a été associé à une base de N. Mais la seule chose qui compte dans sa construction, c'est la donnée du demi-plan $P(e_1, e_2)$ bordé par la droite $D_\infty(e_1, e_2)$ qui le contient. En fait, on peut partir de n'importe quel demi-plan fermé P dont le bord D^P_∞ est une droite rationnelle. À l'intérieur de ce demi-plan on considère la droite D^P parallèle à D^P_∞ la plus proche de D^P_∞ qui contient des points de N. On considère alors sur D^P tous les couples de points successifs de N : ce sont des bases de N, qui permettent de construire le multilotus universel $\overline{\mathcal{L}}(P)$ associé à P, comme union des lotus universels qui leur correspondent.

REMARQUE 8.10. La notion du lotus $\Lambda(l) = \Lambda(\lambda)$ associé à une demi-droite l de pente λ peut se généraliser à une collection quelconque $(l_i)_{i\in I}$ (finie ou infinie) de demi-droites contenues dans l'intérieur de $\sigma(e_1, e_2)$, de pentes $(\lambda_i)_{i\in I}$. Par définition, c'est l'union des lotus des demi-droites constituantes :

$$\Lambda(l_i)_{i\in I} = \Lambda(\lambda_i)_{i\in I} := \bigcup_{i\in I} \Lambda(l_i)\,.$$

On obtient bien des lotus au sens de la Définition 5.2. Ces lotus sont des complexes finis si et seulement si toutes les pentes λ_i sont rationnelles. Parmi ces lotus finis, ceux définis par une seule demi-droite sont ceux qui ont une seule pointe (c'est-à-dire, un sommet différent de e_1 et e_2, dans lequel aboutit un seul pétale). Les réalisations canoniques des membranes dans le lotus universel sont précisément ces lotus finis dont on enlève la moitié adjacente à e_2 du pétale $\tau(e_1, e_2)$. Représenter les lotus finis sous la forme $\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est essentiel dans [12].

Pour achever cette section, nous allons expliquer une relation entre le grand lotus et les fractions continues de Hirzebruch-Jung.

DÉFINITION 8.11. Considérons une suite $(v_0, v_1, \ldots, v_{n+1})$ de vecteurs de N, avec $n \geq 1$. Cette suite est dite *admissible* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. deux vecteurs successifs quelconques forment toujours une base de N ;
2. toutes ces bases définissent la même orientation de $N_{\mathbf{R}}$;
3. tous ces vecteurs sont contenus dans un même demi-plan fermé bordé par la droite $\mathbf{R}v_0$.

Les propriétés géométriques précédentes peuvent se traduire numériquement. Plus précisément, on a la proposition élémentaire suivante :

PROPOSITION 8.12. *Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, l'union des propriétés $1, \ldots, i$ est équivalente à l'union des propriétés $1', \ldots, i'$, où :*

$1'$. *(v_0, v_1) est une base de N et pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\epsilon_k \in \{+1, -1\}$ tel que $v_{k-1} + \epsilon_k v_{k+1} = a_k v_k$, avec $a_k \in \mathbf{Z}$;*

$2'$. *$\epsilon_k = +1$ pour tous les $k \in \{1, \ldots, n\}$;*

$3'$. *$a_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, dès que $n \geq 2$; $a_1 \geq 0$ pour $n = 1$; $[a_1, \ldots, a_k]^- > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $[a_1, \ldots, a_n]^- \geq 0$.*

De plus, deux suites admissibles de vecteurs sont isomorphes par une transformation linéaire des réseaux ambiants si et seulement si les suites d'entiers associées coïncident.

Ceci permet de parler de *suites admissibles d'entiers* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{N}^n$. La proposition précédente montre qu'une suite admissible d'entiers est un invariant complet des suites admissibles de vecteurs d'un réseau bidimensionnel, à isomorphismes de réseaux près.

DÉFINITION 8.13. Nous dirons que la suite admissible $(v_0, \ldots, v_{n+1})$ de vecteurs de N *représente* 0 si $v_1 + v_{n+1} = 0$.

Ceci est équivalent au fait que la suite associée $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{N}^n$ vérifie les conditions $1', 2', 3'$ précédentes et que de plus :

$$[a_1, \ldots, a_n]^- = 0.$$

La proposition suivante fait le lien entre les suites admissibles représentant 0 et les triangulations des polygones par des diagonales. Elle peut se prouver par récurrence sur le nombre de vecteurs, à l'aide du fait que les suites admis-

sibles représentant 0 s'obtiennent à partir de la suite $(1,1)$ par un processus d'éclatements (voir [22, Appendice]).

PROPOSITION 8.14. *Soit $(v_0,\dots,v_{n+1})$ une suite admissible de vecteurs de N représentant 0 et soit $(a_1,\dots,a_n)$ la suite d'entiers associée. Notons par P l'unique demi-plan fermé contenant tous les vecteurs de la suite. Soit* $\mathrm{Pol}(v_0,\dots,v_{n+1})$ *l'union du triangle $0v_1v_n$ et des pétales du multilotus universel $\overline{\mathcal{L}}(P)$ dont les intérieurs intersectent l'un des segments $]0,v_k]$, pour $k\in\{1,\dots,n\}$. C'est un polygone de sommets $0,v_1,\dots,v_n$ (dans cet ordre), triangulé par des pétales du multilotus universel, et le nombre de pétales arrivant au sommet v_k est égal à a_k, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$.*

EXEMPLE 8.15. Dans la figure 20 est dessiné le polygone triangulé correspondant à la suite admissible représentant 0 suivante: $(2,1,3,4,1,3,1,3)$.

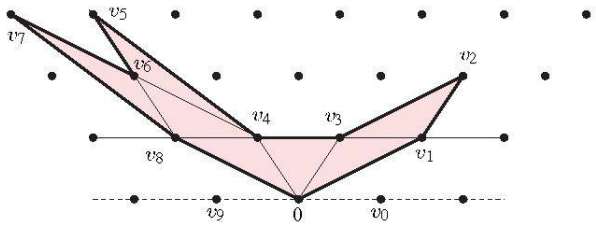

FIGURE 20
Polygone triangulé associé à une suite admissible représentant 0

REMARQUE 8.16. La notion de suite admissible d'entiers a été introduite par Orlik et Wagreich [22]. Celles qui de plus représentent 0 sont réapparues naturellement dans les travaux [8] et [26] de Christophersen et Stevens sur la théorie des déformations des singularités quotient cycliques de surfaces. Ils ont montré que ces suites correspondent bijectivement aux triangulations par des diagonales des polygônes orientés ayant un point marqué et ils ont utilisé la combinatoire de la triangulation associée dans leurs calculs. Par ailleurs, après avoir écrit [23], j'ai été amené à me représenter ces suites par des suites de vecteurs, comme expliqué dans la Proposition 8.12. C'est à cette occasion que je me suis posé la question de savoir s'il n'y avait pas moyen de construire canoniquement un polygone ayant la bonne triangulation à partir

de la suite de vecteurs. D'autre part, j'ai développé l'outil des voilures et des cerfs-volants afin de pouvoir l'appliquer à terme à l'étude de la topologie des déformations de singularités rationnelles plus générales que les singularités quotients cycliques (les *singularités sandwich*). Je pense qu'entre autres, des opérations de flops de diagonales dans les membranes devraient correspondre à des passages entre composantes de l'espace de déformation miniversel.

9. Les lotus universels de dimension quelconque

Dans cette section j'étends la notion de lotus universel en dimension quelconque, j'explique à quelle généralisation des fractions continues cette construction donne lieu, et comment en déduire une mesure géométrique du contact des courbes monomiales.

Partons d'une base (non-ordonnée mais marquée par un ensemble I) $\mathcal{B} := (e_i)_{i\in I}$ d'un réseau N de rang $n \geq 2$, où I est un ensemble de cardinal n. Définissons les polyèdres convexes fermés suivants :

- $\sigma(\mathcal{B})$: le cône strictement convexe de $N_{\mathbf{R}}$ engendré par cette base ;
- $\Delta_0(\mathcal{B})$: l'enveloppe convexe de l'ensemble formé par 0 et $\mathcal{B}$; c'est un simplexe n-dimensionnel ;
- $\Delta(\mathcal{B})$: l'enveloppe convexe de $\mathcal{B}$; c'est un simplexe $(n-1)$-dimensionnel, unique facette de $\Delta_0(\mathcal{B})$ ne contenant pas 0 ;
- $\Pi(\mathcal{B})$: le parallélépipède engendré par $\mathcal{B}$; ses sommets sont toutes les sommes de vecteurs disjoints parmi les vecteurs de $\mathcal{B}$;
- $\tau(\mathcal{B}) := \overline{\Pi(\mathcal{B}) \setminus \Delta_0(\mathcal{B})}$; c'est le *pétale* n-dimensionnel associé à la base $\mathcal{B}$;
- $\phi(i_1, \ldots, i_n)$: pour chaque arrangement $(i_1, \ldots, i_n)$ des éléments de l'ensemble I, le simplexe $(n-1)$-dimensionnel dont les sommets sont les éléments de la base :

$$\mathcal{B}(i_1, \ldots, i_n) := (e_{i_1},\ e_{i_1} + e_{i_2},\ \ldots\ ,\ e_{i_1} + \cdots + e_{i_n}). \tag{9.1}$$

Les simplexes $\phi(i_1, \ldots, i_n)$ sont contenus dans le bord de $\tau(\mathcal{B})$. Leur union avec $\Delta(\mathcal{B})$ constitue exactement la partie de $\partial\tau(\mathcal{B})$ visible sans écrasement à partir de l'origine. C'est-à-dire que, si on considère :

$$\psi\colon \sigma(\mathcal{B}) \setminus 0 \longrightarrow \Delta(\mathcal{B}),$$

la projection centrale sur le simplexe $\Delta(\mathcal{B})$ dont les sommets sont les points de $\mathcal{B}$, alors toutes les autres faces maximales du bord du polytope $\tau(\mathcal{B})$

sont écrasées par ψ en des polytopes de dimension strictement inférieure. Les images par ψ des simplexes $\phi(i_1, \ldots, i_n)$ constituent exactement la subdivision barycentrique de $\Delta(\mathcal{B})$.

En partant de $\tau(\mathcal{B})$ et des nouvelles bases $\mathcal{B}(i_1, \ldots, i_n)$, on peut construire itérativement un complexe polyédral infini contenu dans le cône $\sigma(\mathcal{B})$. Plus précisément, lors de la première étape de la construction on construit $\tau(\mathcal{B})$. La deuxième étape de la construction consiste à rajouter tous les pétales $\tau(\mathcal{B}(i_1, \ldots, i_n))$ à $\tau(\mathcal{B})$, $(i_1, \ldots, i_n)$ variant parmi les arrangements des éléments de I. Ces pétales 'croissent' à partir des simplexes $\phi(i_1, \ldots, i_n)$, c'est pourquoi nous appelons ces derniers les *simplexes de croissance* de la deuxième étape de la construction. Remarquons que pour $n \geq 3$, ces simplexes de croissance ne sont pas des facettes du pétale $\tau(\mathcal{B})$, mais des demi-facettes. Ensuite on itère.

DÉFINITION 9.1. Le complexe polyédral précédent, noté $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, est appelé *le lotus universel* de dimension n associé à la base $\mathcal{B}$ du réseau N.

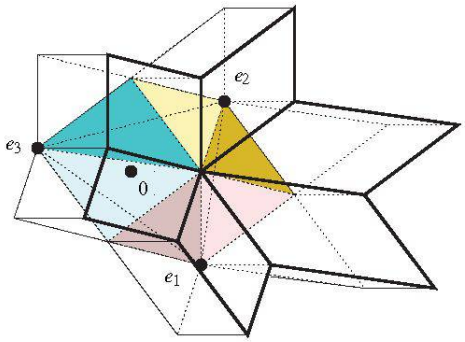

FIGURE 21
Les deux premières étapes de construction du lotus universel tridimensionnel

EXEMPLE 9.2. Dans la figure 21 sont dessinés le pétale initial et les 6 pétales de la deuxième étape de construction. Sont coloriés les simplexes de croissance. Dans la figure 22 sont dessinés les pétales des quatre premières étapes de la construction du lotus universel, tels que vus à partir de l'origine. C'est-à-dire que sont dessinées les images par ψ des simplexes de croissance de ces pétales. Est coloriée la projection de l'union des faces des pétales de la deuxième étape de construction dont les arêtes sont indiquées en traits gras dans la figure 21.

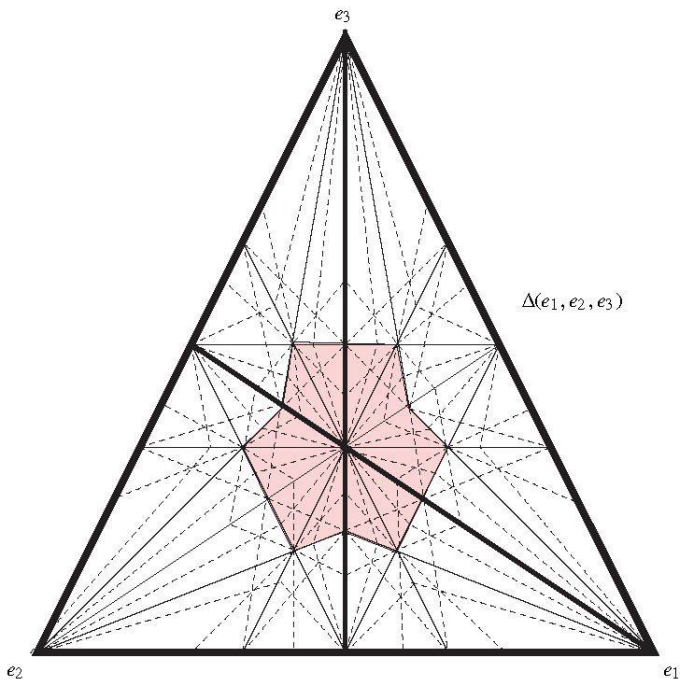

FIGURE 22
Le lotus tridimensionnel vu à partir de l'origine

Le lotus universel n-dimensionnel permet de généraliser en dimension quelconque l'interprétation géométrique donnée dans la Proposition 8.8, (2) des fractions continues usuelles. En effet, la notion de *lotus d'une demi-droite* s'étend en toutes dimensions :

DÉFINITION 9.3. Un *sous-pétale* est une face latérale d'un pétale, c'est-à-dire telle que ψ restreint à cette face n'est pas un homéomorphisme sur son image. Soit $l \subset N_{\mathbf{R}}$ une demi-droite d'origine 0, contenue dans l'intérieur du cône $\sigma(\mathcal{B})$. Son *lotus* $\Lambda(l)$ est par définition l'union des pétales et sous-pétales du lotus universel $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ dont les intérieurs intersectent l.

On peut à nouveau associer au lotus $\Lambda(l)$ la suite des sous-pétales que l'on rencontre en s'éloignant de 0 le long de l. La suite des dimensions de ces sous-pétales est décroissante. Pour $n = 2$ elle est constante, mais dès $n = 3$ elle ne l'est plus nécessairement : il y a une sous-suite initiale de pétales de

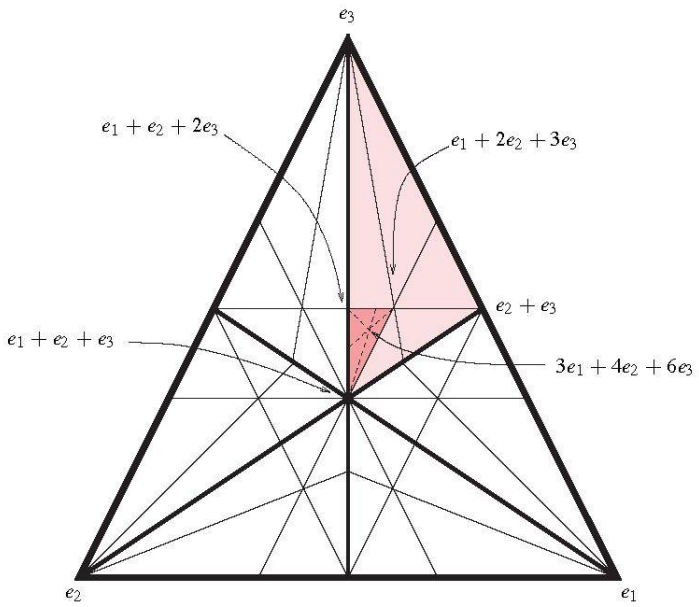

FIGURE 23
Le lotus tridimensionnel d'une demi-droite, vu à partir de l'origine

dimension n, suivie d'une sous-suite de sous-pétales de dimension $n-1$, puis une autre de dimension $n-2$, etc.

Notons par $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ la suite des pétales de dimension n du lotus $\Lambda(l)$ et par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ la suite des simplexes de croissance associés. Grâce à la formule (9.1), on peut paramétrer cette suite par une suite d'*arrangements* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des éléments de l'ensemble I, étendant le fait que l'on paramètre $\tau(\mathcal{B}(i_1, \ldots, i_n))$ par l'arrangement $(i_1, \ldots, i_n)$. Géométriquement, cela correspond au fait qu'étant donné un simplexe de dimension n de la subdivision barycentrique de $\Delta(\mathcal{B})$, il admet un unique sommet en commun avec $\Delta(\mathcal{B})$, et plus généralement, pour chaque $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, une unique face de dimension k contenue dans une face de dimension k de $\Delta(\mathcal{B})$. Ainsi, α_k est l'arrangement correspondant au simplexe de croissance de τ_{k+1}. Cette paramétrisation étend en dimension plus grande l'association d'une suite de symboles δ et γ à une demi-droite $l \subset \sigma(\mathcal{B})$ faite en dimension 2 (voir le paragraphe qui précède l'Exemple 8.7). En effet, dans ce cas, si $I = \{1, 2\}$, le symbole δ correspond à l'arrangement $(1, 2)$ et γ à l'arrangement $(2, 1)$.

Comme en dimension 2, si le lotus est composée d'un nombre fini de pétales et sous-pétales alors, par convention, les deux derniers arrangements sont égaux.

EXEMPLE 9.4. La figure 23 représente la vue à partir de 0 (c'est-à-dire son image par la projection ψ) du lotus de la demi-droite rationnelle $\mathbf{R}_+(3e_1 + 4e_2 + 6e_3)$. Ce lotus est composé de trois pétales, paramétrés par la suite $(3,1,2),(2,3,1),(2,3,1)$ d'arrangements des éléments de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

Chaque fois que la dimension des sous-pétales constituant le lotus $\Lambda(l)$ baisse, on obtient des suites d'arrangements d'éléments d'un ensemble de cardinal plus petit que celui qui précédait. De cette manière, la notion de *fraction continue* associée à une demi-droite rationnelle de $\sigma(e_1, e_2)$ se retrouve remplacée en dimension plus grande par une notion *d'arrangements continus*.

Pour finir, je voudrais mentionner un germe d'application de la notion de lotus d'une demi-droite (en dimension quelconque) à la théorie des singularités. Une *courbe monomiale* de $\mathbf{C}^n$ est une courbe définie par une paramétrisation de la forme $t \to (t^{m_1}, \ldots, t^{m_n})$. Appelons $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n$ son *exposant*. On peut représenter géométriquement le *contact* de deux courbes monomiales à l'aide de la partie initiale commune des lotus des demi-droites engendrées par leurs exposants. Ce contact peut aussi être représenté symboliquement en associant à la suite des pétales de cette partie initiale commune la suite correspondante d'arrangements. Ceci pourrait aider à construire une théorie du contact en un point de deux variétés analytiques complexes plongées dans un espace ambiant commun. Une telle théorie manque actuellement, sauf dans le cas des germes de courbes planes, où on peut mesurer le contact de deux branches par leurs points infiniments voisins communs. La théorie développée ici permet de comprendre ces points infiniment voisins en termes de cerfs-volants, et donc, dans chaque membrane, en termes de contact des lotus associés (voir [12]). Les lotus de dimension quelconque pourraient intervenir dans une description analogue pour d'autres germes que ceux de courbes planes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNOLD, V. I. Higher-dimensional continued fractions. *Regul. Chaotic Dyn. 3* (1998), 10–17.

[2] BRIESKORN, E. and H. KNÖRRER. *Plane Algebraic Curves*. Translated from the German by J. Stillwell. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[3] CAMPILLO, A. and J. CASTELLANOS. *Curve Singularities. An Algebraic and Geometric Approach*. Hermann, 2005.

Achevé de composer le 22 décembre 2011 à 08 : 59

[4] CAMPILLO, A., G. GONZÁLEZ-SPRINBERG et M. LEJEUNE-JALABERT. Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315* (1992), 987–990.

[5] CAMPILLO, A., G. GONZÁLEZ-SPRINBERG et M. LEJEUNE-JALABERT. Clusters of infinitely near points. *Math. Ann. 306* (1996), 169–194.

[6] CAMPILLO, A., G. GONZÁLEZ-SPRINBERG and F. MONSERRAT. Configurations of infinitely near points. *São Paulo J. Math. Sci. 3* (2009), 115–160.

[7] CASAS-ALVERO, E. *Singularities of Plane Curves*. London Mathematical Society Lecture Note Series *276*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[8] CHRISTOPHERSEN, J. A. On the components and discriminant of the versal base space of cyclic quotient singularities. In: *Singularity Theory and its Applications*, Part I (Coventry, 1988/1989), 81–92. Lecture Notes in Mathematics *1462*. Springer, Berlin, 1991.

[9] DU VAL, P. Reducible exceptional curves. *Amer. J. Math. 58* (1936), 285–289.

[10] ENRIQUES, F. e O. CHISINI. Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Libro II, Zanichelli, 1918.

[11] FAVRE, C. and M. JONSSON. *The Valuative Tree*. Lecture Notes in Mathematics *1853*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[12] GARCÍA BARROSO, E., P. GONZÁLEZ PÉREZ and P. POPESCU-PAMPU. The kite of a plane curve singularity. In preparation.

[13] GRAHAM, R. L., D. E. KNUTH and O. PATASHNIK. *Concrete Mathematics. A foundation for computer science*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1994.

[14] HATCHER, A. and W. THURSTON. Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements. *Invent. Math. 79* (1985), 225–246.

[15] HIRONAKA, H. La voûte étoilée. In: *Singularités à Cargèse* (Rencontre Singularités en Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972), 415–440. *Astérisque 7-8*, Soc. Math. France, Paris, 1973.

[16] HIRZEBRUCH, F. The topology of normal singularities of an algebraic surface. *Sém. Bourbaki 250* (1962/63).

[17] HONDA, K. On the classification of tight contact structures I. *Geom. Topol. 4* (2000), 309–368.

[18] KLEIN, F. Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 3* (1895), 357–359. Traduction française: *Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. Nouvelles Annales de Mathématiques (3) 15* (1896), 327–331.

[19] LEJEUNE-JALABERT, M. Linear systems with infinitely near base conditions and complete ideals in dimension two. In: *Singularity Theory* (Trieste, 1991), D. T. Lê, K. Saito, B. Teissier eds., 345–369. World Scientific Publ., River Edge, NJ, 1995.

[20] MUMFORD, D. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 9* (1961), 5–22.

[21] NOETHER, M. Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. *Math. Ann. 9* (1875), 166–182.

[22] ORLIK, P. and P. WAGREICH. Algebraic surfaces with k^*-action. *Acta Math. 138* (1977), 43–81.

[23] POPESCU-PAMPU, P. The geometry of continued fractions and the topology of surface singularities. In: *Singularities in Geometry and Topology 2004*, 119–195. Advanced Studies in Pure Mathematics *46*. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.

[24] SERIES, C. Non-Euclidean geometry, continued fractions, and ergodic theory. *Math. Intelligencer 4* (1982), 24–31.

[25] —— The modular surface and continued fractions. *J. London Math. Soc. (2) 31* (1985), 69–80.

[26] STEVENS, J. On the versal deformation of cyclic quotient singularities. In: *Singularity Theory and its Applications*, Part 1 (Coventry, 1988/1989), 302–319. Lecture Notes in Mathematics *1462*. Springer, Berlin, 1991.

[27] WALL, C. T. C. *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society Student Texts *63*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[28] ZARISKI, O. Polynomial ideals defined by infinitely near base points. *Amer. J. Math. 60* (1938), 151–204.

(Reçu le 12 février 2010)

Patrick Popescu-Pampu

Université Lille 1
UFR de Mathématiques, Bâtiment M2
Cité Scientifique
59655, Villeneuve d'Ascq Cedex
France
e-mail: patrick.popescu@math.univ-lille1.fr

Achevé de composer le 22 décembre 2011 à 08:59