Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 58 (2012)

Artikel: Quelques exemples élémentaires de feuilletages holomorphes et d'hypersurfaces levi-plates

Autor: Cerveau, Dominique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515823

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 58 (2012), 325–332

QUELQUES EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES ET D'HYPERSURFACES LEVI-PLATES

par Dominique CERVEAU

RÉSUMÉ. Le texte qui suit ne se veut pas une exégèse de l'article [2] de Marco Brunella publié dans ce même volume. Le style épuré, minimaliste, d'une grande précision que Marco affectionnait va droit au concept, à la profondeur du résultat; le spécialiste du sujet y trouve bien souvent une nouvelle compréhension, une nouvelle esthétique. Il n'est par ailleurs pas rare, et on le vérifie dans [2], que Marco mette en exergue la beauté de tel ou tel fait. Le néophyte quant à lui ressentira sans doute un sentiment d'impuissance, de doute face à cette magnifique montagne... d'évidence d'accès difficile. Aussi plutôt qu'une lecture suivie du texte, qui ne pourrait que le dénaturer, nous proposons une liste d'exemples, de faits élémentaires, sur lesquels le lecteur pourra s'appuyer et découvrir les cairns à peine perceptibles qui balisent de fait ce très bel article.

Dans [2] il y a deux thèmes qui sont abordés: les feuilletages holomorphes et les hypersurfaces Levi-plates. Notre texte s'organise donc autour de ces deux concepts; nous citerons au passage quelques résultats marquants pas forcément nécessaires à la compréhension du texte de Marco sans pour autant présenter l'état de l'art.

1. FEUILLETAGES HOLOMORPHES

Le discours de Marco se situant exclusivement dans l'espace $\mathbf{C}^2$, nous nous placerons de même, à quelques exceptions près, en dimension 2 où les définitions sont moins délicates. Bien qu'il se concentre sur des problèmes locaux, nous présenterons, pour des raisons de commodité, des exemples globaux, sur $\mathbf{C}^2$ tout entier. Se donner un *feuilletage holomorphe* $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur un ouvert U de $\mathbf{C}^2$, c'est simplement se donner un champ de vecteurs holomorphe

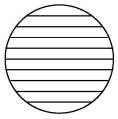
$$\chi = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

où a et b désignent des fonctions holomorphes sur U non toutes deux nulles identiquement. Le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à χ est dit *régulier* si χ ne s'annule pas, et *singulier* sinon. Quitte à diviser χ par une fonction holomorphe ad-hoc, on se ramène usuellement au cas où les zéros de χ sont des points isolés. On dit alors que le feuilletage est à *singularités isolées*. Les *feuilles* de $\mathcal{F}$ sont les trajectoires, les courbes intégrales complexes du champ χ. En général celui-ci n'est pas « complet », *i.e.* les solutions de l'équation différentielle

$$\dot{x} = a(x,y)\,, \qquad \dot{y} = b(x,y)$$

ne sont pas définies sur $\mathbf{C}$ tout entier. Elles le sont, comme on le disait naguère, sur un « feuillet de Riemann » ce qui s'interprète aujourd'hui en disant que les feuilles sont des surfaces de Riemann immergées dans l'ouvert U. Si $m \in U$ est un point non singulier de $\mathcal{F}$ la feuille $\mathcal{L}_m$ de $\mathcal{F}$ passant par m a pour tangente en m la droite $m + \mathbf{C} \cdot \chi(m)$. Détaillons tout cela sur des exemples.

D'un point de vue local le champ de vecteurs χ est holomorphiquement conjugué au champ constant $\frac{\partial}{\partial x}$ en un point non singulier; ceci signifie que dans des coordonnées locales ad-hoc (u,v), le champ χ s'écrit $\frac{\partial}{\partial u}$: c'est une conséquence du théorème de Cauchy. Ainsi, observées à la loupe au point m, les feuilles (locales) de $\mathcal{F}$ ressemblent à des droites (complexes) parallèles :



Au voisinage d'un point singulier c'est une tout autre histoire et l'étude des singularités de feuilletages holomorphes est loin d'être terminée, même en dimension 2. Commençons par examiner les exemples simples que sont les champs de vecteurs linéaires diagonaux :

$$\chi_\lambda = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

On apprend très tôt à « intégrer » ce type de champ (tout du moins dans le cadre réel); le *flot* φ_t, ou *groupe à un paramètre*, de χ est donné par

$$\varphi_t(x,y) = (e^t x, e^{\lambda t} y)\,, \qquad t \in \mathbf{C}\,.$$

C'est bien sûr la solution de l'équation différentielle complexe $\frac{d\varphi_t}{dt} = \chi_\lambda \circ \varphi_t$ avec condition initiale (x,y). La feuille $\mathcal{L}_m$ du feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ associé à χ_λ passant par le point $m = (x,y)$ est tout simplement l'image de l'application $t \mapsto \varphi_t(x,y)$. Il y a une feuille très spéciale qui est le point singulier $\{0\}$;

il y a aussi deux autres feuilles spéciales que sont les axes de coordonnées privés du point singulier $\{0\}$. Ces deux feuilles ont un statut particulier : on les appelle *séparatrices*, terme que l'on rencontre dans [2]. Les séparatrices d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sont les feuilles dont l'adhérence est une courbe analytique complexe passant par un point singulier. Un théorème célèbre dû à Camacho et Sad [4] affirme que tout feuilletage local singulier en l'origine de $\mathbf{C}^2$ possède au moins une séparatrice. Lorsqu'on s'intéresse aux textes anciens on constate que ce fait est considéré plus ou moins comme une évidence. La description des autres feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$, les feuilles non spéciales, dépend du paramètre λ.

Lorsque λ est un rationnel négatif, $\lambda = -p/q$, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, on observe que les feuilles (non spéciales) sont les niveaux (non nuls) de la fonction $f = x^p y^q$. On dit que cette fonction est une *intégrale première holomorphe* de $\mathcal{F}_\lambda$. Mattei et Moussu ont démontré dans [7] qu'un feuilletage local singulier à l'origine de $\mathbf{C}^2$ ayant un nombre fini de séparatrices et dont toutes les autres feuilles sont fermées possède une intégrale première holomorphe non constante.

Lorsque λ est un rationnel positif, $\lambda = p/q$, c'est cette fois la fonction $g = x^p/y^q$ dont les niveaux (privés de $\{0\}$) sont les feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$; on dit que g est une *intégrale première méromorphe* de $\mathcal{F}_\lambda$. Ici le feuilletage a une infinité de séparatrices et on dit traditionnellement qu'un tel feuilletage est *dicritique* en son point singulier. Il n'y a pas d'énoncé à la Mattei-Moussu dans ce contexte. Plus précisément il existe des feuilletages locaux singuliers en l'origine dont toutes les feuilles sont des séparatrices, *i.e.* d'adhérence des courbes analytiques passant par l'origine et qui ne possèdent pas d'intégrale première méromorphe. Le premier exemple connu est dû à Suzuki [8] : c'est le feuilletage dont les feuilles sont les niveaux de la fonction $\frac{y}{x}\exp\left(\frac{y(y+1)}{x}\right)$.

Lorsque λ est non rationnel, on observe que les feuilles (non spéciales) de $\mathcal{F}_\lambda$ sont isomorphes à $\mathbf{C}$; si de plus λ est non réel, chacune d'elles adhère à toutes les feuilles spéciales. Une façon de voir cela est de remarquer que la trace de la feuille non spéciale $\mathcal{L}_m$ sur la droite affine $x = 1$ coïncide avec une certaine orbite de l'homothétie $(1,y) \mapsto (1, e^{2i\pi\lambda}y)$. On peut en déduire l'*espace des feuilles*, c'est le quotient de l'espace ambiant où vit le feuilletage par la relation d'équivalence « appartenir à la même feuille », tout du moins dans ce cas. Si λ est non réel, l'*espace des feuilles non spéciales* « $\mathbf{C}^2 \setminus \{xy = 0\}/\mathcal{F}_\lambda$ » est isomorphe à une courbe elliptique (tore $\mathbf{C}/\Lambda$). Il s'identifie en effet au quotient de $\mathbf{C}^*$ par l'homothétie $y \mapsto e^{2i\pi\lambda}y$. Si on veut l'espace des feuilles complet, il faut ajouter les feuilles spéciales et on obtient bien sûr un espace non séparé mais relativement simple.

Lorsque λ est rationnel, il est encore facile de décrire l'espace des feuilles (exercice), mais lorsque λ est un irrationnel, c'est toute une autre histoire.

Il ne faut pas croire que les singularités de feuilletages soient toujours aussi simples; même dans le cas « homogène » où le feuilletage est invariant par le groupe d'homothéties $\{(x,y) \mapsto s(x,y),\ s \in \mathbf{C}^*\}$, on rencontre des phénomènes relativement fascinants. Par exemple si on se donne deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 en (x,y) suffisamment générales, alors le champ de vecteurs $\chi = Q_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y}$ a trois séparatrices (les trois droites d'équations $yQ_1(x,y) - xQ_2(x,y) = 0$); les feuilles non spéciales du feuilletage associé sont denses dans $\mathbf{C}^2$ et ont la topologie du « monstre du Loch Ness »: elles sont homéomorphes à un plan auquel on a attaché un nombre infini d'anses.

2. Hypersurfaces Levi-plates

Il s'agit d'une notion qui remonte à Élie Cartan [5] et il est assez aisé d'imaginer l'origine du concept. Cartan s'intéresse évidemment aux « groupes de transformations » souvent réels mais aussi complexes, en particulier à ceux qui laissent invariants certains domaines (boules, polydisques, ...). A l'inverse, et pour cela revenons à la dimension 2, donnons-nous un sous-groupe à un paramètre de transformations holomorphes (par exemple comme au § 1) et supposons qu'un certain domaine $\Omega \subset \mathbf{C}^2$ soit invariant par ce groupe. Supposons en outre que son bord $\partial\Omega$ soit une sous-variété réelle, donc de dimension 3. Alors $\partial\Omega$ est visiblement « feuilleté » par les orbites $\{\varphi_t(m),\ t \in \mathbf{C},\ m \in \partial\Omega\}$ de notre groupe de transformations. Cet exemple est le prototype d'hypersurface Levi-plate que nous définissons maintenant, toujours en dimension 2. Observons d'abord qu'un $\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel V de $\mathbf{C}^2$ de dimension réelle 3 contient une unique droite (vectorielle) complexe: c'est la droite complexe $D = V \cap iV$. En particulier si M est une 3-sous-variété locale lisse réelle de $\mathbf{C}^2 \simeq \mathbf{R}^4$, alors pour chaque point m de M l'espace tangent T_mM contient une unique droite complexe D_m. Ainsi à M on associe un champ de droites complexes (2-plans réels) $m \mapsto D_m$. On dit alors que M est *Levi-plate* si ce champ de 2-plans est « intégrable » et définit donc un feuilletage (dit *feuilletage de Levi*) en surfaces réelles de M. Il est alors facile de voir que ces feuilles sont en fait des surfaces de Riemann complexes. La définition en dimension quelconque est identique: si M est une hypersurface réelle de $\mathbf{C}^n$, on demande l'intégrabilité du champ d'hyperplans $m \mapsto T_mM \cap iT_mM$. Pour ceux qui ne sont pas familiers avec l'intégrabilité, mentionnons les deux points qui suivent:

- Dans $\mathbf{C}^2$ le 3-plan réel $V = \{\operatorname{Im} y = 0\}$ est Levi-plat; le champ $m \mapsto D_m$ est ici le champ de droites $\{\operatorname{Im} y = 0, \operatorname{Re} y = \text{cte}\}$ et les feuilles précédentes sont évidemment ces mêmes droites. Il est utile de noter qu'il y a un feuilletage holomorphe sur $\mathbf{C}^2$, ici donné par le champ $\frac{\partial}{\partial x}$, qui donne en restriction à $\operatorname{Im} y = 0$ le feuilletage de notre ensemble Levi-plat. Bien qu'apparemment anodin ce point est essentiel.
- Commençons par rappeler le théorème de rectification suivant: une courbe lisse analytique réelle du plan complexe $\mathbf{C}$ est localement biholomorphe à une droite réelle de $\mathbf{C}$. Cet énoncé se généralise exactement dans le contexte Levi-plat. Plus précisément, soit M une 3-variété lisse (locale) analytique réelle de $\mathbf{C}^2$ (*i.e.* le graphe d'une fonction analytique de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ pour une certaine décomposition $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4 \simeq \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$). Alors si M est Levi-plate il existe un biholomorphisme local ϕ tel que $M = \phi(V)$. Cet énoncé qui remonte à É. Cartan se généralise en toute dimension; la terminologie utilisée par Cartan contient d'ailleurs ce principe de «redressement» puisqu'il parle d'*hyperplanoïdes*...

Nous retenons donc qu'une hypersurface analytique réelle lisse de $\mathbf{C}^2$ est Levi-plate si elle est localement biholomorphe à un hyperplan réel. Si l'hypersurface M possède des singularités nous dirons encore qu'elle est Levi-plate si elle l'est en ses points lisses. Donnons maintenant quelques exemples plus consistants et pour cela revenons aux feuilletages linéaires $\mathcal{F}_\lambda$ avec ici λ irrationnel négatif. On remarque que la fonction multivaluée $f = xy^{-\lambda}$ est intégrale première de $\mathcal{F}_\lambda$ (on a en effet $\chi_\lambda \cdot f = 0$). En particulier chaque feuille $\mathcal{L}_m$ est contenue dans le niveau $|f| = |f(m)|$ de la fonction continue $|f| = |x||y|^{-\lambda}$. Visiblement $|f|$ est analytique réelle en dehors des axes; par suite les niveaux $|f| = c$, $c \in \mathbf{R}_{>0}$, sont des hypersurfaces Levi-plates de $\mathbf{C}^2$ dont le feuilletage associé est $\mathcal{F}_\lambda$ (ou sa restriction). Le point intéressant ici est que chaque feuille non spéciale $\mathcal{L}_m$ est dense dans la variété Levi-plate $|f| = c$ qui la contient: c'est un joli exercice. Ainsi les hypersurfaces Levi-plates apparaissent naturellement comme adhérences de feuilles.

Une centaine d'années après É. Cartan, Burns et Gong relancent l'étude des hypersurfaces Levi-plates dans [3]. Ils classifient d'abord les «cônes quadratiques Levi-plats» de $\mathbf{C}^n$, puis établissent une sorte de lemme de Morse Levi-plat. Plus précisément considérons la forme quadratique réelle $q = \operatorname{Re}(z_1^2 + \ldots + z_n^2)$ sur $\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n$ avec $n \geq 2$ (on peut continuer à penser $n = 2$). Soit $M \subset \mathbf{C}^n$ une hypersurface analytique réelle locale Levi-plate contenant 0 donnée par $f = 0$, où

$$f = q + \text{«termes d'ordres plus grands que } 2\text{»}$$

est une « perturbation » analytique de q. Alors il existe un biholomorphisme local ϕ tel que $\phi(M)$ soit la trace du cône quadratique $q = 0$ sur un petit ouvert contenant 0. En particulier, a posteriori, M apparaît comme zéros de la partie réelle d'une fonction holomorphe g et le feuilletage de Levi est ici donné par les niveaux de g.

Donnons-nous maintenant une hypersurface analytique réelle locale Levi-plate irréductible M, *i.e.* décrite par les zéros d'une fonction analytique irréductible f ; supposons M singulière, avec des singularités ne se réduisant pas nécessairement à l'origine. On peut se demander, à l'instar de ce qui se passe dans [3], s'il existe un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$, donné (en dimension 2) par un champ χ, tel que M soit invariant par χ, dit autrement : tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à M soit son feuilletage de Levi. La réponse est non et voici un exemple tiré d'un autre article de Marco [1].

On note $x = x_1 + ix_2$ et $y = y_1 + iy_2$ les coordonnées de $\mathbf{C}^2$ et on considère l'ensemble

$$M = \left\{ y_2^2 = 4(x_2^2 + y_1)x_2^2 \right\}.$$

C'est un ensemble analytique réel (en fait algébrique réel) de $\mathbf{R}^4 \simeq \mathbf{C}^2$ qui est un « cylindre » puisqu'il ne dépend pas de x_1. Un calcul élémentaire montre que l'ensemble des points singuliers de M est donné par

$$\operatorname{Sing} M = \{y_2 = x_2 = 0\};$$

c'est un 2-plan purement réel. La partie lisse M_{lisse} de M est Levi-plate car elle contient la famille de paraboles

$$y = (x + c)^2, \qquad c \in \mathbf{R}$$

qui sont donc les feuilles de Levi de M. En fait ces paraboles sont solutions de l'équation de Clairaut

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y.$$

Cette équation différentielle induit sur $\mathbf{C}^2$ non pas un feuilletage, mais un *multi-feuilletage* ou *tissu* associé au « champ de vecteurs multivalué »

$$\frac{\partial}{\partial x} + 2\sqrt{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

qui induit un vrai feuilletage lorsqu'on le restreint à M. Mais dans ce même article Marco lève en quelque sorte cette ambiguité dans l'énoncé qui suit que, pour une fois, nous donnons en toute dimension.

THÉORÈME 2.1 ([1]). *Soient X une variété complexe et $M \subset X$ une hypersurface analytique réelle Levi-plate singulière. Il existe un morphisme $\pi\colon Y \to X$ d'une variété complexe Y dans X, une hypersurface $N \subset Y$ et un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ (singulier) sur Y tels que :*

- *π soit un isomorphisme d'un ouvert N_0 de N sur la partie lisse M_{lisse} de M ;*
- *$\pi\colon \overline{N_0} \to \overline{M_{\text{lisse}}}$ soit propre (les adhérences sont prises au sens ordinaire) ;*
- *$\mathcal{F}$ soit le feuilletage de Levi de N.*

Ainsi il devient naturel d'étudier les hypersurfaces Levi-plates dont le feuilletage s'étend à l'espace ambiant en un feuilletage holomorphe. Nous espérons que le lecteur sera à même de comprendre l'essence de [2, Theorem 1] dans lequel est proposée cette étude et d'oser affronter la preuve de Marco, beaucoup plus élégante et directe que la preuve originale de [6]. On peut considérer [1] et [2] comme le socle d'un théorème de résolution des singularités des ensembles Levi-plats à la Hironaka, théorème qu'il semble maintenant raisonnable d'envisager... pour ceux qui restent. Ciao Marco.

REMERCIEMENTS. Julie Déserti a participé à la relecture et à la réalisation pratique de ce texte; qu'elle en soit vivement remerciée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNELLA, M. Singular Levi-flat hypersurfaces and codimension one foliations. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 6* (2007), 661–672.

[2] —— Some remarks on meromorphic first integrals. *L'Enseignement Math. 58* (2012), ??–??. [¶¶¶¶: printer pagination]

[3] BURNS, D. and X. GONG. Singular Levi-flat real analytic hypersurfaces. *Amer. J. Math. 121* (1999), 23–53.

[4] CAMACHO, C. and P. SAD. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2) 115* (1982), 579–595.

[5] CARTAN, É. Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 11* (1933), 17–90.

[6] CERVEAU, D. and A. LINS NETO. Local Levi-flat hypersurfaces invariant by a codimension one holomorphic foliation. *Amer. J. Math. 133* (2011), 677–716.

[7] MATTEI, J.-F. et R. MOUSSU. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13* (1980), 469–523.

[8] SUZUKI, M. Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes. In: *Fonctions de plusieurs variables complexes*, III (Sém. François Norguet, 1975–1977), 53–79, 394. Lecture Notes in Mathematics *670*. Springer, Berlin, 1978.

(Reçu le 2 avril 2012)

Dominique Cerveau

Institut Universitaire de France et IRMAR
Campus de Beaulieu
F-35042 Rennes Cedex
France
e-mail: dominique.cerveau@univ-rennes1.fr