

# Optischer Teil

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles =  
Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg**

Band (Jahr): **46 (1956)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Optischer Teil

### 1. Für den senkrechten Lichteinfall geeignete Prismen

Die Wellennormalengeschwindigkeit  $q$  des Kupfervitriols konnte, bei Beschränkung auf die Prismenmethode mit senkrechtem Lichteintritt, an 38 verschiedenen Kristallen untersucht werden. Einige derselben eigneten sich sogar für Messungen nach mehr als einer Richtung, nämlich 7 für je zwei und 1 für drei Fortpflanzungsrichtungen, sodaß die Lichtablenkung an 47 Prismen geprüft wurde. Da als Prismenflächen einfach die aus den Lösungen erhaltenen Kristallebenen — natürlich nur die am besten gebildeten — verwendet wurden, fallen die in Frage stehenden Lichtfortpflanzungsrichtungen mit den Normalen gewisser Wachstumsflächen zusammen, jenen nämlich, die als Eintrittsebenen dienten. Im Ganzen sind es derer neun. Samt der zugeordneten Prismenorientierung und einigen Besonderheiten, die späterhin Erwähnung finden, wurden sie in Tab. 12 zusammengestellt.

Ist der brechende Winkel kleiner als  $40^\circ$ , so sollten sich Ein- und Austrittsebene der Kupfervitriolprismen vertauschen lassen. Es könnte also jedes Prisma für die Ermittlung der Lichtgeschwindigkeiten nach zwei verschiedenen Richtungen hin verwendet werden. In Wirklichkeit war aber diese Umstellung nur bei je 3-4 Individuen der Prismengruppen I, II, VII und VIII ausführbar. Denn damit das Licht, welches senkrecht zur ersten Fläche eintritt, durch die zweite wieder austrete, muß sich mindestens ein Teil der Austrittsebene auf das durch die Kristallbegrenzung gegebene Polygon der Eintrittsfläche orthogonal projizieren lassen. Soll das Prisma in verdrehter Stellung ebenfalls verwendbar sein, so muß dieser Bedingung auch bei vertauschter Rolle der beiden Grenzflächen Genüge geschehen. Kommen die Flächen wegen des Dazwischentretens anderer Fazetten nicht zum direkten Schnitt, so wird wegen des eigenartigen Habitus der Substanz die Doppelforderung nur ausnahmsweise erfüllt sein. Ja, es braucht sogar einiges Glück, um überhaupt mehrere Prismen zu finden, welche der erforderlichen Bedingung wenigstens für eine Fortpflanzungsrichtung entsprechen. Da die Flächen zudem noch einheitlich spiegeln sollen, wird verständlich, daß die Absicht, die Lichtgeschwindigkeiten einer bestimmten Richtung an jeweils sechs Individuen zu messen,

Tab. 12. Orientierung und Eigenart der benutzten optischen Prismen

Lichtweg ⊥ zu	Gruppe	Prismenfläche E : A	L.-Nr.	Menge des Lös.-Gen.	
001	I	001 : 0 $\bar{1}\bar{1}$	1-6	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Die Kristalle 1, 10, 15 und 18 kehren in II wieder.
011	II	011 : 00 $\bar{1}$	7-12	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Umkehrung von I. Vier Kr. schon für I benutzt. K 28 findet sich auch unter VII und VIII.
	III	011 : 0 $\bar{2}\bar{1}$	13-16	4-8 g NaCl	Gleichgerichteter Lichtweg wie in II, aber länger ; II und III sind in Tab. 17 zusammenge- nommen.
0 $\bar{1}\bar{1}$	IV	0 $\bar{1}\bar{1}$ : 00 $\bar{1}$	17-22	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Eintrittsfläche klein.
$\bar{1}\bar{2}\bar{1}$	V	$\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ : $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	23-27	0.7 g KNO <sub>3</sub>	Langer Lichtweg. Ein Kristall infolge zweifelhafter Rechnungsergebnisse weggelassen.
021	VI	021 : 0 $\bar{1}\bar{1}$	28	4-8 g NaCl	Lichtweg lang. Zur Berechnung der Indikatrix nicht herangezogen.
110	VII	110 : $\bar{1}00$	29-34	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Hat die K 28, 78, 93 mit VIII gemeinsam. K 28 schon bei II erwähnt. Sehr geringe Schwankungen der q <sup>2</sup> -Werte. Mäder fand aber bedeutend größere Zahlen.
100	VIII	100 : $\bar{1}\bar{1}0$	35-40	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Umstellung von VII ; 3 Kristalle gemeinsam. K 28 gehört auch zu II, K 75 zu X. L.-Nr. 38, 39 geben anscheinend zu hohe q <sup>2</sup> -Werte und wurden für die Durchschnittsbildung nicht berücksichtigt, obwohl L.-Nr. 38 Mäders Messungen bestätigt.
1 $\bar{2}0$	IX	1 $\bar{2}0$ : $\bar{1}10$	41-46	1.5 g KNO <sub>3</sub> 4 g NaCl	Langer Lichtweg.
1 $\bar{1}0$	X	1 $\bar{1}0$ : $\bar{1}00$	47	1.5 g KNO <sub>3</sub>	Nur ein einziger Kristall (K 75), schon für VIII gebraucht.

auf Schwierigkeiten stieß und für die Gruppen III, V (die Messungen an einem sechsten Individuum führten nur auf unbefriedigende Zahlen), VI und X überhaupt nicht zu verwirklichen war (vgl. Tab. 12).

## 2. Das Instrument und das Messungsverfahren

Alle Messungen erfolgten mit einem Fueßschen Goniometer II, das gerade von der gründlichen Revision zurückgekommen war. Leider zeigten sich während der Arbeit einige störende Fehler. Die Scheiben mit der Gradteilung und den beiden Nonien waren nicht vollkommen zentriert. Das hatte zur Folge, daß die Größe einer Drehung an den beiden Nonien verschieden abgelesen wurde. Die Differenz lag, je nach der gegenseitigen Stellung, zwischen  $-8\frac{1}{4}'$  und  $+5\frac{1}{2}'$ . Für die einzelne Drehung war natürlich das Mittel beider Ablesungen zu nehmen. Sollte aber von einer gegebenen Lage aus eine Drehung um einen bestimmten Winkel vorgenommen werden, so lagen die Verhältnisse schwieriger. Um sukzessive Annäherungen zu vermeiden, wurde für eine volle Umdrehung, in Abständen von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$ , die Differenz der beiden Noniusablesungen in geeignetem Maßstab auf Millimeterpapier aufgetragen. Aus den so erhaltenen Kurven konnte dann für jedes Azimut die zugehörige Korrektur sofort abgelesen werden.

Der genannte Zentrierungsfehler hatte noch weitere unangenehme Folgen. Beim Drehen des Kristalls oder des Fernrohrs entfernte sich bald der eine, bald der andere Nonius vom Limbus auf einen Abstand, der im ungünstigsten Falle etwa ein Drittel des Intervalles zweier benachbarter Skalateilchen erreichte. An anderer Stelle schienen sich die beiden Ränder etwas zu reiben. Die Enden der Teilstriche verloren dadurch an Schärfe. Auch paßten sich die Noniusteilchen nicht überall genau den Limbusteilen richtig an. Diesen Fehlern des Instrumentes mag es zuzuschreiben sein, daß sich bei besten Spektren, je nach Stellung, Ablenkungsunterschiede bis zu  $\frac{1}{2}'$  ergaben.

Die *Messung der Prismenwinkel* bietet keine Schwierigkeit. Es sind die an den beiden Nonien erhaltenen Differenzen einfach zu mitteln. Im übrigen wurde jeder Prismenwinkel mindestens dreimal, meistens aber fünfmal bestimmt, und zwar bei jeweils veränderter Stellung des Limbus. Die hieraus gemittelten Werte sind in Tab. 15 zusammengestellt. Daß sie großen Schwankungen unterliegen, ist nach allem, was über die Kristallographie des Kupfervitriols feststeht, nicht sehr erstaunlich. Die kleinste und größte Schwankung zeigt sich mit ungefähr  $8'$  und  $33'$  an den Prismengruppen VII und VIII. Wegen der verhältnismäßigen Kleinheit des Prismenwinkels  $\Gamma$  beeinflußt ein bei

seiner Bestimmung unterlaufener Fehler  $d\Gamma$  die Lichtgeschwindigkeit stärker, als wenn  $\Gamma$  größer wäre.

Um die Eintrittsebene des Prismas normal zum auffallenden Lichtstrahl zu bringen, wurde nach Zentrierung und Justierung des Kristalls, bei festgeschraubtem Teilkreis das Fernrohr auf den Kollimatorsplatt eingestellt und, nach Ablesung des Winkels, in geeignetem Sinne gegen den Kollimator hingedreht, bis das an der Eintrittsebene reflektierte Spaltbild genau auf das Fadenkreuz zu liegen kam. Der Winkel nun, um den der Kristall bei arretiertem Fernrohr dem einfallenden Licht entgegengedreht werden muß, damit senkrechte Inzidenz eintritt, ist gleich dem halben Supplement der Differenz von Direkt- und Reflexionsstellung des Fernrohrs. Um diesen Wert ist die mittlere Reflexionsablesung an den beiden Nonien zu verkleinern, bzw. zu vergrößern. Der errechnete Winkel ist durch den der gezeichneten Korrekturkurve zu entnehmenden halben Fehlbetrag dieses Azimuts, unter Berücksichtigung des Vorzeichens, zu ergänzen. Das Rechnungsschema der Tab. 13 veranschaulicht die Methode.

Tab. 13. Rechnungsschema für die Normalstellung der Eintrittsfläche

	1. Nonius	2. Nonius	1. Nonius gemittelt
1. Direkter Durchgang	$165^{\circ}24' \frac{1}{2}'$	$345^{\circ}16' \frac{1}{4}'$	$165^{\circ}20' \frac{3}{8}'$
2. Reflexionsstellung	$235^{\circ}55' \frac{1}{4}'$	$55^{\circ}51' \frac{3}{4}'$	$235^{\circ}53' \frac{1}{2}'$
3. Differenz	$70^{\circ}30' \frac{3}{4}'$	$70^{\circ}35' \frac{1}{2}'$	$70^{\circ}33' \frac{1}{8}'$
4. Supplementswinkel			$109^{\circ}26' \frac{7}{8}'$
5. Kristalldrehung			$54^{\circ}43' \frac{7}{16}'$
6. Theoret. Normalst.	$181^{\circ}10' \frac{1}{16}'$	$1^{\circ}10' \frac{1}{16}'$	$181^{\circ}10' \frac{1}{16}'$
7. Korrektur n. Kurve	$+ 3' \frac{3}{4}'$	$- 3' \frac{3}{4}'$	
8. Berechn. Normalst.	$181^{\circ}13' \frac{13}{16}'$	$1^{\circ}06' \frac{5}{16}'$	
9. Kontrollablesung	$181^{\circ}13' \frac{3}{4}'$	$1^{\circ}06' \frac{1}{4}'$	

Gelingt die Senkrechtstellung nicht mit hinreichender Genauigkeit, so weicht der gemessene Ablenkungswinkel  $\Delta_g$  um eine Kleinigkeit vom theoretischen Wert  $\Delta_t$  ab. Zur Abklärung der Größenordnung dieser Variation  $\delta$  wurde für einige kleine Auffallswinkel  $i_1$  der Unterschied  $\delta = \Delta_g - \Delta_t$  berechnet. Natürlich ist ein isotropes Medium vorausgesetzt und mit Rücksicht auf die obwaltenden Verhältnisse  $n = 1,55$  und  $\Gamma = 25^{\circ}$  angenommen. Über die Rechnungsergebnisse orientiert Tab. 14. Darin bedeutet  $r_1$  den leicht zu bestimmenden Brechungswinkel an der Eintrittsebene. Für den entsprechenden Winkel

Tab. 14. Variation  $\delta$   
des Ablenkungswinkels  $\Delta$  bei kleiner Abweichung  $i_1$  von senkrechter Inzidenz

$i_1$	$r_1$	$i_2$	$\delta$
00'	00'00''	40°55'27''	00'00''
+ 15'		40°37'28''	— 02'59''
— 15'	09'41''	41°13'29''	+ 03'02''
+ 10'		40°43'28''	— 01'59''
— 10'	06'27''	41°07'27''	+ 02'00''
+ 05'		40°49'26''	— 01'01''
— 05'	03'14''	41°01'28''	+ 01'01''
+ 04'		40°50'39''	— 00'48''
— 04'	02'35''	41°00'15''	+ 00'48''
+ 03'		40°51'51''	— 00'36''
— 03'	01'56''	40°59'02''	+ 00'35''
+ 02'		40°53'02''	— 00'25''
— 02'	01'18''	40°57'52''	+ 00'25''
+ 01'		40°54'14''	— 00'13''
— 01'	00'39''	40°56'39''	+ 00'12''
+ 1/2'		40°54'51''	— 00'06''
— 1/2'	00'19''	40°56'02''	+ 00'05''

an der Austrittsebene kommt  $r_2 = \Gamma - r_1$ . Mit ihm wird  $i_2$  erhalten. Da die Beziehung  $i_1 + i_2 = \Gamma + \Delta$  unschwer  $\Delta_g$  liefert, ergibt sich wegen  $\Delta_t = 15^\circ 55' 27''$  sofort die gesuchte Differenz  $\delta$ . Werden  $i_1$  und  $i_2$  vom zugehörigen Grenzebenenlot aus gegen die brechende Kante hin gemessen, so sind sie mit dem Minuszeichen zu behaften;  $r$  selber hat das gleiche Vorzeichen wie  $i$ . Wird nun mit dem für  $i_1 = \pm 15'$  angegebenen Winkel  $i_2$  der Brechungsindex nach der für senkrechte Inzidenz gültigen Formel berechnet, so kommt 1,54063 bzw. 1,55936. Der Fehler beträgt also je etwa 9 Einheiten der dritten Dezimale. Die entsprechenden Geschwindigkeitsquadrate sind 0,421312 und 0,411251. Die Variation gegenüber dem Sollwert 0,416233 erreicht somit ungefähr 5 Einheiten der dritten Dezimale.

Die Ablenkung  $\Delta$  wurde an jedem der 47 Prismen mit mindestens drei verschiedenen Normalstellungen der Eintrittsebene bestimmt. Als Lichtquelle diente eine Heliumgasentladungsröhre mit den drei wahrnehmbaren Linien 5876 Å (gelb), 5016 Å (grün) und 4471 Å (violett). Für jede Stellung eines beliebigen Prismas wurde  $\Delta$  von  $n'_x$ -gelb bis

zu  $n''_v$ -violett und wieder zurückkehrend von  $n''_v$ -violett nach  $n'_x$ -gelb gemessen. Die gewonnenen Winkel — im ganzen mindestens sechs für jede Spektrallinie — wurden gemittelt und als Durchschnittsgrößen in Tab. 15 aufgenommen<sup>1</sup>. Da bei gegebener Farbe die Lichtgeschwindigkeit für alle Prismen gleicher Orientierung konstant ist oder wenigstens konstant sein sollte, muß, wie sich aus der selbstverständlichen Beziehung  $q \sin(\Gamma + \Delta) = \sin \Gamma$  leicht zeigen läßt,  $\Delta$  mit wachsendem  $\Gamma$  zunehmen. Tab. 15 bezeugt das, von wenigen Ausnahmen abgesehen (z. B. L.-Nr. 19 und 21), geradezu glänzend. Doch dürfen kleine Unregelmäßigkeiten im Zuwachsverhältnis nicht übersehen werden.

### 3. Die Variation der Lichtgeschwindigkeit bei vorgegebener Richtung

Mit Rücksicht auf die späteren Berechnungen wurden nicht die einfachen Lichtgeschwindigkeiten, sondern deren Quadrate ermittelt. Nimmt  $\Delta$  bei festem  $\Gamma$  um eine Viertelsminute zu, so nimmt  $q^2$  im extremsten, bei Kupfervitriol noch möglichen Fall um etwa 6 Einheiten der fünften Dezimale ab. Daraus folgt, daß  $\Delta$  sehr genau sein muß, damit  $q^2$  auf einige Einheiten der fünften Dezimale richtig bekommen wird. Zur Verhütung weiterer Ungenauigkeiten, die sich bei den späteren Rechnungen durch Abrundungsfehler einschleichen könnten, wurden alle  $q^2$ -Werte auf sechs Dezimalen angegeben. Tab. 17, deren fortlaufende Numerierung mit der von Tab. 15 völlig übereinstimmt, enthält die ermittelten Werte. Um gewisse Vergleiche zu erleichtern, sind auch die K-Nummern aufgeführt. Für jede Fortpflanzungsrichtung wurde außerdem das arithmetische Mittel  $M$  der 6-10 zusammengehörigen  $q^2$ -Werte für alle Farben berechnet und in Tab. 17 ebenfalls vermerkt. Seine Abweichungen  $v$  von den einzelnen « Beobachtungsgrößen » können als Maß für die vielgestaltigen, bei der Einstellung, Ablesung usw. unterlaufenen Zufallsfehler gelten. Mit der Zunahme von  $v$  vermindert sich die Zuverlässigkeit der  $q^2$ -Durchschnitte. Darum wurde diesen der mittlere Fehler  $m_M$  in Einheiten

<sup>1</sup> In dieser Tabelle hat jede Messungsreihe ihre eigene, bereits in Tab. 12 genannte Laufnummer (L-Nr. 1-47). Die danebenstehende K-Zahl bezeichnet die Nr. des Kristalls, an welchem die Messung ausgeführt wurde. Kehrt K wieder, so bedeutet das, daß der betreffende Kristall zur Bestimmung der  $q$ -Werte für zwei, bzw. drei Richtungen diente.

Tab. 15. Prismenwinkel  $\Gamma$  und Ablenkungswinkel  $\Delta$  der verschiedenen Farben für senkrechte Inzidenz

I.-Nr	K	E : A	$\Gamma$	gelb <sub>1</sub>	gelb <sub>2</sub>	grün <sub>1</sub>	grün <sub>2</sub>	violett <sub>1</sub>	violett <sub>2</sub>
I									
1	15	001 : 0 $\bar{1}\bar{1}$	29°43,375'	18°59,958'	20°01,375'	19°13,188'	20°16,792'	19°26,208'	20°30,417'
2	18		44,219'	19°00,125'	20°01,667'	14,042'	17,500'	26,500'	31,833'
3	25		40,375'	18°57,083'	19°58,000'	10,625'	13,958'	23,333'	28,583'
4	27		29,563'	46,333'	46,792'	00,083'	02,042'	11,958'	16,000'
5	10		30,750'	47,542'	48,000'	01,375'	03,417'	13,625'	17,750'
6	1		41,438'	57,417'	58,667'	11,375'	14,375'	24,042'	28,396'
II									
7	15	011 : 00 $\bar{1}$	29°43,375'	19°26,000'	19°58,917'	19°40,875'	20°14,708'	19°53,750'	20°28,708'
8	17		40,250'	23,396'	56,333'	38,375'	11,833'	52,229'	26,875'
9	10		30,750'	13,375'	45,792'	27,750'	01,042'	40,875'	15,125'
10	1		41,438'	25,083'	58,042'	39,500'	13,458'	54,125'	28,083'
11	18		44,219'	27,438'	20°00,229'	42,167'	16,292'	55,813'	30,479'
12	28		58,113'	41,708'	20°14,917'	56,583'	30,938'	20°09,938'	45,479'
III									
13	20	011 : 02 $\bar{1}$	20°04,417'	11°30,896'	11°48,479'	11°38,583'	11°57,563'	11°45,750'	12°03,771'
14	34		19°50,425'	21,667'	38,750'	29,333'	46,604'	36,438'	11°53,750'
15	41		20°08,525'	33,833'	51,250'	41,375'	59,354'	48,500'	12°07,208'
16	35		20°02,125'	29,479'	46,771'	37,594'	55,146'	44,260'	12°02,844'
IV									
17	3	0 $\bar{1}\bar{1}$ : 00 $\bar{1}$	27°33,475'	16°58,740'	17°51,208'	17°10,781'	18°04,906'	19°22,114'	18°16,969'
18	29		44,375'	17°08,479'	18°01,583'	20,813'	15,646'	32,229'	28,333'
19	30		46,104'	10,188'	03,521'	22,583'	17,458'	34,146'	30,000'
20	31		43,625'	07,708'	00,917'	20,521'	15,208'	32,250'	28,000'
21	32		48,708'	12,313'	06,021'	24,792'	20,000'	36,271,	32,625'
22	33		46,325'	10,375'	03,229'	22,469'	17,396'	33,833'	29,417'



L-Nr.	K	E : A	$\Gamma$	gelb <sub>1</sub>	gelb <sub>2</sub>	grün <sub>1</sub>	grün <sub>2</sub>	violett <sub>1</sub>	violett <sub>2</sub>
V									
23	65	121 : 111	21°39,875'	12°35,750'	12°58,563'	12°44,125'	13°07,708'	12°52,000'	13°12,583'
24	56		48,375'	41,500'	13°04,938'	50,146'	14,063'	58,354'	22,479'
25	70		37,500'	34,135'	12°56,990'	42,458'	05,938'	50,563'	14,250'
26	71		36,208'	33,073'	56,042'	41,396'	04,938'	49,688'	13,063'
27	69		36,375'	33,375'	56,125'	41,708'	05,125'	50,083'	13,167'
VI									
28	77	021 : 011	20°01,125'	11°41,167'	11°47,396'	11°49,292'	11°55,708'	11°58,313'	12°03,813'
VII									
29	93	110 : 100	26°17,988'	16°15,750'	16°49,167'	16°27,833'	17°01,833'	16°39,375'	17°13,313'
30	91		14,800'	13,063'	46,125'	25,167'	16°58,792'	36,646'	10,438'
31	84		22,775'	19,646'	53,146'	31,708'	17°05,771'	43,042'	16,833'
32	78		16,700'	14,521'	47,875'	26,521'	00,396'	37,917'	11,521'
33	28		21,613'	18,958'	52,333'	30,917'	04,729'	42,229'	16,188'
34	67		15,625'	13,646'	46,938'	26,021'	16°59,583'	37,208'	10,333'
VIII									
35	93	100 : 110	26°17,988'	15°56,792'	16°50,479'	16°08,229'	17°03,083'	16°18,708'	17°14,604'
36	96		15,125'	54,063'	47,500'	05,521'	16°59,917'	16,375'	11,917'
37	80		14,775'	53,958'	47,271'	05,229'	59,833'	16,306'	11,479'
38	78		16,700'	54,583'	48,125'	06,063'	17°00,729'	16,375'	11,875'
39	28		21,613'	56,792'	50,750'	07,917'	17°03,042'	18,646'	15,063'
40	75		48,250'	32,146'	24,146'	15°43,104'	16°36,354'	15°53,958'	16°47,646'
IX									
41	53	120 : 110	22°37,125'	13°09,333'	13°47,958'	13°18,292'	13°57,958'	13°26,250'	14°06,917'
42	50		36,500'	09,042'	47,583'	17,875'	57,583'	26,417'	06,688'
43	92		38,625'	10,583'	49,250'	19,479'	59,313'	27,917'	08,688'
44	90		30,292'	04,438'	42,667'	13,313'	52,688'	22,229'	02,771'
45	86		31,900'	05,875'	44,271'	14,792'	54,188'	23,083'	03,813'
46	79		28,575'	02,896'	41,104'	11,708'	51,250'	19,979'	00,438'
X									
47	75	110 : 100	20°55,550'	20°11,688'	21°34,063'	20°27,167'	21°51,438'	20°42,063'	22°08,979'

der 6. Dezimale beigeschrieben. Die Kleinheit überrascht, denn der Fehler mancher Einzelmessung ist beträchtlich größer als  $3 m_M$ . Genauer als die Lichtgeschwindigkeit sollte nach allgemeiner Erfahrung die Doppelbrechung zu bestimmen sein. Das trifft denn auch zahlenmäßig nachweisbar zu. An Ausnahmen fehlt es indessen nicht. Zur Orientierung sind in Tab. 16 neben die  $m_M$ -Durchschnitte noch die Durchschnitte der mittleren Fehler von  $q_1^2 - q_2^2$  gesetzt. Und allen diesen Zahlen geht der Durchschnitt der mittleren Fehler  $m$  der Einzelmessungen<sup>1</sup> voran. Das starke Ansteigen gegen violett hin ist wegen der schwierigen Einstellbarkeit dieser Linien verständlich.

Tab. 16. Fehler der Geschwindigkeitsquadrate  
und ihrer Differenzen in Abhängigkeit von der Farbe

	gelb			grün			violett		
	$q_1^2$	$q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$	$q_1^2$	$q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$	$q_1^2$	$q_2^2$	$q_1^2 - q_2^2$
Einzelwerte	58	60	35	65	55	42	93	104	84
Endwerte	23	24	15	26	28	17	37	41	34

Auf Schärfe der Spektren und Anpassung ihrer Helligkeit an die Empfindlichkeit des Auges wurde streng geachtet. Bei den Prismen der Gruppen III, V und VI hatte das Licht einen verhältnismäßig langen Weg im Kristall zurückzulegen. Es wurde dadurch stärker als sonst absorbiert. Helligkeitsverminderung ergab sich aber auch bei geringer Ausdehnung der Eintrittsfläche, mochte diese nun von Natur aus klein gewesen sein oder wegen ihrer Unvollkommenheiten eine gewisse Bedeckung mit Tusche erfahren haben. In allen diesen Fällen zeigten vorab die gelben und violetten Linien eine spürbare Beeinträchtigung ihrer Einstellschärfe. Aber in den Resultaten lassen sich keine besonderen Abweichungen nachweisen. Das berechtigt zur Annahme, daß die Beschaffenheit der Spektrallinien keine überdurchschnittlichen Fehler veranlaßt habe.

Trotz aller Schwankungen, die Tab. 17 aufzeigt, liegen die  $q^2$ -Werte überraschend nahe an ihren Durchschnittszahlen. Keine 20 % der festgestellten Abweichungen beeinflussen die vierte Dezimale mit einer

<sup>1</sup> Berechnet nach der Formel  $m^2 = [vv] : (n - 1)$ . Dementsprechend ist  $m_M^2 = [mm] : n$ .

vollen Einheit oder gar mehr. Für gelbes und grünes Licht sind es sogar nur 12,8 bzw. 11,7 %, während für die violetten Linien naturgemäß ein größerer Anteil festgestellt wird, nämlich 35,1 %. Abgesehen vom Sonderfall der nicht in Rechnung gezogenen L-Nr. 38, 39, beträgt die größte Differenz nur 2,58 Einheiten der vierten Dezimale. Gleichwohl haben unter den 258 gemittelten Geschwindigkeitsquadraten 91 einen Fehler, der, wenn er zuweilen nicht allzu beträchtlich ist, doch die Größe  $3m$  des mittleren Fehlers einer Einzelbeobachtung überschreitet. Solche überdurchschnittliche Abweichungen sind aber nicht an gewisse Prismen gebunden, sondern finden sich regellos über alle Beobachtungsreihen zerstreut. Darum lassen sich nur zwei Prismen namhaft machen (L-Nr. 7, 31), bei denen die Abweichungen  $> m$  alle sechs Spektrallinien erfassen, und bloß drei (L-Nr. 9, 20, 46), wo sie sich über mindestens fünf Linien erstrecken. Im Mittel trifft es auf ein Prisma bloß 2,6  $q^2$ -Werte mit überdurchschnittlichem Fehler. Es ist darum wahrscheinlich, daß auch die größeren Schwankungen der Geschwindigkeitsquadrate zumeist bloßen Zufallscharakter haben. Aus dem Umstand aber, daß unterdurchschnittliche Fehler bei acht Prismen über alle Linien durchhalten und daß bei elf weiteren Prismen von den sechs Linien nur eine einzige einen überdurchschnittlichen Fehler ergab, darf auf eine erfreuliche Güte der Messungen geschlossen werden. Übrigens wurden an mehreren Prismen, die zu auffallenden Schwankungen der Resultate führen, die Messungen wiederholt, ohne daß sich aber Anlaß zu merklichen Korrekturen geboten hätte (L-Nr. 2, 6, 10, 38, 39).

Ein gegensätzliches Verhalten zeigen die zehn Prismen mit der Eintrittsebene 011. Sechs von ihnen (L-Nr. 7-12) haben  $00\bar{1}$ , vier (L-Nr. 13-16)  $02\bar{1}$  als Austrittsebene. Sie sollten alle die gleichen  $q^2$ -Werte ergeben. Nun sind aber die der ersten Gruppe im Durchschnitt um 1,2 Einheiten der vierten Dezimale größer als die der zweiten, wobei der Unterschied gegen kürzere Wellenlänge hin von 1,7 auf 0,8 abnimmt. L-Nr. 10 fällt aus dem Rahmen heraus und bildet gewissermaßen das Bindeglied zwischen den beiden Gruppen.

Geringfügig sind die Messungsfehler in den Prismenreihen IV, V und VII. Umso mehr überrascht es, daß im letzteren Fall J. Mäder an drei Kristallen Werte erhielt, die unter sich teilweise recht gut übereinstimmen, aber im Vergleich zu den neuen Werten um ca. 3,8 Einheiten der vierten Dezimale höher sind — ein Unterschied, wie

Tab. 17. Die Dezimalstellen der Lichtgeschwindigkeitsquadrate mit ihren Mittelwerten  $M$  und deren zugehörigen mittleren Fehlern  $m_M$

L-Nr.	K	E : A	$q_1^2$ -gelb	$q_2^2$ -gelb	$q_1^2$ -grün	$q_2^2$ -grün	$q_1^2$ -violett	$q_2^2$ -violett	
I	1	15	001 : 0 $\bar{1}\bar{1}$	435254	422050	432334	418871	429502	416106
	2	18		379	178	336	916	628	6010
	3	25		230	086	232	784	459	5867
	4	27		247	035	165	837	540	5957
	5	10		238	043	141	816	438	5864
	6	1		391	183	303	935	541	6082
	M			435290	422096	432252	418860	429518	415981
$m_M$			30	28	35	24	28	42	
II	7	15	011 : 00 $\bar{1}$	429547	422561	426359	419297	423641	416450
	8	17		417	406	198	193	266	125
	9	10		493	510	366	310	553	401
	10	1		315	313	222	123	132	145
	11	18		425	477	274	163	399	283
	12	28		446	526	316	275	548	372
III	13	20	011 : 02 $\bar{1}$	345	302	241	131	382	334
	14	34		225	277	083	147	207	332
	15	41		293	348	262	181	432	150
	16	35		285	342	004	046	339	057
	M			429379	422406	426233	419187	423390	416265
$m_M$			32	33	36	27	51	43	
IV	17	3	0 $\bar{1}\bar{1}$ : 00 $\bar{1}$	435114	422021	432074	418732	429182	415878
	18	29		107	2016	1994	681	9153	718
	19	30		062	1943	1940	646	9068	723
	20	31		129	2000	1893	609	8973	621
	21	32		115	1941	1980	643	9137	710
	22	33		064	2063	2019	712	9196	908
	M			435099	421997	431983	418671	429118	415760
$m_M$			12	19	26	19	34	45	
V	23	65	$\bar{1}21$ : $1\bar{1}\bar{1}$	430042	421802	426985	418575	424144	415831
	24	56		165	774	7037	585	102	680
	25	70		012	737	6966	573	036	670
	26	71		064	735	7010	585	011	742
	27	69		095	848	7042	661	011	849
	M			430076	421779	427008	418596	424061	415754
$m_M$			26	21	15	16	27	37	
VI	28	77	021 : 0 $\bar{1}\bar{1}$	424293	421816	421067	418549	417533	415405
VII	29	93	110 : $1\bar{0}0$	429086	420184	425825	416903	422755	413971
	30	91		074	235	797	6941	733	3956

L-Nr.	K	E : A	q <sub>1</sub> <sup>2</sup> -gelb	q <sub>2</sub> <sup>2</sup> -gelb	q <sub>1</sub> <sup>2</sup> -grün	q <sub>2</sub> <sup>2</sup> -grün	q <sub>1</sub> <sup>2</sup> -violett	q <sub>2</sub> <sup>2</sup> -violett	
	31	84	110 : $\bar{1}00$	429146	420265	425907	417010	422906	414198
	32	78		120	221	877	6972	840	4125
	33	28		061	205	847	7006	849	4090
	34	67		108	215	760	6930	757	4176
	M			429099	420221	425836	416960	422807	414086
	m <sub>M</sub>			13	11	22	18	28	42
VIII	35	93	100 : $\bar{1}\bar{1}0$	434300	419842	431140	416581	428283	413644
	36	96		4393	19951	1216	6727	8248	3656
	37	80		4340	19929	1215	6666	8185	3686
	38*	78		4615	20155	1435	6886	8419	4035
	39*	28		5144	20617	2070	7439	9146	4375
	40	75		4302	19839	1176	6576	8122	3600
	M			434334	419890	431187	416638	428210	413647
	m <sub>M</sub>			22	29	18	36	36	18
IX	41	53	$1\bar{2}0 : \bar{1}10$	432817	419681	429706	416394	426975	413489
	42	50		760	645	691	357	759	403
	43	92		763	636	679	335	790	301
	44	90		789	693	685	375	606	083
	45	86		695	570	583	294	724	157
	46	79		893	775	804	408	940	401
	M			432786	419667	429691	416361	426799	413306
	m <sub>M</sub>			27	28	29	17	56	64
X	47	75	$1\bar{1}0 : \bar{1}00$	435835	419707	432696	416665	429724	413282

er, von L-Nr. 38, 39 abgesehen, am jetzigen Beobachtungsmaterial überhaupt nie gefunden wurde. Interessanterweise stimmt aber das Mittel von L-Nr. 7-16 für gelb mit den Weberschen Messungen bis auf 3 bzw. 5 Einheiten der sechsten Dezimale überein.

Ganz absonderlich verhält sich die Gruppe VIII. Vier Prismen lieferten gut übereinstimmende Werte, die beiden andern aber (L-Nr. 38, 39) sehr stark abweichende. Der Unterschied gegenüber dem jeweils kleinsten q<sup>2</sup>-Wert beträgt durchschnittlich 3,28 bzw. 8,69 Einheiten der vierten Dezimale. Obgleich Nachmessungen die abnormen Zahlen bestätigten, erschien es nicht statthaft, die Resultate aller Prismen dieser Gruppe einfach zu mitteln. Darum wurden L-Nr. 38, 39 kurzweg außer acht gelassen und durch einen Stern gekennzeichnet. Ob zu Recht? J. MÄDER hat für die gleiche Fortpflanzungsrichtung an zwei Kristallen Werte erhalten, die im Mittel noch um 1,5 Einheiten der vierten Dezimale höher liegen als die der Zahlenreihe L-Nr. 38. Mäders Werte fallen also zwischen L-Nr. 38 und L-Nr. 39.

Aufschlußreich sind die  $q^2$ -Schwankungen der Prismen mit vertauschten Ein- und Austrittsebenen. L-Nr. 40, 47 (K 47) fallen außer Diskussion, weil keine Kristalle gewonnen werden konnten, die zu L-Nr. 47 Vergleichszahlen geliefert hätten. Von den übrigen Kristallen zeigen Spektrallinien, für die in der einen Orientierung überdurchschnittliche  $q^2$ -Fehler erhalten werden, in der anderen Stellung vorzugsweise kleine bis mittlere Abweichungen (L-Nr. 6, 10 und 29, 35). Sind in L-Nr. 7 die Geschwindigkeitsquadrate durchwegs mit sehr großen Abweichungen behaftet, so ergibt L-Nr. 1, mit Ausnahme der stärkst abgelenkten Welle, recht geringe Differenzen. Ähnlich, wenn auch weniger regelmäßig, ist das Verhalten von L-Nr. 5, 9, während dem unruhigen Fehlerverlauf des Prismas L-Nr. 2 erstaunlicherweise die ideale Brechung von L-Nr. 11 gegenübersteht. Noch idealer ist L-Nr. 32 als Gegenstück der ausgeschlossenen Orientierung L-Nr. 38. Dem singulären Prisma L-Nr. 39 sind L-Nr. 12, 33 zugeordnet. Beide Prismen verzeigen zwar zwei überdurchschnittliche Fehler. Für das erstere bewegen sie sich einigermaßen um den Mittelwert der ganzen Gruppe, beim zweiten macht sogar die Höchstdifferenz nur 46 Einheiten der letzten Dezimale aus. So bestätigt sich an L-Nr. 33, 39 von neuem (vgl. L-Nr. 2, 11), daß bei vertauschten Rollen der Flächen eines Prismas ein Wechsel von reichlich fehlerhaften  $q^2$ -Bestimmungen zu sehr zuverlässigen möglich sein kann.

Abschließend läßt sich sagen, daß die Variation, der  $q^2$  für eine gegebene Richtung von Kristall zu Kristall unterliegt, sich ziemlich restlos durch mancherlei Messungszufälligkeiten erklärt. Wegen der Vizinalflächen, welche für den Kupfervitriol charakteristisch sind, werden überhaupt nicht streng übereinstimmende Richtungen miteinander verglichen. Und daß schon kleine Richtungsänderungen die Geschwindigkeitsquadrate merklich zu beeinflussen vermögen, folgt aus der Tatsache, daß es in der zu  $n_\beta$  senkrechten Ebene Richtungen gibt, wo eine Änderung von einem halben Grad — bei der Neigung des Kupfervitriols zu Vizinalen oft erfüllt —  $q^2$  um mehr als eine Einheit der vierten Dezimale größer oder kleiner macht. Da die Vizinalen selber eine gewisse Wölbung der Kristallflächen verursachen, kann auch der Prismenwinkel von Stelle zu Stelle etwas variieren. Mäßer maß an ausgezeichneten Flächen Unterschiede von nahezu einer Minute ! Des weiteren ist zu beachten, daß bei dickern Kristallen, sobald das Fernrohr nicht streng auf unendlich eingestellt ist, wegen

des nichtparallelen Strahlenganges merkliche Messungsfehler unterlaufen. Überkreuzen sich die Spektren oder kommen sich die Linien sonstwie nahe, so sind scharfe Einstellungen erschwert, selbst wenn das eine Liniensystem mit vorgehaltenem Nicol ausgelöscht wird. Schließlich sollten auch Kontrastwirkungen nie unterschätzt werden. Von der Prismengruppe VIII abgesehen, dürften sich auf diese Weise alle Fehler und Besonderheiten verstehen lassen, ohne daß stoffliche Verschiedenheiten (wechselnder Wassergehalt, Beimengung der Lösungsgenossen usw.) anzunehmen wären.

Selbst die ungewöhnlichen Differenzen in der Prismengruppe VIII und die beträchtlichen Abweichungen gegenüber den Mäderschen Messungen für die Inzidenzen senkrecht zu 110 und 100 können aus der Vizinalenbildung verstanden werden. Die Kristalle, an denen die vorliegenden Messungen ausgeführt wurden, entstammen ja ganz anderen Lösungsbedingungen als die Mäderschen. Der Winkel 110 : 100 weicht am neuen Material um mehrere Minuten von jenem ab, den MÄDER festgestellt hat. Das deutet darauf hin, daß je nach den Kristallisationsbedingungen andere Vizinalen ausgebildet werden, sodaß also gar nicht die gleichen Fortpflanzungsrichtungen untersucht wurden. Da es aber unmöglich ist zu sagen, welche Vizinale die richtige 110- oder 100-Fläche ist, besteht auch kein Grund, das eine oder das andere Meßresultat als richtiger zu bezeichnen. Jedenfalls legen die in der Mäderschen und vorliegenden Arbeit festgestellten großen Schwankungen in den Lichtgeschwindigkeiten gleicher Richtungen den Schluß nahe, daß deren Ursache nicht in rein subjektiven Meßfehlern begründet sei.

#### **4. Berechnung der Polarisationskonstanten**

Obwohl die optischen Konstanten des Kupfervitriols schon verschiedentlich bestimmt wurden, scheint es trotzdem von Interesse zu sein, nochmals darauf zurückzukommen. Denn als Durchschnittsergebnisse mehrerer Prismen verbürgen die  $q^2$ -Werte der Tab. 17 eine innere Sicherheit, die bisher wohl kaum je erreicht worden ist. Überdies werden die für alle Farben sich gleichbleibenden Fortpflanzungsrichtungen des Lichtes die Rechnungen wesentlich vereinfachen.

Dem Verfahren, das sich weitgehend auf Mäders Arbeit stützt, wird ein gewöhnliches Rechtssystem zugrunde gelegt, dessen

x-Achse die Außennormale der 110-Fläche ist, während die y-Achse in 110 selber liegt und nach rechts zeigt und die z-Achse mit der positiven c-Achse des Kristalls zusammenfällt.

Aus der Indikatrixgleichung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 1 \quad (1)$$

folgen die beiden Ausdrücke :

$$\begin{aligned} q_1^2 + q_2^2 &= L_{11}\psi_1^2 + L_{22}\psi_2^2 + L_{33}\psi_3^2 + 2L_{12}\psi_1\psi_2 + 2L_{23}\psi_2\psi_3 + 2L_{31}\psi_3\psi_1 \\ q_1^2 q_2^2 &= P_{11}\psi_1^2 + P_{22}\psi_2^2 + P_{33}\psi_3^2 + 2P_{12}\psi_1\psi_2 + 2P_{23}\psi_2\psi_3 + 2P_{31}\psi_3\psi_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Darin werden durch  $\psi_i$  die Richtungscosinus der Wellennormalenrichtungen bezeichnet. Da sie mit Senkrechten zu Wachstumsflächen

Tab. 18. *Quadrate und Produkte der Richtungscosinus des Lichtweges durch die Prismen*

Inzid.	$\psi_1^2$	$\psi_2^2$	$\psi_3^2$	$\psi_1\psi_2$	$\psi_2\psi_3$	$\psi_3\psi_1$
I 001	0,035135	0,057232	0,907633	0,044842	0,227917	0,178576
II 011	0,218913	0,031387	0,749700	0,082892	0,153399	0,405116
III 011	0,218913	0,031387	0,749700	0,082892	0,153399	0,405116
IV 011	0,014162	0,328354	0,657486	0,068191	0,464638	0,096493
V 121	0,000943	0,554703	0,444355	0,022868	0,496473	0,020467
VII 110	1,000000	—	—	—	—	—
VIII 100	0,806224	0,193776	—	0,395256	—	—
IX 120	0,032381	0,967619	—	0,177009	—	—
X 110	0,294243	0,705757	—	0,455702	—	—

des Kupfervitriols identisch sind, lassen sie sich aus den Barkerschen Werten leicht berechnen (Tab. 18).  $L_{ik}$  und  $P_{ik}$  sind einfache Funktionen der Polarisationskonstanten, nämlich

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_{22} + a_{33} & L_{22} &= a_{33} + a_{11} & L_{33} &= a_{11} + a_{22} \\ L_{12} &= -a_{12} & L_{23} &= -a_{23} & L_{31} &= -a_{31} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_{11} &= a_{22}a_{33} - a_{23}^2 & P_{22} &= a_{33}a_{11} - a_{31}^2 & P_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \\ P_{12} &= a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33} & P_{23} &= a_{31}a_{12} - a_{23}a_{11} & P_{31} &= a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

MÄDER hat dafür Werte bekommen, die den neuen Messungen nicht mehr voll entsprechen (Tab. 19), aber als gute Näherungswerte zweifelsohne genügen. An jeder Konstante  $a_{ik}$  ist die kleine Verbesserung  $\alpha_{ik}$  anzubringen. Sind  $v_1$  und  $v_2$  die zugehörigen, ebenfalls kleinen Ände-



rungen von  $q_1^2$  und  $q_2^2$ , so ergibt sich nach Linearmachung des zweiten Ausdrucks (2) das Gleichungssystem :

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= A_{11}\alpha_{11} + A_{22}\alpha_{22} + \dots + A_{31}\alpha_{31} + A \\ q_2^2 v_1 + q_1^2 v_2 &= B_{11}\alpha_{11} + B_{22}\alpha_{22} + \dots + B_{31}\alpha_{31} + B \end{aligned}$$

Die Auflösung nach  $v_1$  und  $v_2$  liefert die Fehlergleichungen :

$$\begin{aligned} v_1 &= C_{11}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + \dots + C_{31}\alpha_{31} + C \\ v_2 &= D_{11}\alpha_{11} + D_{22}\alpha_{22} + \dots + D_{31}\alpha_{31} + D \end{aligned}$$

Solcher Gleichungspaare, deren Koeffizienten zu  $q_1^2 - q_2^2$  umgekehrt proportional sind, gibt es acht. Die sechs  $\alpha_{ik}$ , die aus ihnen derart zu bestimmen sind, daß  $[vv]$  ein Minimum wird, verändern die Mäderschen  $a_{ik}$  nicht für alle Farben in gleicher Weise, sondern für gelb am schwächsten und für grün am stärksten (bis 6 Einheiten der

Tab. 19. Die Polarisationskonstanten

I. MÄDER, II. korrigiert

	$a_{11}$	$a_{22}$	$a_{33}$	$a_{12}$	$a_{23}$	$a_{31}$
I gelb	0,4296232	0,4287565	0,4208554	0,0060283	0,0019776	0,0034111
grün	0,4269575	0,4258932	0,4175649	0,0060311	0,0017731	0,0032985
violett	0,4239222	0,4228282	0,4146782	0,0061576	0,0017802	0,0033494
II gelb	0,4294067	0,4286219	0,4207634	0,0060661	0,0020556	0,0033607
grün	0,4263503	0,4253587	0,4175118	0,0061712	0,0020180	0,0034002
violett	0,4235060	0,4225256	0,4143877	0,0061137	0,0018497	0,0034786

4. Dezimale). Die Kleinheit der  $\alpha_{ik}$  ist Gewähr dafür, daß sie vom wahrscheinlichen Fehler der Differenz  $q_1^2 - q_2^2$  nicht allzu störend beeinflußt werden.

Die verbesserten  $a_{ik}$  sind in Tab. 19 als Gruppe II den Mäderschen Werten gegenübergestellt. Die Verbesserungen  $\alpha_{ik}$ , welche in der Tabelle nicht vermerkt sind, ergeben sich als Differenzen entsprechender Werte von II und I.

### 5. Die Hauptachsen der Indikatrix

Sind die Polarisationskonstanten  $a_{ik}$  gefunden, so macht die Berechnung der Achsenlängen und Achsenlagen wohl noch einige Mühe, aber keine besonderen Schwierigkeiten. Bekanntlich sind die Hauptachsen eines Ellipsoides jene drei nicht komplanaren Halbmesser,

welche auf der zugehörigen Tangentialebene senkrecht stehen. Danach sind im Achsenendpunkt die partiellen Ableitungen der Gleichung (1) den Koordinaten  $x, y, z$  des Berührungspunktes proportional. Unter der Voraussetzung, daß  $M$  der Proportionalitätsfaktor sei, wird also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - M)x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{12}x + (a_{22} - M)y + a_{23}z &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + (a_{33} - M)z &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

erhalten. Seine Lösung ist nur möglich, wenn die dreigliedrige Determinante verschwindet. Somit wird

$$\begin{vmatrix} a_{11} - M & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - M & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - M \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Zur Auswertung von (4) wurden die neuen  $a_{ik}$  der Tab. 19 auf sechs Dezimalen gekürzt, die Rechnung aber mit voller Stellenzahl ausgeführt. Die Koeffizienten von  $M^n$  umfassen demnach  $18 - 6n$  Dezimalen. Durch sukzessive Annäherung lassen sich die Wurzeln  $M$ , welche die Quadrate der gesuchten Hauptlichtgeschwindigkeiten sind, mit beliebiger Genauigkeit finden. Bei Berechnung auf 8 Dezimalen erhält (4) einen Wert, dessen zwölf ersten Dezimalen null sind. Auf sechs Stellen abgerundet sind  $a^2, b^2, c^2$  samt den Brechungsindizes und den zugehörigen Differenzen in Tab. 20 zusammengestellt.

Ein Vergleich dieser Zahlen mit den von andern Autoren ermittelten läßt sich nur für gelbes Licht mit einiger Zuverlässigkeit durchführen.

*Tab. 20. Die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten und die Hauptbrechungsindizes samt ihren Differenzen*

	gelb		grün		violett
$a^2$	0,436069	3055	0,433014	2935	0,430079
$a^2 - b^2$	12956		13161		12944
$b^2$	0,423113	3260	0,419853	2718	0,417135
$b^2 - c^2$	3503		3499		3930
$c^2$	0,419610	3256	0,416354	3149	0,413205
$n_\alpha$	1,51434	533	1,51967	518	1,52485
$n_\beta - n_\alpha$	2301		2363		2347
$n_\beta$	1,53735	595	1,54330	502	1,54832
$n_\gamma - n_\beta$	640		648		735
$n_\gamma$	1,54375	603	1,54978	589	1,55567

Sofort zeigt sich, daß die neuen Zahlen nicht über das bisherige Schwankungsintervall hinausgehen. Gegenüber Mäder weisen sie eine Vergrößerung der fünften Dezimale um durchschnittlich 27 Einheiten auf. Verglichen mit den Daten von LAVENIR und KOHLRAUSCH sind sie um 38, bzw. 49 zu hoch. Dafür bilden  $n_x$  und  $n_y$  fast genau das Mittel der Zahlen von MÄDER und SCHWIETRING. Leider ist für  $n_y$  der Vergleich nicht mehr möglich, weil sich der entsprechende Wert Schwietrings dem Mäderschen gegenüber merkwürdig verkleinert. Wie Dispersion und Doppelbrechung verraten, unterscheiden sich die neuen Brechungsindizes von den Mäderschen, die für nicht gelbes Licht allein in Betracht fallen, am auffälligsten für  $n_\beta$ -grün. Dafür scheinen sie für violette Licht, trotz der schwierigeren Einstellung, besser herausgekommen zu sein. Sie sind aber wesentlich höher als die Mäderschen. Die Unregelmäßigkeit von  $n_\beta$ -grün spiegelt sich auch im Achsenwinkel. Es ist :

	gelb	grün	violett
2V	54°56' (56°14')	54°35' (58°52')	57°44' (57°04')

Mäders Werte sind zum Vergleich in Klammer beige setzt. Die mittlere Differenz beträgt 1°38.

Ist M gefunden, so lassen sich mit Hilfe von  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  aus (3) die Richtungscosinus der Hauptachsenrichtungen sehr einfach berechnen. Tab. 21 gibt über die gewonnenen Winkel hinreichenden

*Tab. 21. Orientierung der Indikatrixhauptachsen*

		x	y	z
gelb	$n_x$	44°09,45'	49°18,05'	75°48,67'
	$n_\beta$	52°02,40'	139°18,00'	77°29,75'
	$n_y$	109°05,20'	89°44,33'	19°05,33'
grün	$n_x$	43°42,05'	49°41,80'	75°57,00'
	$n_\beta$	52°38,00'	139°41,05'	77°02,63'
	$n_y$	109°16,63'	89°09,33'	19°17,83'
violett	$n_x$	43°27,20'	49°47,30'	76°17,60'
	$n_\beta$	53°13,63'	139°42,90'	75°51,40'
	$n_y$	109°47,50'	87°58,00'	19°54,20'
Mittel	$n_x$	43°46,23'	49°35,70'	76°01,01'
	$n_\beta$	52°38,08'	139°33,98'	76°47,84'
	$n_y$	109°23,11'	88°57,22'	19°25,77'

Aufschluß<sup>1</sup>. Die Schwankungen von einer Farbe zur andern sind nicht nur gering, sondern auch ziemlich regellos, so daß die Mittelwertbildung naheliegt und der Wirklichkeit wohl besser entspricht. Gegenüber den Mäderschen Mittelwerten sind die Unterschiede auffallend gering, nur 15-20'.

## ZUSAMMENFASSUNG

1. Kristallisationsversuche mit Kupfervitriol aus reiner Lösung und aus Lösungen, die mit NaCl oder KNO<sub>3</sub> in verschiedenen Mengen versetzt waren, ergaben nicht nur völlig neue Kombinationen, sondern vor allem eine große Verschiedenheit des Habitus.

2. Die Messung der Zentraldistanzen und Größe der wichtigsten Kristallflächen erlaubte eine genaue Habitusbeschreibung.

3. Der neugefundene, nach der Basis tafelige Typus ermöglichte erstmals optische Messungen in bisher nie untersuchten Richtungen. Das gilt insbesondere für Prismen, deren brechende Kante der a-Achse parallel ist.

4. An gewissen Kristallen erreichen die Flächen  $1\bar{1}0$  und  $1\bar{2}0$  eine solche Größe, daß Messungen in einem Intervall, das J. MÄDER unzugänglich war, sich nunmehr durchführen ließen.

5. Die Hauptbrechungsindizes, die auf Grund weniger Lichtgeschwindigkeiten mit für alle Farben gleicher Fortpflanzungsrichtung ermittelt wurden, sind zwar wegen der Doppelbrechungsfehler mit einigen Mängeln behaftet, ordnen sich aber gut den von andern Autoren gefundenen Werten ein.

---

<sup>1</sup> Die drei Achsenrichtungen sind nicht als Rechtssystem orientiert, sondern so, daß sie auf der obern Projektionshalbkugel ausstechen. Um ein Rechtssystem zu erhalten, müßten z. B. für  $n_\beta$  überall die Supplementwinkel eingesetzt werden.