Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 49 (1959)

Artikel: Zur Grundlage der Elektrodynamik

Autor: Hotz, P. Siegfried

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-308374

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Grundlage der Elektrodynamik

von P. Siegfried Hotz

INHALTSVERZEICHNIS

1. Problem und Programm 167
2. Das Feld der gleichförmig bewegten Elementarladung 170
3. Das Feld der beliebig bewegten Elementarladung 177
4. Das Feld mehrerer Elementarladungen 183
5. Das magnetische Feld und die Maxwellschen Gleichungen 186
Summary 190

1. Problem und Programm

Allgemein werden der deduktiven Darstellungsart der klassischen Elektrodynamik die vier Maxwellschen Gleichungen zugrunde gelegt, deren Feldgrößen in der Relativitätstheorie die formale Einheit des vierdimensionalen elektromagnetischen Feldtensors bilden. Die relativistischen Transformationsformeln für den elektrischen Anteil dieses Tensors lauten im Vakuum und in dreidimensionaler Schreibweise:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x\,, \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(E_y - \beta\, H_z)\,, \\ E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(E_z + \beta\, H_y)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Zu diesem Gleichungssystem bemerkt Einstein in seiner grundlegenden Arbeit [1]: «Ist ein punktförmiger elektrischer Einheitspol in einem elektromagnetischen Felde bewegt, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich der an dem Orte des Einheitspoles vorhandenen elektrischen Kraft ($\vec{E}'$), welche man durch Transformation des Feldes auf ein relativ zum

[1] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Physik **17**, 910, 1905. Die in Klammern stehenden Ausdrücke sind im Originaltext nicht vorhanden.

elektrischen Einheitspol ruhendes Koordinatensystem erhält ». « Man sieht, daß in der entwickelten Theorie die elektromotorische Kraft $\left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}\right)$ nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, welcher seine Einführung dem Umstande verdankt, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte keine von dem Bewegungszustande des Koordinatensystems unabhängige Existenz besitzen. » Da diese Hilfskraft im Ruhesystem der Einheitsladung verschwindet, und da in ihm nur die Coulombsche Feldstärke wirkt, liegt der Gedanke nahe, als Grundgesetz der gesamten Elektrizitätslehre die Kraftgleichung zwischen ruhenden Ladungen anzunehmen. Alle elektrischen Ladungen sind aber ganzzahlige Vielfache der Elementarladung. Dieser Tatsache schenken wir von Anfang an die gebührende Beachtung, wenn wir die vorerst als punktförmig betrachtete und im Vakuum sich befindende Elementarladung als Quelle des elektrischen Feldes einführen.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß die einzige Ursache der sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzenden elektrischen Wirkungen die lorentzinvariante Elementarladung mit ihrem Coulombschen Felde ist, und daß sich die Gesetze der Elektrodynamik mit Einschluß der Maxwellschen Gleichungen aus dieser physikalischen Gegebenheit mit Hilfe der Lorentz-Transformation der Relativitätstheorie ableiten lassen.

Ruht die Elementarladung e bezüglich des Beobachters, befinden wir uns also in ihrem Ruhesystem, das immer als gestrichenes System bezeichnet wird, so besitzt ihr elektrostatisches Feld nach dem Coulombschen Gesetz die *Feldstärke*

$$\vec{E}' = \frac{e}{r'^3}\,\vec{r}' \,. \tag{2a}$$

Daraus folgt das *skalare Potential*

$$\varphi' = \frac{e}{r'} \,. \tag{2b}$$

Die Aequipotentialflächen sind konzentrisch um die Elementarladung gelegte Kugelflächen mit dem Radius

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \,.$$

Um das Feld der bewegten Elementarladung behandeln zu können, wollen wir die *Transformationsformeln für Kräfte* aus rein mechanischen Überlegungen ableiten. Man erhält z. B. mit Hilfe des Tolmanschen Gedankenexperimentes [1] die relativistische Kraftgleichung

[1] G. Joos: Lehrbuch der theoretischen Physik 1942, S. 224 f.

$$\vec{K} = \frac{d\, m\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Es sei $\vec{K}'$ die Kraft im Ruhesystem des Probekörpers, der im folgenden immer die elektrische Einheitsladung sein wird, und τ seine Eigenzeit, für welche die Transformationsgleichung

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}\, dt$$

gilt. Für den uns interessierenden Fall, daß die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ parallel zur positiven x-Achse liegt, ist infolge des Additionstheorems der Geschwindigkeiten

$$v + dv_x = \frac{dv'_x + v}{1 + \frac{v\, dv'_x}{c^2}} = (1-\beta^2)\, dv'_x + v ,$$

also

$$dv_x = (1-\beta^2)\, dv'_x .$$

Die Transformationsgleichung für die x-Komponente der Kraft lautet daher :

$$K_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}^3} \frac{dv_x}{dt} = m_0 \frac{dv'_x}{d\tau} = K'_x .$$

Längs der x-Achse wirkt also auf den Probekörper im bewegten System die gleiche Kraft wie im Ruhesystem.

Bei der Transformation von dv'_y auf das ungestrichene System gilt als Folge des Additionstheorems der Geschwindigkeiten die Formel

$$dv_y = \frac{dv'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v\, dv'_x}{c^2}} = \sqrt{1-\beta^2}\, dv'_y .$$

Für die y-Komponente der Kraft finden wir somit die Transformationsgleichung

$$K_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv_y}{dt} = m_0 \sqrt{1-\beta^2} \frac{dv'_y}{d\tau} = \sqrt{1-\beta^2}\, K'_y .$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$K_z = \sqrt{1-\beta^2}\, K'_z .$$

Es ergibt sich also die Kraft $\vec{K}$, die in einem Koordinatensystem gemessen wird, gegen das sich der Probekörper mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ längs der x-Achse bewegt, aus der im Ruhesystem wirkenden Kraft $\vec{K}'$ auf Grund der Formeln

$$K_x = K'_x ; \quad K_y = \sqrt{1-\beta^2}\, K'_y ; \quad K_z = \sqrt{1-\beta^2}\, K'_z . \tag{3}$$

Das Relativitätsprinzip fordert, daß dieses Transformationsgesetz für alle Kräfte gilt, gleich welcher Herkunft sie sind. Es ist daher auch auf die elektrischen Kräfte und deshalb auch auf die elektrische Feldstärke anwendbar, die sich durch Division der elektrischen Kraft mit der lorentz-invarianten elektrischen Ladung ergibt.

2. Das Feld der gleichförmig bewegten Elementarladung

a) Das Coulombsche Feld

Die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie führen auf die *Lorentz-Kontraktion*, nach der sich die Abmessungen eines bezüglich des Beobachters bewegten Systems in der zur Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ parallelen Richtung um den Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} \text{ verkürzen.}$$

Die kugelsymmetrischen *Aequipotentialflächen* der ruhenden Ladung werden durch die Relativbewegung zu Flächen eines Rotationsellipsoides mit einer in der Bewegungsrichtung liegenden verkürzten Hauptachse abgeplattet (Fig. 1). Diese Flächen bleiben Aequipotentialflächen für Ladungen, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die felderzeugende Ladung bewegen, da sich ja die Ladungen auf einer bewegten geladenen Metallkugel nicht verschieben. Wenn wir die x-Achse unseres Bezugssystems in die Richtung der Relativgeschwindigkeit legen, und wenn r' der Radius einer Potentialfläche im Ruhesystem der Ladung ist, so hat die Fläche des entsprechenden Rotationsellipsoides die auf den Koordinatenachsen liegenden Hauptachsen

$$s = r' \sqrt{1 - \beta^2} \; ; \; r' \; ; \; r' \; . \tag{4}$$

Die Fläche selbst, die wir s-Fläche nennen wollen, gehorcht der Gleichung

$$\frac{x^2}{r'^2 (1 - \beta^2)} + \frac{y^2}{r'^2} + \frac{z^2}{r'^2} = 1 \; , \tag{5a}$$

oder

$$x^2 + (1 - \beta^2) \; (y^2 + z^2) = s^2 \; . \tag{5b}$$

Die Verteilung der *Coulombschen Feldlinien* einer bewegten Elementarladung bleibt im ungestrichenen System infolge der Lorentz-Kontraktion nicht mehr kugelsymmetrisch. Die Feldlinien bewahren zwar die radiale Richtung, aber ihre Dichte nimmt gegen die zur

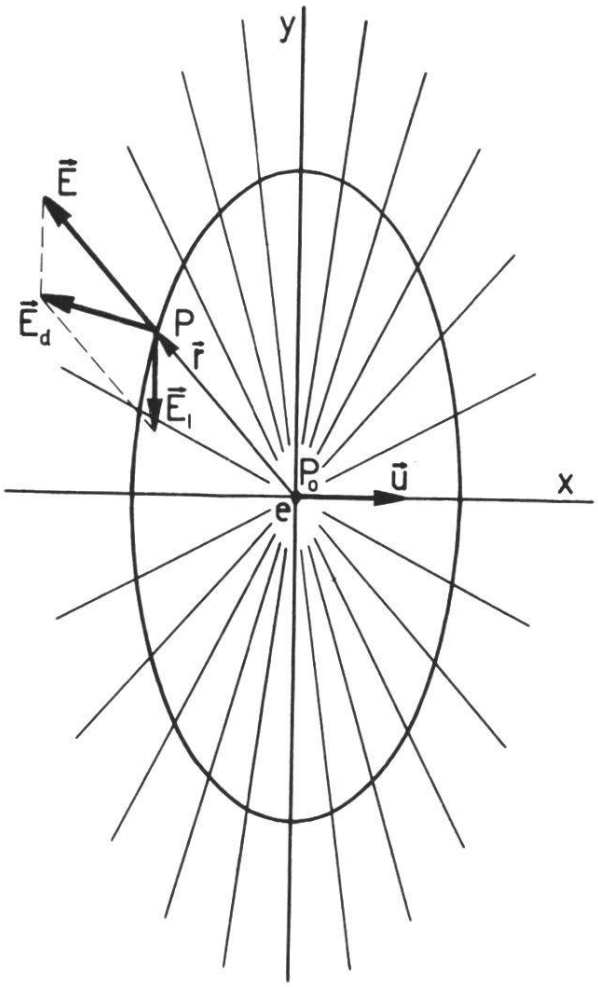

Fig. 1

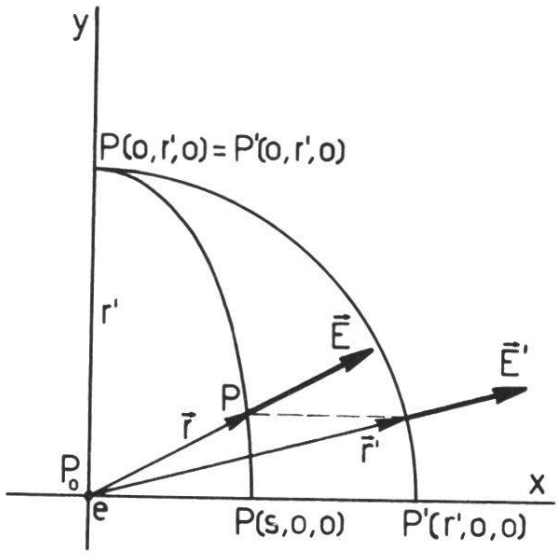

Fig. 2

Lorentz-Kontraktion des Coulombschen Feldes einer gleichförmig bewegten Elementarladung.

Bewegungsrichtung senkrechten Aequatorebene hin zu (Fig. 1). Doch verändert sich dabei ihre Anzahl $4\pi e$ nicht. Das folgt aus der Invarianz der Elementarladung und des von ihr erzeugten Kraftflusses $4\pi e$ gegenüber Lorentz-Transformation. Daher bleibt auch im Falle der bewegten Elementarladung die Dichte der Feldlinien ein Maß für die Coulombsche Feldstärke.

Da die Coulombschen Feldlinien und daher auch die *Coulombsche Feldstärke* im ungestrichenen System die radiale Richtung beibehalten, so gilt im Punkte P (x, y, z)

$$E_x : E_y : E_z = x : y : z ,$$

oder

$$E_x = k\,x ; \; E_y = k\,y ; \; E_z = k\,z ,$$

wenn sich die Elementarladung im Punkte P (o, o, o) befindet. Zur Bestimmung der Konstante k für die Punkte einer s-Fläche genügt es, ihren Wert für einen dieser Punkte zu finden. Aus Fig. 2 ergibt sich, daß die Coulombsche Feldstärke in P (s, o, o) des ungestrichenen

Systems gleich derjenigen im entsprechenden Punkt P′ (r′, o, o) des Ruhesystems ist, da ja in beiden Punkten dieselbe Feldliniendichte herrscht. Es ist also

$$E\,(s, o, o) = E'\,(r', o, o)\,.$$

Nun aber gilt

$$E'\,(r', o, o) = \frac{e}{r'^2}$$

und laut Lorentz-Kontraktion

$$s^2 = (1 - \beta^2)\, r'^2\,.$$

Daher erhalten wir

$$E\,(s, o, o) = (1 - \beta^2)\,\frac{e}{s^2} = (1\text{-}\beta^2)\,\frac{e}{s^3}\,s$$

oder, da im Punkte P (s, o, o) $s = x$ ist,

$$E\,(x, o, o) = (1 - \beta^2)\,\frac{e}{s^3}\,x$$

und

$$k = (1 - \beta^2)\,\frac{e}{s^3}\,.$$

Deshalb lautet die Coulombsche Feldstärke, d. h. die auf eine ruhende Einheitsladung wirkende elektrische Kraft, in den Punkten einer s-Fläche (cf. Fig. 2)

$$\vec{E} = (1 - \beta^2)\,\frac{e}{s^3}\,\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{e}{r'^3}\,\vec{r}\,. \tag{6}$$

b) Die dynamische Feldstärke und die Lorentz-Feldstärke

Dynamische Feldstärke $\vec{E}_d$ wollen wir die elektrische Kraft nennen, die im ungestrichenen System auf eine relativ zu ihm mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten positiven Einheitsladung wirkt. Die Differenz zwischen der dynamischen und der Coulombschen Feldstärke heiße *Lorentz-Feldstärke:* $\vec{E}_l = \vec{E}_d - \vec{E}$.

Im *Spezialfall,* daß Elementarladung und Einheitsladung die gleiche Relativgeschwindigkeit haben, muß $\vec{E}_d$ senkrecht auf den abgeplatteten Aequipotentialflächen der Fig. 1 stehen, und es läßt sich zeigen, daß $\vec{E}_l$ eine bezüglich der Relativgeschwindigkeit senkrechte Lage besitzt.

Wir wollen uns aber sogleich mit dem *allgemeinen Fall* befassen, wo die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Einheitsladung und die Geschwindigkeit $\vec{u}$ der Elementarladung verschiedene Richtung haben. Die Ableitung der Lorentz-Feldstärke vereinfacht sich, wenn wir die x-Achse und die mit ihr zusammenfallende x′-Achse parallel zu $\vec{v}$ und die y-Achse so wählen, daß die Bahn der Elementarladung in die xy-Ebene zu liegen kommt, daß also $u_z = O$ ist. In Fig. 3 bewegt sich die Elementarladung im ungestrichenen System auf der Geraden durch A_1 und A_2, während sich die Einheitsladung momentan im Punkte B befindet.

Um die Lorentz-Feldstärke $\vec{E}_l$ zu bestimmen, verwenden wir die Transformationsgleichungen für Kräfte (Gl. 3). Mit ihnen läßt sich der Zusammenhang zwischen der dynamischen Feldstärke $\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_l$ im ungestrichenen System und der elektrischen Kraft $\vec{E}'$ ausdrücken, die im Ruhesystem der Einheitsladung auf diese wirkt und daher eine Coulombsche Feldstärke ist. Dabei geht folgendes Gleichungssystem hervor :

$$E_x + E_{lx} = E'_x ,$$

$$E_y + E_{ly} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, E'_y , \tag{7a}$$

$$E_z + E_{lz} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, E'_z .$$

Es stellt sich vorerst die Aufgabe, $\vec{E}'$ zu berechnen. Da $\vec{E}'$ eine Coulombsche Feldstärke ist, gilt für sie die Gl. 6, wobei bemerkt sei, daß für eine bestimmte Lage der Einheitsladung die s-Fläche im ungestrichenen System das gleiche r′ besitzt wie die entsprechende s-Fläche im gestrichenen System, weil infolge unserer Wahl des Koordinatensystems $u_z = O$ ist, und sich somit laut Gl. 4 die parallel zur z-Achse liegende Hauptachse der s-Fläche nicht verändert. Ferner seien die Komponenten des von der Elementarladung nach der Einheitsladung hinweisenden Fahrstrahles $\vec{r}$ im ungestrichenen System mit Δx, Δy, Δz, im gestrichenen mit $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ bezeichnet, und es bedeute $\vec{u}'$ die Geschwindigkeit der Elementarladung im Ruhesystem der Einheitsladung. Nach diesen Angaben ersetzen wir in Gl. 7a $\vec{E}'$ durch Gl. 6 und erhalten

$$E_x + E_{lx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{e}{r'^3} \Delta x' ,$$

$$E_y + E_{ly} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{e}{r'^3} \Delta y' , \tag{7b}$$

$$E_z + E_{lz} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \frac{e}{r'^3} \Delta z' .$$

Wir müssen nun die Größen u', $\Delta x'$, $\Delta y'$ und $\Delta z'$ auf das ungestrichene System transformieren.

Nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt für unseren Fall:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} ; \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} ; \quad u'_z = O$$

und

$$u'^2 = u'^2_x + u'^2_y .$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} . \tag{8}$$

Die Transformation von $\Delta x'$, $\Delta y'$ und $\Delta z'$ geschehe unter den folgenden, in Fig. 3 dargestellten Bedingungen. Der Koordinatenursprung des gestrichenen Systems falle zur Zeit $t' = O$ mit dem des ungestrichenen zur Zeit $t = O$ zusammen. Es befinde sich in diesem Zeitpunkt die Einheitsladung im Punkte $B = B'$ der yz-Ebene, so daß $t_b = t'_b = O$ ist. Im Zeitpunkt $t' = O$ herrsche zwischen der Lage B' der Einheitsladung und jener A'_1 der Elementarladung Gleichzeitigkeit. Es gilt also $t'_{a1} = O$. Im ungestrichenen System entspricht der Lage A'_1 laut Lorentz-Transformation die Punktlage A_1 mit

$$x_{a1} = \frac{x'_{a1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9a}$$

und mit

$$t_{a1} = \frac{\frac{v}{c^2}\, x'_{a1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c^2}\, x_{a1}\,. \tag{9b}$$

Da für den in Fig. 3 dargestellten Fall x_{a1} und daher auch t_{a1} negativ sind, so befand sich die Elementarladung in einem um t_{a1} früheren Zeitpunkt in A_1 als die Einheitsladung in B. Im ungestrichenen System

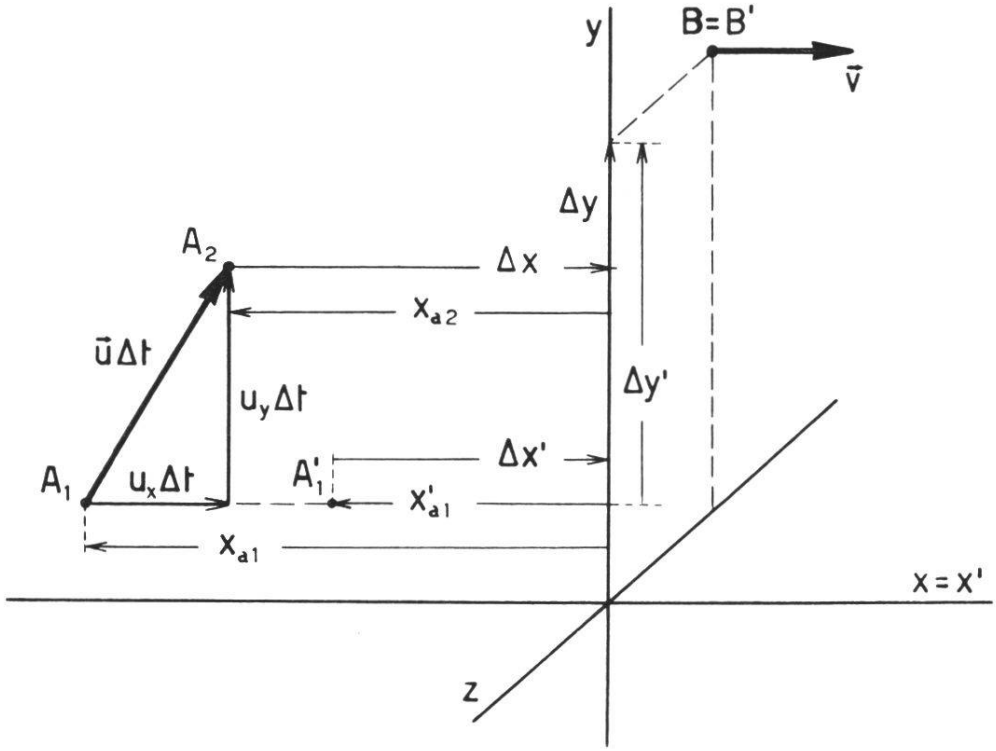

Fig. 3. Zur Ableitung der elektrischen Feldstärke, die von der sich im ungestrichenen System auf der Geraden A_1A_2 mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegenden Elementarladung erzeugt wird und die auf die sich momentan im Punkte B befindliche, mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegte Einheitsladung wirkt.

besteht daher Gleichzeitigkeit zwischen der Lage der Elementarladung und jener der Einheitsladung für die um $\Delta t = -t_{a1}$ spätere Punktlage A_2 der Elementarladung. Man erhält A_2, indem man zur Lage A_1 den Vektor $\vec{u}\,\Delta t$ anfügt. Zur Zeit $t'_b = t_b = O$ gelten laut Fig. 3 und Gl. 9 die folgenden Beziehungen :

$$\Delta x' = -x'_{a1} = -x_{a1}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,$$

$$\Delta x = -x_{a2} = -x_{a1} - u_x \Delta t = -x_{a1}\left(1 - \frac{u_x\, v}{c^2}\right) \tag{9c}$$

und durch Elimination von x_{a1}

$$\Delta x' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \Delta x \; ; \tag{10a}$$

ferner

$$\Delta y' = \Delta y + u_y \Delta t = \Delta y - \frac{u_y v}{c^2} x_{a1}$$

und durch Ersetzen von x_{a1} nach Gl. 9c

$$\Delta y' = \Delta y + \frac{\frac{u_y v}{c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \Delta x \, . \tag{10b}$$

Da bezüglich der z-Achse keine Relativbewegung stattfindet, ist

$$\Delta z' = \Delta z \, . \tag{10c}$$

Wir setzen nun Gl. 8 und Gl. 10 in Gl. 7b ein und erhalten

$$E_x + E_{lx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{e}{r'^3} \Delta x = E_x \, ,$$

$$E_y + E_{ly} = E_y - \frac{u_x v}{c^2} E_y + \frac{u_y v}{c^2} E_x \, ,$$

$$E_z + E_{lz} = E_z - \frac{u_x v}{c^2} E_z \, .$$

Daraus folgen die Gleichungen für die *Lorentz-Feldstärke:*

$$E_{lx} = O \; ; \; E_{ly} = \frac{u_y v}{c^2} E_x - \frac{u_x v}{c^2} E_y \; ; \; E_{lz} = - \frac{u_x v}{c^2} E_z \, ,$$

oder in Vektordarstellung:

$$\vec{E}_l = \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E} \right) . \tag{11}$$

Für die *dynamische Feldstärke* erhält man

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E} \right) . \tag{12}$$

In Gl. 11 und Gl. 12 ergeben sich die Lorentz-Feldstärke und die dynamische Feldstärke als Funktion der von der mit der konstanten Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ bewegten Elementarladung erzeugten und mitge-

führten und vom ruhenden Beobachter festgestellten Coulombschen Feldstärke $\vec{E}$, der Geschwindigkeit $\vec{u}$ und der bezüglich des gleichen Beobachters bestehenden Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Einheitsladung, auf die die Feldstärken $\vec{E}_l$ und $\vec{E}_d$ einwirken.

3. Das Feld der beliebig bewegten Elementarladung

Bei der Berechnung des Feldes der beschleunigten Elementarladung gehen wir von der in der Einleitung ausgesprochenen Tatsache aus, daß sich die elektrischen Wirkungen mit Lichtgeschwindigkeit, d. h. unbeschleunigt fortpflanzen. Wir haben beim Feld der unbeschleunigten Ladung gesehen, daß diese Wirkungen durch den Bewegungszustand der aussendenden Ladung mitbestimmt sind. Die diesbezüglichen Formeln haben eine so einfache Gestalt, weil die Geschwindigkeit der Elementarladung bei der Emission gleich ihrer Geschwindigkeit beim Eintreffen der elektrischen Wirkung im Aufpunkt geblieben ist. Bei der beschleunigten Elementarladung trifft dies nun nicht mehr zu. Um den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung herzustellen, müssen wir daher in diesem Falle die elektrischen Feldgrößen als Funktion des Ortes und der Geschwindigkeit, welche die Ladung im Zeitpunkt ihrer Emission besaß, ausdrücken. Es ist zweckmäßig, zuerst die entsprechenden Formeln für die unbeschleunigte Elementarladung mit Hilfe der elektrischen Potentiale abzuleiten.

a) Die Potentialgleichungen für das von der gleichförmig bewegten Elementarladung erzeugte Coulombsche Feld

Ist die Geschwindigkeit $\vec{u}$ der Elementarladung in der x-Achse gelegen, so lautet die y-Komponente der Coulombschen Feldstärke im Punkte P (o, y, o) nach Gl. 6 und Gl. 5a

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{e}{y^2} .$$

Im gleichen Punkt erhält man unter Berücksichtigung von Gl. 5b für das skalare Potential φ den Ausdruck

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{e}{y} = \frac{e}{s} . \tag{13a}$$

Da für eine bestimmte s-Fläche s und e konstant sind, haben wir somit das *skalare Potential* auf der ganzen Fläche gefunden und dürfen nach Gl. 5b schreiben :

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}} \,. \tag{13b}$$

Um aus diesem Potentialausdruck die Coulombsche Feldstärke $\vec{E}$ zu berechnen, muß man zu dessen Gradient ein Zusatzglied $\vec{Z}$ beifügen, so daß folgender Ausdruck erhalten wird :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi + \vec{Z} \,. \tag{14}$$

Die y- und z-Komponenten von $\vec{Z}$ sind gleich Null, da sich die Beziehungen $-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y$ und $-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z$ ergeben.

Daher ist

$$Z = Z_x = E_x + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{e}{s^3}\,x - \frac{e}{s^3}\,x = -\frac{u^2}{c^2}\frac{e}{s^3}\,x = \frac{u^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \,.$$

Es gilt aber mit Rücksicht darauf, daß $u_y = u_z = O$ ist,

$$\vec{u}\operatorname{grad}\varphi = u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = u\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

und somit

$$Z = \frac{1}{c^2}\,u\,\vec{u}\operatorname{grad}\varphi \,.$$

Da $\vec{Z}$ die Richtung von $\vec{u}$ hat, erhalten wir die Vektorbeziehung

$$\vec{Z} = \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\,(\vec{u}\operatorname{grad}\varphi) \,. \tag{15}$$

Die Feldfunktion φ (x, y, z, t) gehört zu einer gleichförmig bewegten Elementarladung und wird mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit mitgeführt. Deshalb hat sie zur Zeit t am Orte x, y, z denselben Wert, welchen sie zur Zeit $t - dt$ an der Stelle $x - u_x\,dt$, $y - u_y\,dt$, $z - u_z\,dt$ gehabt hat. Es gilt also die Identität

$$\varphi\,(x, y, z, t) = \varphi\,(x\text{-}u_x dt,\ y\text{-}u_y dt,\ z\text{-}u_z dt,\ t\text{-}dt) \,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\,\vec{u}\operatorname{grad}\varphi \,. \tag{16}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gl. 15 ein und nehmen wir die Konstante $\frac{\vec{u}}{c}$ unter das Differentialzeichen, so erhalten wir

$$\vec{Z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \frac{\vec{u}}{c}\varphi}{\partial t}.$$

Der mit φ dimensionsgleiche, aber vektorielle Ausdruck

$$\vec{A} = \frac{\vec{u}}{c}\varphi \tag{17}$$

wird *Vektorpotential* genannt. Nach Gl. 14 erhält man für die Coulombsche Feldstärke einer bewegten Elementarladung die Gleichung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{18}$$

b) Die retardierten Potentiale

Die Formel $\varphi = \frac{e}{s} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}$ (cf. Gl. 13)

beschreibt das skalare Potential im Aufpunkt P(x, y, z, t) im Zeitpunkt t, wo die gleichförmig bewegte Elementarladung gerade durch den Koordinatenursprung B(o, o, o, t) geht. Wir suchen nun das ska-

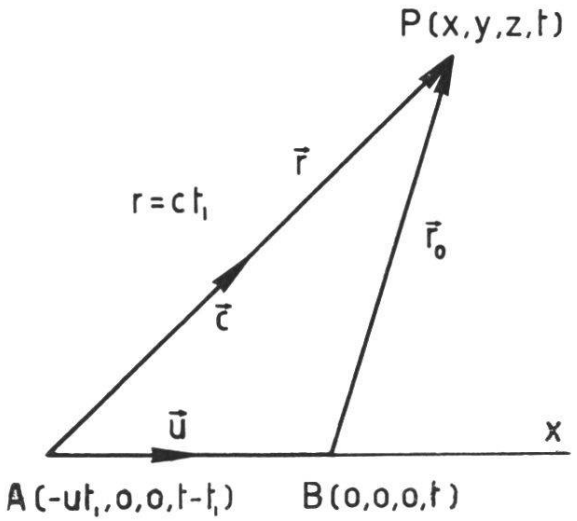

Fig. 4. Zur Ableitung der retardierten Potentiale.

lare Potential als Funktion des Abstandes $\vec{r}$, den die Elementarladung zur Zeit der Emission ihrer elektrodynamischen Wirkung vom Aufpunkt besaß, d. h. zur Zeit $t - t_1 = t - \frac{r}{c}$ (cf. Fig. 4).

Nach Gl. 5b und Fig. 4 läßt sich s folgendermaßen umformen:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{u^2}{c^2}(y^2 + z^2) = \vec{r}_0^{\,2} - \left(\vec{r}_0 \times \frac{\vec{u}}{c}\right)^2 . \tag{19}$$

Aus Fig. 4 ergibt sich $\vec{r}_0 = \vec{r} - r\,\frac{\vec{u}}{c}$ (20)

und $\vec{r}_0 \times \vec{u} = \vec{r} \times \vec{u}$.

Es gilt daher $(\vec{r}_0 \times \vec{u})^2 = (\vec{r} \times \vec{u})^2 = r^2 u^2 - (\vec{r}\,\vec{u})^2$.

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. 19 ein, so erhält man die Formel

$$s^2 = \left(r - \frac{\vec{r}\,\vec{u}}{c}\right)^2 ,$$

in der s als Funktion des Abstandes und der Geschwindigkeit, welche die Elementarladung zur Zeit $t - \frac{r}{c}$ besaß, dargestellt ist.

Somit folgen das *retardierte skalare Potential*

$$\varphi_t = \frac{e}{\left[r - \frac{\vec{r}\,\vec{u}}{c}\right]_{t - \frac{r}{c}}} \tag{21a}$$

und das *retardierte Vektorpotential*

$$\vec{A}_t = \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{u}}{r - \frac{\vec{r}\,\vec{u}}{c}}\right]_{t - \frac{r}{c}} \tag{21b}$$

c) Berechnung des Feldes der beschleunigten Elementarladung

Wir schreiben die Gl. 21 in der Form

$$\varphi = \left(\frac{e}{s}\right)_\tau \text{ und } \vec{A} = \left(\frac{e\,\vec{u}}{c\,s}\right)_\tau \tag{21c}$$

mit den Abkürzungen $s = r - \frac{\vec{r}\,\vec{u}}{c}$ und $\tau = t - \frac{r}{c}$ und setzen sie in die Gl. 18 ein, die zwar für gleichförmig bewegte Ladungen abgeleitet wurde, die aber auch auf eine beschleunigte Elementarladung anwendbar ist, wenn wir deren Ort und deren Geschwindigkeit im Zeitpunkt τ der Emission der elektrischen Wirkung in Rechnung setzen, wie dies tatsächlich durch die retardierten Potentiale geschieht. Die Beschleunigung geht durch die zeitliche Ableitung des Vektorpotentials in die Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir

$$\vec{E} = \frac{e}{s^2} \operatorname{grad} s + \frac{e\,\vec{u}}{c^2 s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{e}{c^2 s} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} .$$

Nach bekannten Methoden [1] lassen sich die Ausdrücke grad s, $\frac{\partial s}{\partial t}$ und $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ für die Lage der Elementarladung zur Zeit τ berechnen. Es ergibt sich folgende Gleichung mit $\vec{u}^{\bullet} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$:

$$\vec{E} = \frac{e}{s^3} \left(\vec{r} - r \frac{\vec{u}}{c}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{e}{c^2 s^3} \vec{r} \times \left[\left(\vec{r} - r \frac{\vec{u}}{c}\right) \times \vec{u}^{\bullet}\right] . \tag{22}$$

Alle auf der rechten Seite auftretenden Größen gelten für die Lage der Elementarladung zur Zeit $\tau = t - \frac{r}{c}$, während $\vec{E}$ für den Zeitpunkt t erhalten wird.

Das durch Gl. 22 beschriebene Feld setzt sich additiv aus *zwei Teilfeldern* $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ zusammen, von denen nur $\vec{E}_2$ die Beschleunigung $\vec{u}^{\bullet}$ enthält.

Unter Berücksichtigung von Gl. 20 wird

$$\vec{E}_1 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{e}{s^3} \vec{r}_0 . \tag{22a}$$

Vergleichen wir $\vec{E}_1$ mit der Gl. 6, so stellen wir fest, daß $\vec{E}_1$ die Coulombsche Feldstärke einer mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegten Elementarladung ist. In unserem Fall bedeutet $\vec{r}_0$ den Vektor $\vec{BP}$ (cf. Fig. 4), wobei B der Ort ist, den die Elementarladung bei Beibehaltung der im Moment der Emission innegehabten Geschwindigkeit $\vec{u}$ im Zeitpunkt des Eintreffens der Wirkung im Aufpunkt P erreichen würde. Das durch $\vec{E}_1$ dargestellte Feld hat somit den *Charakter eines Coulombschen Feldes,* das sich mit der ihm im Zeitpunkt der Emission eingeprägten Geschwindigkeit konstant durch den Raum bewegt, welches auch nachher die Geschwindigkeit der Elementarladung sei.

Dem zweiten, die Beschleunigung enthaltenden Anteil läßt sich folgende Form geben:

$$\vec{E}_2 = \frac{e}{c^2 s^3} \vec{r} \times (\vec{r}_0 \times \vec{u}^{\bullet}) . \tag{22b}$$

---

[1] Cf. R. Becker: Theorie der Elektrizität 1933 Bd. II, 64 ff.; 1957 Bd. I, 204.

Die Feldstärke $\vec{E}_2$ steht also senkrecht auf dem Radius $\vec{r}$, längs dem sie sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Sie wird daher von der Ladung nicht mitgeführt. Da sie ferner nach außen hin wie $\frac{1}{r}$ abfällt, besitzt sie den Charakter einer von der Elementarladung ausgehenden *transversalen elektrischen Welle.*

Die durch Gl. 22 dargestellte Feldstärke wirkt auf die bezüglich des Beobachters ruhende Einheitsladung. Um die *dynamische Feldstärke* zu erhalten, müssen wir beachten, daß sich der Anteil $\vec{E}_1$ mit der mitgeführten Geschwindigkeit $\vec{u}$, der Anteil $\vec{E}_2$ mit Lichtgeschwindigkeit im Raume fortbewegt. Nach Gl. 12 gilt daher

$$\vec{E}_d = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E}_1 + \frac{\vec{c}}{c} \times \vec{E}_2 \right). \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. 20 und Gl. 22a ist $\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E}_1 = \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}_1$. Da ferner $\frac{\vec{c}}{c} = \frac{\vec{r}}{r}$ ist, wird Gl. 23 zur Gleichung

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} \right) = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{c}}{c} \times \vec{E} \right). \tag{24}$$

In dieser Gleichung bedeutet $\vec{E}$ die von einer beliebig bewegten Elementarladung erzeugte elektrische Feldstärke, die auf eine im Aufpunkt ruhende Einheitsladung wirkt und durch Gl. 22 dargestellt wird, $\vec{E}_d$ die von der mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Einheitsladung im gleichen Punkte wahrgenommene dynamische Feldstärke, $\vec{r}$ den Radiusvektor, der von der im Moment der Emission von der Elementarladung eingenommenen Punktlage zum Aufpunkt weist, und $\vec{c}$ die mit $\vec{r}$ gleichgerichtete Lichtgeschwindigkeit.

Abschließend sei noch eine wichtige Eigenschaft des elektrischen Feldes betont. Da sich die beiden Anteile $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$, die von der beschleunigten Elementarladung erzeugt werden, im Raume unbeschleunigt fortpflanzen, sind sie nach der Emission von der aussendenden Elementarladung unabhängig. Infolge ihrer Eigengeschwindigkeit bringen diese Feldgrößen in den Punkten des Raumes, die sie überstreichen, die elektrischen Wirkungen hervor. Dies muß logischerweise auch für das Feld der gleichförmig bewegten Elementarladung gelten. In Gl. 11 für die Lorentz-Feldstärke bedeutet daher $\vec{u}$ nicht nur die

Geschwindigkeit der felderzeugenden Elementarladung, sondern in einem tieferen Sinn die Geschwindigkeit des von der bewegten Elementarladung mitgeführten Coulombschen Feldes. Diese Überlegungen stützen und erklären die Nahewirkungstheorie der elektrischen Kräfte.

4. Das Feld mehrerer Elementarladungen

Die Felder mehrerer Elementarladungen überlagern sich als vektorielle Größen. Man erhält daher das *Gesamtfeld* durch Summierung über die Einzelfelder. Nach Gl. 24 gilt für die dynamische Gesamtfeldstärke die Formel

$$\vec{E}_d = \sum \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \sum \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} \right). \tag{25}$$

Wir sehen aus dieser Gleichung, daß sich die auf eine ruhende Einheitsladung wirkenden Feldanteile zu einer Gesamtfeldstärke $\Sigma \vec{E}$ summieren, daß hingegen die Lorentz-Anteile verschieden bewegter Elementarladungen nicht eine Funktion der eben genannten Gesamtfeldstärke sind. Bei mehreren verschieden bewegten Elementarladungen gehen die von jeder einzelnen Ladung erzeugten Feldstärken und die entsprechenden Radiusvektoren in die Gl. 25 ein, und die gesamte Lorentz-Feldstärke ist gleich der Vektorsumme der von den einzelnen Ladungen auf die bewegte Einheitsladung ausgeübten Lorentz-Kräfte. Es gibt praktisch sehr bedeutsame Fälle, wie z. B. stromdurchflossene Leiter, bei denen sich die Coulombschen Feldstärken in einem geeignet gewählten Koordinatensystem zu Null addieren, während sich ihre Anwesenheit durch die elektrodynamischen Kräfte verrät.

In diesen Verhältnissen liegt der Grund, warum die traditionelle Definition der *elektrischen Feldlinien* den physikalischen Gegebenheiten nicht voll entspricht. Diesem Mangel wird abgeholfen, wenn man die Feldlinien des Coulombschen Feldes ruhender oder gleichförmig bewegter Ladungen trotz der Anwesenheit anderer Ladungen als radial von den einzelnen Elementarladungen ausgehend und von ihnen mitgeführt, jene der transversalen elektrischen Wellen als senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung stehend und mit Lichtgeschwindigkeit bewegt denkt. Die so definierten Feldlinien werden also durch die Anwesenheit anderer Ladungen nicht deformiert. Dies gilt auch von der Einheitsladung, mit der die Felder ausgemessen werden. Wie

die von Milliarden Lichtquellen ausgestrahlten, nicht kohärenten transversalen Lichtwellen durch den gleichen Punkt gehen können, ohne miteinander zu interferieren, so bedeutet es keine Denkschwierigkeit, wenn sich die von den einzelnen Elementarladungen ausgehenden Feldlinien in den Punkten des Raumes ungestört kreuzen.

Im Lichte der Quantenphysik haben die so definierten *Feldlinien folgende Bedeutung*. Im Falle des Coulombschen Feldes stellen sie Linien dar, für welche die longitudinalen von der Elementarladung ausgehenden und die Coulombschen Kräfte zwischen den elektrischen Ladungen vermittelnden Wellen oder im Teilchenbild ausgedrückt die longitudinalen Photonen tangentiale Lage haben. Im Fall des transversalen Wellenfeldes gilt diese Eigenschaft bezüglich der Schwingungsrichtung der transversalen Photonen.

Wir wollen nun Form und Verteilung dieser Feldlinien finden. Fig. 5 stellt die Verhältnisse für das Coulombsche Feld einer *gleichförmig bewegten Elementarladung* dar. Eine solche bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}$ auf der x-Achse, die zugleich x′-Achse sei. Im Zeitpunkt, wo sich die Elementarladung in A_0 befindet, mögen die Koordinatenursprünge beider Systeme mit A_0 zusammenfallen. In diesem Moment sende sie ein longitudinales Photon aus und zwar in einer Richtung, die in ihrem Ruhesystem in der x′y′-Ebene liegt und mit der x′-Achse den Winkel φ' bildet. Das Photon sei modellmäßig durch einen kleinen Pfeil dargestellt. Für die Richtung φ' gilt die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{y'}{x'} = \frac{c'_y}{c'_x},$$

wobei c'_x und c'_y die Komponenten der Lichtgeschwindigkeit des Photons sind. Im ungestrichenen System bildet die Richtung des Photonpfeiles infolge der Lorentz-Kontraktion mit der x-Achse den Winkel φ, der durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

bestimmt ist. Die Geschwindigkeit, mit der sich das Photon bewegt, hat aber nicht mehr diese Richtung, sondern sie besitzt nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten die Komponenten

$$c_x = \frac{c'_x + u}{1 + \frac{c'_x u}{c^2}} \quad \text{und} \quad c_y = \frac{c'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{c'_x u}{c^2}}$$

mit $c_x^2 + c_y^2 = c^2$.

Nach Gl. 22a und Fig. 4 ist im ungestrichenen System die Richtung der Photonenpfeile gleich der Richtung von $\vec{r}_o$, jene ihrer Fortpflanzung gleich der Richtung von $\vec{r} = \vec{c}\, t_1$. Nach der Zeit t_1 kommt das im Moment $t = O$ vom Punkte A_o in der Richtung von $\vec{r}_o$ ausgesandte Photon im Punkt P_o an, während die Elementarladung infolge ihrer konstanten Geschwindigkeit den Punkt $B_o = A_1$ erreicht (Fig. 5). In A_1 sende die Ladung wiederum ein gleichgerichtetes longitudinales Photon aus, das sich auf der Geraden A_1Q_1 fortpflanzt. Während der Zeit $\Delta t = t_1$ bewegt sich dieses Photon nach dem Punkt P_1 und das von A_o ausgesandte Photon von P_o nach Q_o; usw. Auf diese Weise

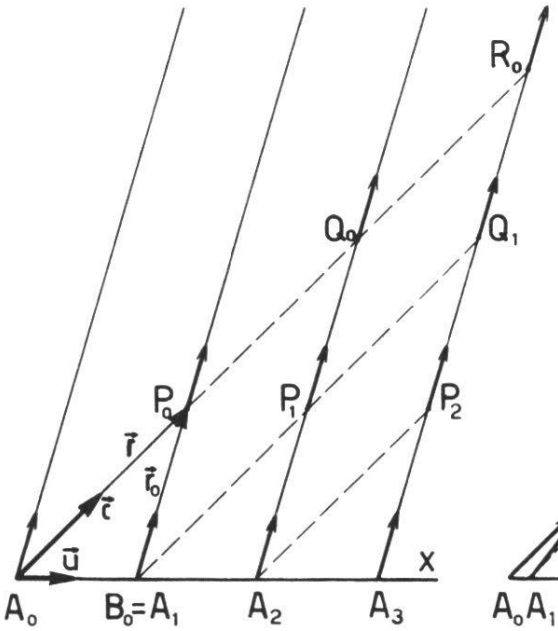

Fig. 5.
Feldbild der gleichförmig bewegten Elementarladung.

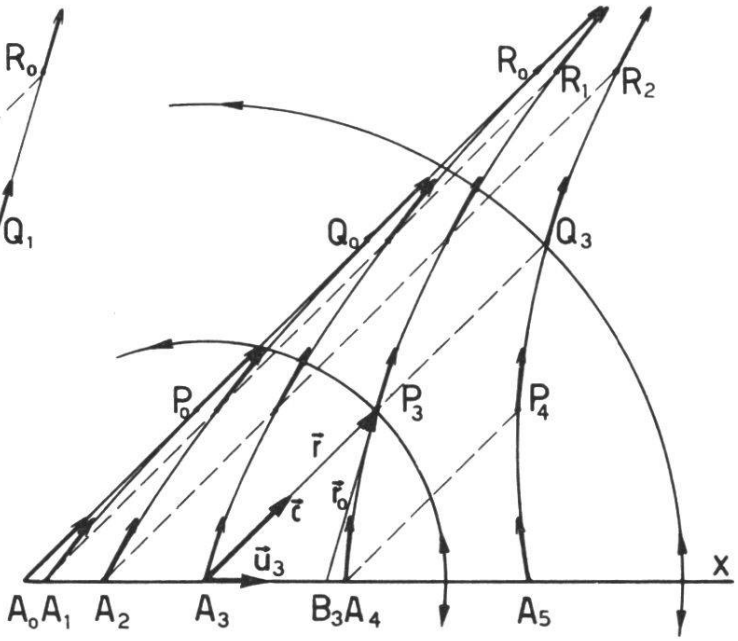

Fig. 6.
Feldbild der beschleunigten Elementarladung.

erhalten wir die zu den Punktlagen A_1, A_2, A_3, ... der Elementarladung gehörenden Geraden A_1P_o, A_2Q_o, A_3R_o, ..., auf denen die Photonen liegen. Diese Geraden sind daher nichts anderes als die sich folgenden Momentanbilder der zu den dargestellten longitudinalen Photonen ge-

hörenden Coulombschen Feldlinie, die sich mit der Geschwindigkeit der unbeschleunigten Elementarladung mitbewegt.

Im Fall der *ungleichförmig bewegten Elementarladung* sind die Coulombschen Feldlinien nicht mehr Geraden. In Fig. 6 ist der Spezialfall dargestellt, wo die zuerst in A_0 ruhende Elementarladung längs der x-Achse konstant beschleunigt wird und zur Zeit t_n die Punktlagen A_n einnimmt. Man beachte, daß Punkt B_3 jener Punkt ist, den die Elementarladung beim Eintreffen der von ihr in A_3 ausgesandten elektrischen Wirkung in P_3 erreichen würde, wenn sie sich von A_3 aus mit der in diesem Punkte innegehabten Geschwindigkeit gleichförmig weiterbewegte. Nach Gl. 22a und Fig. 6 läßt sich die Richtung des longitudinalen Photons in P_3 bestimmen. Dieses Photon bewegt sich auf der Geraden A_3Q_3. Auf gleiche Weise geht man für die übrigen longitudinalen Photonen vor. Die in Fig. 6 eingezeichneten Photonen stellen Tangenten an den Linien A_0P_0, A_1P_0, A_2Q_0, A_3R_0, ... dar. Diese sind daher die Momentanbilder der zu den genannten Photonen gehörenden, von der beschleunigten Elementarladung ausgehenden Coulombschen Feldlinie. In Fig. 6 sind auch für die Momente t_4 und t_5 die Feldlinien der von A_3 im Zeitpunkt t_3 ausgesandten kugelförmigen Transversalwelle eingezeichnet. Sie sind nach Gl. 22b Meridiane, die von dem auf der positiven Seite der x-Achse liegenden Pol nach dem Gegenpol weisen. In den Polen selbst ist die Feldstärke der transversalen Welle gleich Null. Im allgemeinen Fall, wo Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung der Elementarladung verschiedene Richtung haben, werden die in Fig. 6 dargestellten Feldlinien noch räumlich gekrümmt.

5. Das magnetische Feld und die Maxwellschen Gleichungen

a) Die magnetische Feldstärke

Die Gl. 11 für die Lorentz-Feldstärke enthält den Ausdruck $\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E}$, der in der klassischen Elektronentheorie die magnetische Feldstärke eines mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegten und geladenen Teilchens bedeutet [1]. Ist die felderzeugende Elementarladung beschleunigt, so finden wir als entsprechenden Ausdruck in Gl. 24

[1] R. Becker: Theorie der Elektrizität 1957 Bd. I, 189.

$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}$, der nach der klassischen Theorie wiederum die magnetische Feldstärke ausdrückt [1]. Wenn auch wir

$$\vec{H} = \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} \tag{26}$$

definieren, so müssen wir uns bewußt sein, daß dies im Lichte der dargelegten Theorie eine rein formale Angelegenheit ist, daß daher die eingeführte *magnetische Feldstärke eine bloße Hilfsgröße* darstellt, der als solcher keine physikalische Realität entspricht, da uns kein innerer Grund zur Einführung des neuen Begriffes zwingt. Darauf weist schon der Umstand hin, daß wir das elektrische Feld einer gleichförmig oder beliebig bewegten Elementarladung ableiten konnten, ohne das magnetische Feld auch nur mit einem Worte zu erwähnen. Ferner hängt die magnetische Feldstärke derart von der Relativgeschwindigkeit des Beobachters ab, daß sie im Ruhesystem der felderzeugenden Ladung ganz verschwindet, während dies bei der Coulombschen Feldstärke nicht der Fall ist. Der formale Charakter des magnetischen Feldes wird uns auch deutlich, wenn wir beachten, daß dessen Einführung die Aufteilung der in den relativistischen Transformationsformeln je für sich eine Einheit bildenden Ausdrücke

$$\frac{u_x\, v}{c^2}, \quad \frac{u_y\, v}{c^2}, \quad \frac{u_z\, v}{c^2}$$

in die zwei Faktoren $\frac{\vec{u}}{c}$ und $\frac{\vec{v}}{c}$ voraussetzt, wie dies der Beweis für die Gl. 11 zeigt. Wenn schon nach Einstein die von ihm elektromotorische Kraft genannte Lorentz-Feldstärke $\vec{E}_1 = \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}\right)$ nur die Rolle eines Hilfsbegriffes spielt, wie wir in der Einleitung sahen, so gilt dies umso mehr von der magnetischen Feldstärke, die in der entwickelten Theorie nur eine andere Bezeichnung für den in der Gleichung der Lorentz-Feldstärke vorkommenden Ausdruck $\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}$ darstellt. Da die magnetische Induktion $\vec{B}$ durch räumliche Mittelwertbildung über die elementaren magnetischen Feldstärken gewonnen werden kann, ist auch sie eine reine Hilfsgröße. Wenn aber das magnetische Feld als solches nicht existiert, so ist auch die Frage nach seinen realen Quellen gegenstandslos. Damit hat das Fehlen von magnetischen Ladungen

---

[1] R. Becker: Theorie der Elektrizität 1957 Bd. I, 204.

die natürliche Erklärung gefunden. Das magnetische Moment der Elementarteilchen ist daher auf die Eigenbewegung der nicht streng punktförmigen Elementarteilchen zurückzuführen. Im besondern weist das magnetische Moment des Neutrons auf eine ungleichmäßige Verteilung der in ihm enthaltenen positiven und negativen Elementarladung hin.

Diese prinzipiellen Überlegungen wollen der Nützlichkeit der magnetischen Feldgrößen keinen Eintrag tun, die darin besteht, daß der in den praktischen Fällen außerordentlich komplizierte Ausdruck $\sum \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E}$ durch meßbare Größen ersetzt wird.

Um mit Hilfe der dargelegten Theorie zum *elektromagnetischen Feldtensor* zu gelangen, brauchen wir aus ihr nur die für diesen schiefsymmetrischen Tensor zweiter Stufe charakteristischen Transformationsformeln abzuleiten. Zu diesem Zwecke wählen wir $\vec{v}$ parallel zur x-Achse und setzen Gl. 26 in Gl. 24 ein. Durch Anwendung von Gl. 3 erhalten wir die mit Gl. 1 identischen Transformationsformeln der elektrischen Feldstärke:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y - \beta H_z) , \\ E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_z + \beta H_y) . \end{aligned} \tag{27}$$

Um die entsprechenden Formeln für das magnetische Feld abzuleiten, ersetzen wir in Gl. 26 $\frac{\vec{r}}{r}$ durch $\frac{\vec{c}}{c}$ (cf. Gl. 24), betrachten die magnetische Feldstärke im Ruhesystem der Einheitsladung und transformieren in den so erhaltenen Gleichungen mit Hilfe des Additionstheorems der Geschwindigkeiten und mit Gl. 3 die Größen der rechten Seite auf das ungestrichene System. Es ergeben sich auf diese Weise die Transformationsgleichungen für die magnetische Feldstärke:

$$\begin{aligned} H'_x &= H_x , \\ H'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_y + \beta E_z) , \\ H'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H_z - \beta E_y) . \end{aligned} \tag{28}$$

Die Gleichungen 27 und 28 stellen die in dreidimensionaler Form geschriebenen Transformationsgleichungen des elektromagnetischen Feld-

tensors dar, der somit abgeleitet ist. Dieser Tensor faßt die elektromagnetischen Feldgrößen zu einer mathematischen Einheit zusammen, die ihren Grund in der Einführung der durch Gl. 26 definierten Hilfsgröße $\vec{H}$ hat. Zum gleichen Tensor führen bekanntlich die Maxwellschen Gleichungen. Das weist darauf hin, daß auch diese in der dargelegten Theorie enthalten sind.

b) Ableitung der Maxwellschen Gleichungen

Wenn man die Raumladungsdichte ρ einführt, so folgt aus dem Coulombschen Gesetz die Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4 \pi \rho .$$

Bildet man von dem durch Gl. 17 definierten Vektorpotential die Rotation, so erhält man aus Gl. 21c mit bekannten Methoden [1]

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \left[\frac{e \vec{u}}{c s}\right]_\tau = \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} .$$

Unter Berücksichtigung von Gl. 26 ist also $\vec{H}$ als Rotation des Vektors $\vec{A}$ darstellbar. Darum gilt die Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{H} = O .$$

Nach Gl. 18 ist der Ausdruck $-\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ der Gradient des Skalars φ; daher verschwindet seine Rotation:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{A}}{\partial t} = O .$$

Daraus folgt sofort die Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} .$$

Da sich Gl. 26 auch aus den Maxwellschen Gleichungen ableiten läßt [1], enthält sie die letzte Maxwellsche Gleichung [2]

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4 \pi}{c} \vec{i} .$$

---

[1] R. Becker: Theorie der Elektrizität 1957 Bd. I, 204 und 1933 Bd. II, 64 ff.
[2] Cf. Anmerkung 2 auf folgender Seite.

Durch Einsetzen von Gl. 26 in Gl. 24 erhalten wir die Gleichung $\vec{E}_d = \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}$. Aus ihr ergibt sich die Lorentz-Kraft $\vec{K} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}\right)$ und das Induktionsgesetz für bewegte Leiter, die beide in der Maxwellschen Theorie Fremdkörper darstellen.

Abschließend sei bemerkt, daß jene drei Maxwellschen Gleichungen, in denen die Hilfsgröße $\vec{H}$ vorkommt, logischerweise nicht als Grundgleichungen anzusehen sind. Die übrige Maxwellsche Gleichung umschreibt die Tatsache, daß die elektrische Ladung Quelle des Coulombschen Feldes ist. Diese Tatsache bildet zusammen mit den Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie die Grundlage der Elektrodynamik [1].

SUMMARY

In the paper « On the Basis of Electrodynamics », a way other than the usual one has been followed for the explanation of facts concerning electrodynamics. This way leads to a deeper knowledge of the nature of electrodynamic phenomena. It has namely been possible to show three-dimensionally that the only cause for electric effects is the lorentz-invariant elementary charge with its Coulomb field, and that the laws of electrodynamics, including the Maxwell equations, can be deduced from the above physical fact using the Lorentz transformation of the theory of relativity.

This introduces the following results: for the unaccelerated charge the equations 6, 11 and 12, and for a charge moving in any manner the equations 22, 23, and 24 which express the electric field strengths that are generated by the elementary charge and that act upon unit charges at rest or in motion. These equations have been deduced without invoking in any way the magnetic field.

The discussion about the field generated by several elementary charges leads to a corresponding definition of the electric field lines (See pages 183/186).

In order to discover the connection between the present theory and the Maxwell theory, the magnetic field strength has been defined through equation 26. It must be noted, however, that this entity as well as the other magnetic quantities proved to be merely auxiliary conceptions to which no physical reality can be attributed as such (See page 187).

---

[1] Die Anwendbarkeit der dargelegten Methoden auf das Gravitationsfeld wird in einer weiteren Arbeit untersucht werden.

[2] Für die gleichförmig bewegte Elementarladung läßt sich die vierte Maxwellsche Gleichung aus Gl. 26 unter Berücksichtigung, daß in diesem Fall $\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{E} = \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{E}$ ist durch Rotorbildung direkt und leicht ableiten.