

# La méthode des éléments finis

Autor(en): **Goël, Jean-Jacques**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles =  
Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg**

Band (Jahr): **63 (1974)**

Heft 1

PDF erstellt am: **18.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-308501>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# La méthode des éléments finis

par JEAN-JACQUES GOËL

Institut de Mathématiques, Université de Fribourg

## 1. Généralités

Par suite du développement des calculatrices, de nombreux problèmes, autrefois rebutants, sont devenus aujourd'hui chose courante. C'est en particulier le cas des problèmes se posant au physicien ou à l'ingénieur. Cette évolution des moyens de calcul n'est toutefois pas sans exigence. En effet, les méthodes de calcul classique sont inspirées par la préoccupation de donner à ces calculs une forme bien adaptée aux méthodes manuelles. Or, les exigences du calcul électronique sont toutes différentes. En calcul manuel, on cherche des méthodes conduisant à un volume de calcul minimum qui exigent de nombreuses initiatives du calculateur. Par contre, en calcul automatique, on cherche des méthodes conduisant à des opérations standard, leur nombre n'ayant qu'une importance secondaire. Il est donc nécessaire de reprendre, souvent assez au début, les problèmes que l'on avait l'habitude de résoudre par des méthodes artisanales, afin de se plier aux exigences de l'automatisme. Cette circonstance est en fait la même que celle que l'on rencontre dans bien des questions de fabrication industrielle.

Les problèmes posés au physicien ou à l'ingénieur peuvent être schématiquement décomposés en trois parties. Tout d'abord, *le choix d'un modèle mathématique* : c'est le passage d'un problème de la physique à un problème de mathématique ; par exemple, une plaque est remplacée par un corps déformable à deux dimensions. Ensuite, *l'exploitation du modèle* : il s'agit de résoudre un problème de mathématique parfaitement posé ; par exemple, dans le cas de la plaque, on a à déterminer la solution de l'équation de Lagrange satisfaisant à des conditions aux limites. Remarquons que cette partie du problème ne fait appel qu'aux connaissances mathématiques du physicien. En fait, elle pourrait être confiée à un mathématicien sans préciser de quel problème physique elle est issue. Enfin, *l'interprétation des résultats* : cette partie est certainement la plus délicate ; en effet, c'est ici que le physicien doit décider de l'incidence des résultats obtenus à partir d'un modèle qui ne représente la réalité que de manière imparfaite. Contrairement à l'exploitation du modèle, cette partie fait appel non seulement aux connaissances mathématiques du physicien, mais aussi à son intuition et à sa compréhension du phénomène physique.

L'usage d'une calculatrice permet de résoudre entièrement et en des temps très brefs la seconde partie du problème, c'est-à-dire l'étude du modèle mathématique. De plus, elle peut aussi contribuer aux deux autres parties. En effet, le moyen puissant que constitue une calculatrice permet de faire, en peu de temps, de nombreuses expériences numériques propres à démontrer si tel ou tel effet joue un rôle sensible et doit être pris en compte dans les calculs.

Dès maintenant, nous nous limiterons à l'étude d'un modèle mathématique. La méthode des éléments finis est une méthode particulière qui permet de

résoudre automatiquement une classe très importante de problèmes de la physique. Nous donnons l'idée de la méthode à partir d'un exemple très simple.

## 2. Corde élastique pincée aux deux extrémités

### 2.1 Modèle classique de la corde élastique

On considère une corde élastique tendue entre les points  $(0,0)$  et  $(1,0)$  et soumise à des forces normales (voir fig. 1); soit  $u(x)$  la cote de la corde au point  $x$ ; on montre en physique que, sous des hypothèses et simplifications convenables,  $u$  satisfait à la relation

$$-Tu'' = f.$$

La constante  $T$  représente la tension transversale de la corde par unité de longueur;  $f$  est la densité des forces extérieures par unité de longueur (forces positives et déplacements positifs ont même orientation). Les conditions de bord s'écrivent

$$u(0) = u(1) = 0.$$

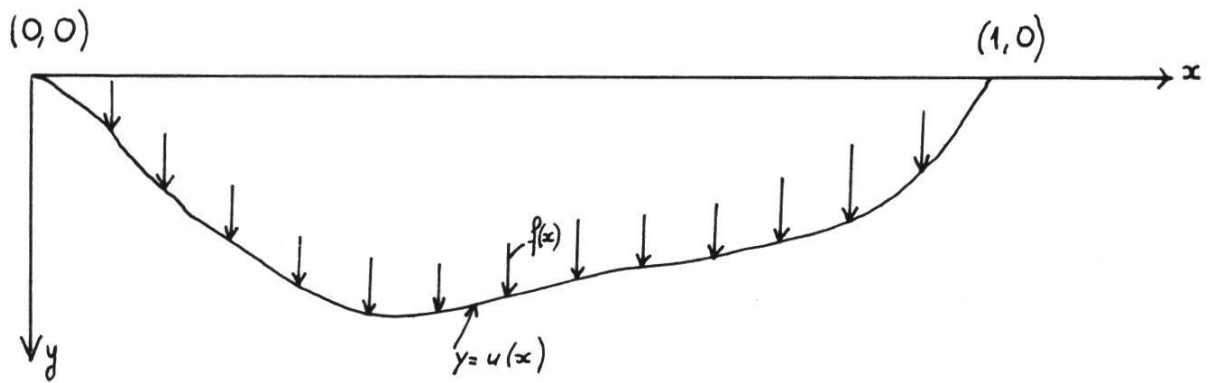


Fig. 1: Corde élastique pincée aux deux extrémités

Donnons deux formulations mathématiques de ce problème; nous posons, pour simplifier les notations,  $T = 1$ . Nous utiliserons les notations suivantes. Une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est *continue par morceaux* si l'on peut décomposer  $[a, b]$  en un nombre fini d'intervalles  $[a_k, a_{k+1}]$ ,  $k = 0(1)m-1$  avec  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$  tels que (i)  $f$  est continue à l'intérieur de ces intervalles, (ii) les limites à droite et à gauche aux points  $a_k$  existent; cette définition n'impose aucune condition aux valeurs de  $f$  aux points de discontinuité;  $f$  peut ne pas être définie en ces points. Une relation entre plusieurs fonctions définies sur  $[a, b]$  et à valeurs réelles est dite *vraie presque partout* (notation p.p.) si elle est vérifiée partout sauf en un nombre fini de points.

#### Problème différentiel

Soient  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue par morceaux, et  $U$  l'ensemble

$$U := \{u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ et } u' \text{ continue, } u'' \text{ continue par morceaux, } u(0) = u(1) = 0\}.$$

Le problème s'énonce: déterminer  $\bar{u} \in U$  tel que

$$-\bar{u}'' = f, \quad \text{p.p.}$$

C'est un problème linéaire. En effet, si l'on considère deux densités de forces extérieures  $f_1$  et  $f_2$  et la somme  $f := f_1 + f_2$ , alors la solution correspondant à  $f$  est égale à la somme des solutions correspondant à  $f_1$  et  $f_2$ ; soient de plus  $\gamma$  un nombre réel et le produit  $f := \gamma f_1$ , alors la solution correspondant à  $f$  est égale au produit de  $\gamma$  par la solution correspondant à  $f_1$ .

### Problème de minimum

Soient  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux, et  $V$  l'ensemble  $V := \{v: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ continue, } v' \text{ continue par morceaux, } v(0) = v(1) = 0\}$ .

Le problème prend la forme: déterminer  $\bar{u} \in V$  tel que

$$A(\bar{u}) \leq A(v) \text{ pour toute fonction } v \in V,$$

où

$$A(v) := \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2(x) dx - \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

C'est l'énoncé variationnel du problème différentiel. Le premier terme de  $A(v)$  est l'énergie de déformation, le second, le potentiel des forces extérieures; la différence est l'énergie potentielle. Pour chaque fonction  $v$ , l'énergie potentielle  $A(v)$  prend une valeur numérique déterminée. La fonctionnelle  $A$  atteint son minimum à l'état d'équilibre.

Il est facile de montrer que les deux problèmes posés possèdent la même solution. Du point de vue numérique, il est plus avantageux de considérer le problème de minimum. En effet, la solution du problème de minimum peut posséder moins de régularité que la solution du problème différentiel.

## 2.2 Modèle discret de la corde élastique

Supposons que l'on désire résoudre l'exemple de la corde élastique par une méthode numérique en utilisant une calculatrice. Nous allons modifier le problème donné en un problème discret. Ce nouveau problème est une approximation du modèle mathématique continu, mais constitue néanmoins un problème différent. Donnons tout d'abord une idée générale de sa construction.

Dans le problème de minimum que nous avons énoncé, il s'agit de déterminer une fonction  $\bar{u}$  rendant minimum la fonctionnelle  $A(u)$ , la fonction  $\bar{u}$  devant, en outre, satisfaire à un certain nombre de conditions aux limites. La solution est une fonction réelle  $\bar{u}$  définie sur l'intervalle  $[0,1]$ . La calculatrice n'est pas en mesure de traiter toute l'information relative à  $\bar{u}$  car elle ne peut traiter qu'un nombre fini de points de l'intervalle. Il est ainsi nécessaire de transformer le problème initial en un problème discret ne comportant qu'un nombre fini d'inconnues. La solution de ce nouveau problème ne sera en général qu'une «approximation» de la solution du problème initial.

Dans le problème discret, nous allons rechercher une fonction rendant minimum la fonctionnelle  $A$ , non pas sur l'ensemble de toutes les fonctions appartenant à l'ensemble  $V$ , mais sur un sous-ensemble bien particulier que nous définissons maintenant.

On divise l'intervalle  $[0,1]$  en  $N$  parties égales de longueur  $h := \frac{1}{N}$ . La fonction  $v_d$  est alors définie comme suit: on prescrit aux nœuds  $x_i := ih$ ,  $i = 0(1)N$ , des valeurs arbitraires  $v_i$  de la fonction  $v_d$ ; de plus, sur chaque élément  $[x_i, x_{i+1}]$ , la fonction  $v_d$  est une droite qui satisfait aux conditions prescrites aux nœuds (voir fig. 2). Notons  $V_d$  l'ensemble des fonctions  $v_d$ ; c'est un sous-ensemble de  $V$  en ce sens que chaque fonction  $v_d$  appartient à  $V$ .

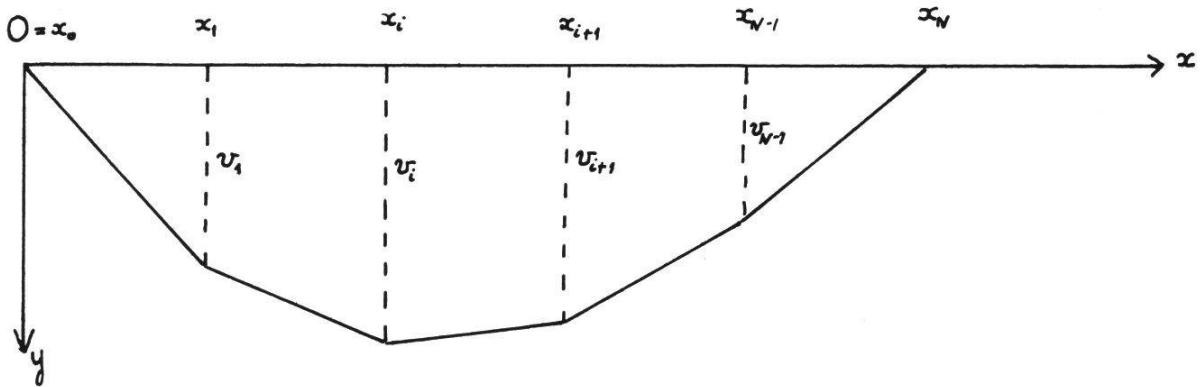


Fig. 2: Fonction  $v_d$

La discrétisation du problème de minimum s'énonce: déterminer  $\bar{u}_d \in V_d$  tel que

$$A(\bar{u}_d) \leq A(v_d) \text{ pour toute fonction } v_d \in V_d,$$

où

$$A(v_d) := \frac{1}{2} \int_0^1 v_d'^2(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

La formulation suivante est équivalente: déterminer  $\bar{u}_d \in V_d$  tel que

$$\int_0^1 v_d'(x) \bar{u}_d'(x) dx - \int_0^1 v_d(x) f(x) dx = 0 \text{ pour toute fonction } v_d \in V_d.$$

A ce stade, on peut effectuer les calculs.

Le premier terme peut s'exprimer comme une somme portant sur tous les éléments;

$$\int_0^1 v_d'(x) \bar{u}_d'(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_d'(x) \bar{u}_d'(x) dx.$$

De plus,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_d'(x) \bar{u}_d'(x) dx = \left[ \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right] \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] h.$$

Les paramètres  $u_i$  et  $v_i$  interviennent sous forme de produit. On formerait même l'expression de l'intégrale pour chacun des  $N$  éléments; la somme des contributions peut être décrite sous forme d'un tableau de  $N-1$  lignes à  $N-1$  colonnes (voir fig. 3). Dans ce tableau, le coefficient de  $v_i u_j$  se trouve à l'intersection de la  $i^{\text{e}}$  ligne et de la  $j^{\text{e}}$  colonne.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	...	$u_{N-1}$
$v_1$	2	-1				
$v_2$	-1	2	-1			
$v_3$		-1	2	-1		
...						
$v_{N-2}$					-1	2
$v_{N-1}$						-1 2

$\cdot \frac{1}{h}$

Fig. 3: Tableau B

Le premier terme prend ainsi la forme

$$\int_0^1 v_d(x) u_d(x) dx = \vec{v}^T B \vec{u},$$

où

$$\vec{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_{N-1}], \quad \vec{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}].$$

Le second terme s'écrit

$$\int_0^1 v_d(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_d(x) f(x) dx.$$

De plus,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_d(x) f(x) dx = v_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x-x_{i+1}}{h} dx + v_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x-x_i}{h} dx.$$

En sommant la contribution de tous les éléments, on obtient

$$\int_0^1 v_d(x) f(x) dx = \vec{v}^T \cdot \vec{f},$$

où

$$\vec{v}^T := [v_1, v_2, \dots, v_{N-1}], \quad \vec{f}^T := [f_1, f_2, \dots, f_{N-1}],$$

$$f_i := \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x-x_{i-1}}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x-x_{i+1}}{h} dx, \quad i = 1(1)N-1.$$

La discrétisation du problème de minimum s'énonce: déterminer  $\vec{u}$  tel que  $\vec{v}^T B \vec{u} - \vec{v}^T \vec{f} = \vec{0}$  pour tout  $\vec{v}$ .

On en déduit le système de N-1 équations à N-1 inconnues

$$B \vec{u} = \vec{f},$$

que l'on résout par élimination.

x	Solution exacte u(x)=sin πx	Solution approchée		
		N = 8	N = 16	N = 32
1/8	0.382	0.378	0.381	0.382
1/4	0.707	0.698	0.705	0.707
3/8	0.923	0.912	0.921	0.923
1/2	1.000	0.987	0.997	0.999

tab.1 Corde élastique,  $-u''(x) = \pi^2 \sin \pi x$ ,  $x \in [0,1]$ ,  
 $u(0) = u(1) = 0$ .

L'exemple donné dans la table 1 soulève plusieurs questions. On peut se demander par exemple si la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque la dimension des éléments tend vers zéro. D'autre part, est-il possible de choisir des déplacements qui conduisent à de meilleures approximations que celles obtenues ici? Les réponses complètes sortiraient du cadre de cet exposé. Disons simplement qu'elles sont affirmatives.

Du point de vue pratique, cette méthode se laisse facilement automatiser. Le schéma de calcul se résume comme suit: 1) formation du tableau B et du vecteur  $\vec{f}$  en sommant les contributions des éléments; 2) obtention des déplacements  $\vec{u}$  par résolution du système linéaire  $B\vec{u} = \vec{f}$ .

### 3. Conclusion

L'exemple que nous venons de traiter appartient à la classe des problèmes différentiels linéaires avec conditions aux limites. La théorie de l'élasticité et les modèles classiques de la résistance des matériaux conduisent à des problèmes de ce type. On peut les traiter par la méthode des éléments finis.

De manière générale, on peut affirmer que grâce au développement des calculatrices, les méthodes de calcul au service des physiciens et des ingénieurs ont fait des progrès au cours de cette dernière décennie. La calculatrice constitue un outil puissant; elle permet, aussi bien à l'ingénieur qu'au physicien, de consacrer plus de temps à la compréhension des phénomènes physiques.