Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 64 (1975)

Heft: 1

Artikel: Zellulare Automaten

Autor: Kleisli, Heinrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-308514

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zellulare Automaten

von Heinrich Kleisli,
Mathematisches Institut der Universität Freiburg

Bei der Einführung in ein klassisches Gebiet der Mathematik pflegt man oft mit den Worten «Schon die alten Griechen wußten ...» zu beginnen. Für viele neuere Gebiete der Mathematik kann man eine ähnliche Formulierung finden, und die lautet: «Schon John von Neumann sagte ...».

Wer war *John von Neumann?* Vor zwei Jahrzehnten hätte man sich wohl so geäußert, daß es sich hier um den bedeutendsten unter den zeitgenössischen Mathematikern handelt, die es gewagt haben, sich von den klassischen Gebieten der Mathematik zu lösen, um solides und anwendungsreiches «Neuland» zu entdecken. Inzwischen ist John von Neumann leider gestorben. Aber seine Beiträge zu mathematischen Theorien wie der Spieltheorie, der Kybernetik und der Theorie der Automaten sind von derart wesentlicher Bedeutung, daß er von vielen Fachleuten als der Begründer von wenigstens zwei der erwähnten Theorien betrachtet wird.

Im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Konstruktion und Theorie von Computern hat John von Neumann sich folgendes Problem gestellt: Man beweise die Möglichkeit, einen sich selbst reproduzierenden Automaten herzustellen. Ein derartiger Automat würde, falls er die richtigen Instruktionen erhält, ein genaues Duplikat von sich selbst herstellen. Jeder der beiden Automaten würde dann wiederum einen neuen herstellen. Aus den vier würden acht werden, und so weiter.

Von Neumann gab einen ersten Beweis, indem er ein Modell eines kinematischen Automaten entwickelte, der tatsächlich in der Lage war, sich selbst zu reproduzieren. Ein *kinematischer Automat* ist nichts anderes als ein digitaler Computer, der zusätzlich zu den üblichen Computerelementen noch folgende Arten von Bestandteilen besitzt: kinematische, d. h. bewegungsfähige Elemente, wie z. B. eine künstliche Hand; Schneide-, Löt- und Schweißelemente; feste Elemente wie z. B. Träger und Stäbe; eine Art Sinnesorgan, das fähig ist, die erwähnten Arten von Elementen zu erkennen und die erlangte Information dem Computer weiterzuleiten. Man muß sich diesen Computer in einem geeigneten Umweltmilieu vorstellen, das bildhaft wie folgt beschrieben werden kann: Man denke sich eine unbegrenzt ausgebreitete Flüssigkeitsfläche, auf der eine unbeschränkte Anzahl der erwähnten Bestandteile verteilt ist, die sich nach der Art der Moleküle in einem Gas bewegen. Das Ganze soll so angelegt sein, daß der kinematische Automat, der selbst auf diesem «See» schwimmt, einen unbegrenzten Nachschub von Bestandteilen zur Verfügung hat.

Auf eine genauere und vollständigere Diskussion dieser Situation und auf die Beschreibung eines Modells eines sich selbst reproduzierenden Automaten soll hier nicht eingegangen werden. Einerseits wäre dies ein im Rahmen dieses Vortrages undurchführbares Unternehmen. Andererseits hat auch John von Neu-

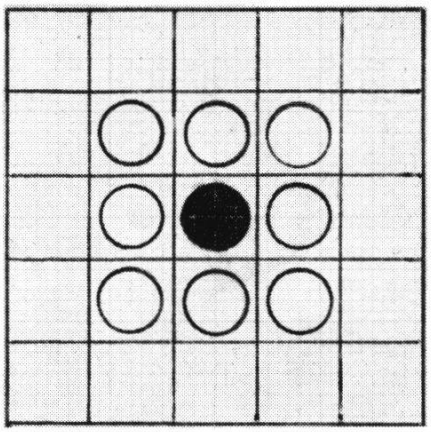
Bull. Soc. Frib. Sc. Nat. *64* (*1*), 12–19 (1975).

mann einen einfacheren zweiten Beweis gegeben. Dieser stützt sich auf eine Idee seines Kollegen *Stanislaw Ulam*, welche es ermöglicht, sich selbst reproduzierende Automaten auf elegantere, allerdings auch abstraktere Weise zu beschreiben. Der neue Beweis benützt zellulare Automaten, die übrigens auch zur Beschreibung kinematischer Automaten verwendet werden können. Ein *zellularer Automat* kann wie folgt definiert werden. Man benütze einen uniformen zellularen Raum, was im Zweidimensionalen und weniger gelehrt ausgedrückt nichts anderes ist als ein unendliches Schachbrett. Jede der Zellen – oder Felder – kann einen von endlich vielen vorgegebenen Zuständen haben, und diese Zustände werden beeinflußt von denjenigen endlich vieler Nachbarzellen. Eine Zustandskonfiguration wird in diskreten Zeitabschnitten geändert, und zwar unter Befolgung von vorgegebenen Regeln, welche sich simultan auf jede einzelne Zelle beziehen.

Ich bin mir bewußt, daß derartige allgemeine Beschreibungen nicht sehr zum Verständnis der Sache beitragen und möchte deshalb ein einfaches Illustrationsbeispiel entwickeln, welches zwar mit den von Neumannschen zellularen Automaten nur entfernt zu tun hat, jedoch sehr schöne und hilfreiche biologische Assoziationen erlaubt. Es handelt sich um eine Erfindung von *John Horton Conway*, einem Mathematiker an der Universität Cambridge, England. Seine Automaten können unter anderem im Rahmen eines Legespiels präsentiert werden, was wir ausnützen wollen. Dieses Spiel wurde übrigens von Conway mit dem – wie wir sehen werden sehr passenden – Namen «*Life*» benannt.

Um «*Life*» zu spielen, braucht man ein vergrößertes Schachbrett oder noch besser das Spielbrett des orientalischen Spiels *Go*. Das Spielbrett stellt dann einen Teil unseres uniformen zellularen Raumes dar. Ferner braucht man flache Spielsteine, um den Zustand einer Zelle festzulegen. Jede Zelle hat zwei Zustände, «lebendig» oder «tot». Ist sie lebendig, so wird dies mit einem eingelegten Spielstein bezeichnet, stirbt sie, so wird der Spielstein entfernt. Zustandskonfigurationen im Conwayschen Spiel treten somit als Ansammlung lebender Zellen, sogenannter Conwayscher Kreaturen auf. Die Änderung der Zustandskonfigurationen läßt sich durch eine Art genetischer Gesetze für Geburt, Tod und Überleben von Zellen beschreiben.

Zuerst wird der Begriff einer *Nachbarzelle* festgelegt. Jede Zelle hat acht Nachbarzellen, nämlich die vier orthogonal anliegenden und die vier diagonal anliegenden (siehe Figur 1).



Figur 1:
Jede Zelle (●) hat acht Nachbarzellen (○).

Die «genetischen Gesetze» lauten:

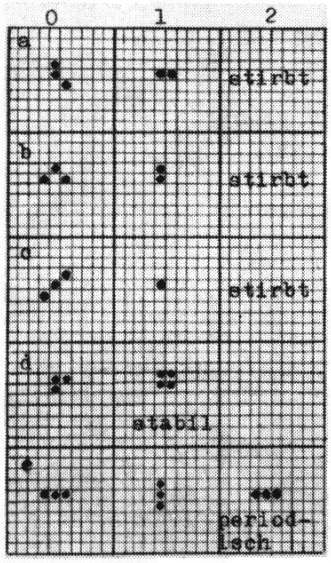
1. **Überleben.** *Jede lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarzellen überlebt für die nächste Generation.*

2. **Tod.** *Jede lebende Zelle mit vier oder mehr lebenden Nachbarzellen stirbt (Übervölkerung). Jede lebende Zelle mit nur einer oder keiner lebenden Nachbarzelle stirbt (Isolation).* Der betreffende Spielstein wird weggenommen.

3. **Geburt.** *Jedes leere Feld mit genau drei lebenden Nachbarzellen – nicht mehr und nicht weniger – ist eine Geburtszelle.* Für die nächste Generation wird ein Spielstein in das betreffende Feld gelegt.

Es ist sehr wichtig, daß genau verstanden wird, daß Geburt und Tod gleichzeitig auftreten und zusammen eine neue Generation in der Lebensgeschichte einer Conwayschen Kreatur bilden.

Zur Illustration der angegebenen Gesetze sehen wir uns in Figur 2 die Lebensgeschichte der *Trominos* – das sind zusammenhängende Kreaturen, die nur aus drei lebenden Zellen bestehen – an.



Figur 2:
Die Lebensgeschichte der fünf Trominos.

Es treten hier drei verschiedene Arten von Lebensgeschichten auf, nämlich 1. das Absterben, 2. das stabile Weiterleben, 3. das oszillierende Weiterleben. Es stellt sich die Frage, ob es noch andere, wesentlich verschiedene Arten von Lebensgeschichten gibt.

Bevor wir mit der Diskussion des Conwayschen Spiels weiterfahren, sei daran erinnert, daß wir dieses eigentlich nur eingeführt hatten, um den Begriff des zellularen Automaten zu illustrieren. Dieser wurde von John von Neumann benutzt, um seinen zweiten Beweis der Möglichkeit eines sich selbst reproduzierenden Automaten zu geben. Von Neumann benutzte einen zweidimensionalen zellularen Raum, in dem jede Zelle 29 Zustände erlaubt. Diese Zustände werden mittels ziemlich komplizierter Regeln durch die Zustände der vier – und nicht acht wie bei Conway – orthogonal anschließenden Nachbarzellen beeinflußt. Mit einem derartigen Modell beweist er nun die Existenz einer Konfiguration von etwa 200 000 Zellen, welche in der Lage ist, sich selbst zu reprodu-

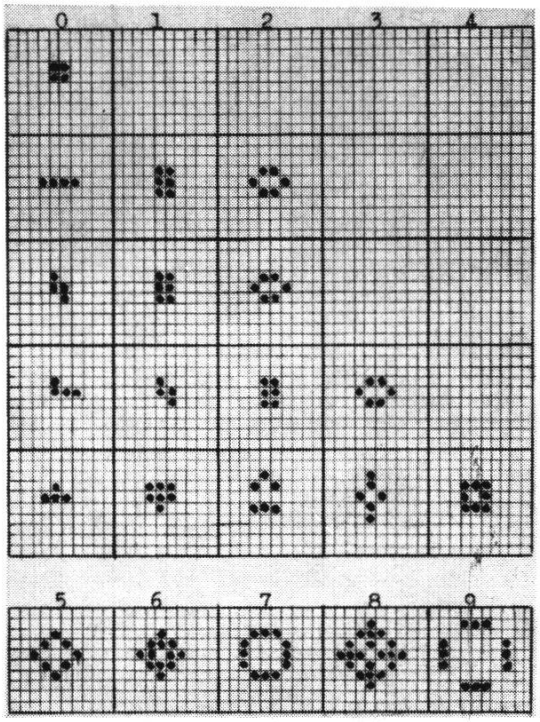
zieren. Der Grund für diese enorme Konfiguration ist der, daß die von Neumannsche Konstruktion auf reale kinematische Automaten Bezug nimmt und nicht auf einen beliebigen zellularen Automaten. Wenn man nämlich diese erschwerende Bedingung fallen läßt, ist es ziemlich einfach, einen sich selbst reproduzierenden zellularen Automaten anzugeben.

Zurück zu den Conwayschen Automaten oder Kreaturen oder, was auf dasselbe herauskommt, zum Legespiel «*Life*». Die genetischen Gesetze, welche in diesem Zusammenhang angegeben wurden, sind nicht willkürlich gewählt. Vielmehr hat Conway seine Regeln sorgfältig und nach vielem Experimentieren derart gewählt, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Es darf keine Kreatur geben, bei der sofort eingesehen werden kann, daß sie Anlaß zu unbegrenztem Wachstum gibt.
2. Es soll Kreaturen geben, die scheinbar ohne Grenzen wachsen.
3. Es soll Kreaturen geben, die über einige Generationen wachsen und sich ändern, bevor sie auf eine der folgenden drei Weisen enden: durch Tod, durch Stabilität oder durch Oszillation.

In andern Worten, die Spielregeln sollen so gewählt werden, daß es nicht zum Vorherein klar ist, wie die Lebensgeschichte einer jeden Kreatur aussieht.

Es sei in Figur 3 die Lebensgeschichte der fünf *Tetrominos* angegeben.

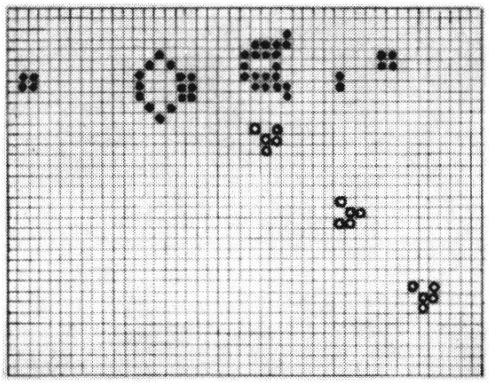


Figur 3:
Die Lebensgeschichte der fünf Tetrominos.

Was die Lebensgeschichte der zwölf *Pentominos* betrifft, so verschwinden sechs vor der fünften Generation, zwei erreichen eine stabile Form und drei werden in kurzer Zeit zur oszillierenden Form, welche wir bei den Tetrominos gefunden haben. Die Lebensgeschichte des übriggebliebenen Pentominos ist, soviel ich weiß, noch unbekannt. Conway hat seinerzeit 460 Generationen berechnet und auf Grund der dabei gesammelten Erfahrung die Vermutung ausgesprochen, daß die Kreatur allmählich absterben dürfte.

Die Lebensgeschichte der *Hexominos* ist vollständig bekannt, wogegen 1972 für die Lebensgeschichte der *Heptominos* diejenige von sieben Kreaturen noch ausstehend war.

Im Oktober 1970 setzte Conway einen Preis von 50 Dollars aus, falls jemand vor Ende des Jahres beweisen oder widerlegen könne, ob es in seinem Spiel unbegrenztes Wachstum gäbe. Der Preis wurde von einer Forschungsgruppe des «Artificial Intelligence Projects» an der M. I. T. gewonnen, welche eine – allerdings unzusammenhängende – Kreatur entdeckte, die wie in Figur 4 dar-



Figur 4:
Eine Pentomino-Quelle (schwarze Konfiguration).

gestellt aussieht und folgendes zu leisten fähig ist: Die schwarz gezeichnete Grundfigur hat eine Periode von 30 Generationen und produziert zusätzlich alle 30 Generationen einen – weiß gezeichneten – Pentomino, der sich mit konstanter Geschwindigkeit diagonal nach rechts unten bewegt.

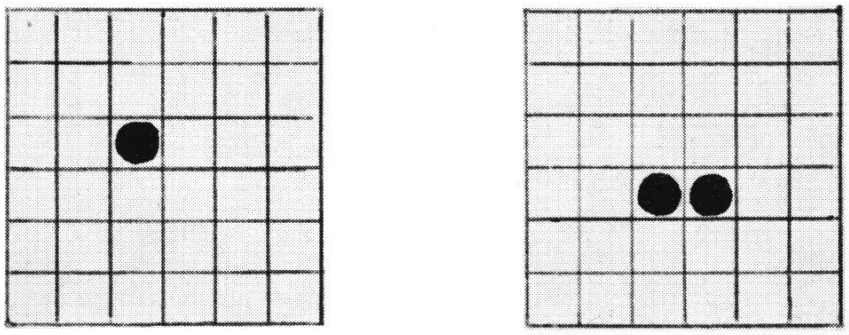
Die Existenz derartiger Pentomino-Quellen zeigt nun, daß im Conwayschen Spiel «*Life*» unbeschränktes Wachstum möglich ist. Sie legt aber auch die Frage nahe, ob mit Hilfe derartiger Pentomino-Quellen die Simulation einer Turingmaschine möglich wäre. Eine Turingmaschine ist ein universeller Computer, der im Prinzip in der Lage ist, jede Rechnung durchzuführen. Die Idee bestände darin, die wandernden Pentominos als Einheitsimpulse zu benützen, um Information zu übertragen. Wäre es möglich, eine Turingmaschine zu simulieren, dann wäre es nur ein kleiner Schritt zur Simulierung einer universellen Konstruktionsmaschine, woraus die Möglichkeit, einen sich selbst reproduzierenden Automaten herzustellen, folgen würde. Es handelt sich hier um ein meines Wissens zur Zeit noch offenes Problem.

Wir kommen nun zum letzten Problem, das im Rahmen dieses Vortrags behandelt werden soll. Es bezieht sich auf die Frage, ob es Zustandskonfigurationen gibt, welche nur als initiale Konfigurationen und nicht als Konfigurationen in einer späteren Generation der Lebensgeschichte einer Kreatur auftreten können. Bekanntlich sind angelsächsische Wissenschafter bibelbeschlagen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß der Name «*Garten-Eden-Konfiguration*» für derartige Zustandskonfigurationen eingeführt wurde. In der Tat handelt es sich ja hier um Formen, die ihre Existenz einer Art Schöpfungsakt verdanken.

Unsere Frage lautet: *Gibt es im Conwayschen Spiel Garten-Eden-Konfigurationen?* Die Beantwortung dieser Frage stellt ein keinesfalls triviales Problem. Man kennt meines Wissens zur Zeit noch keine explizit beschreibbare Garten-

Eden-Konfiguration [1]. Andrerseits weiß man, daß es derartige Konfigurationen gibt, und zwar auf Grund mathematischer Sätze aus der Theorie der zellularen Automaten. Ich möchte als Abschluß dieses Vortrags einen derartigen Satz anführen, welcher für beliebige zellulare Strukturen, d. h. beliebige zellulare Räume, vernünftige Umgebungsbegriffe und sehr allgemeine Regeln für die Zustandsänderungen gültig ist. Um diesen Satz in gehöriger Weise formulieren und beweisen zu können, müssen allerdings einige neue Begriffe eingeführt, beziehungsweise schon benützte Begriffe strenger gefaßt werden.

Eine *Konfiguration* ist gegeben durch eine Teilmenge S der zellularen Ebene Z^2 und eine Abbildung $f\colon S \longrightarrow \{0,1\}$, genannt *Figur* auf S. Zwei Konfigurationen (S, f) und (S, g) heißen *austauschbar*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. Die Teilmenge S ist endlich. 2. Die beiden Figuren f und g auf S sind verschieden (Figur 5). 3. Falls die beiden Konfigurationen durch ein- und dieselbe komplementäre Konfiguration auf die ganze Ebene ausgedehnt werden, so sollen die vervollständigten Konfigurationen in der nächsten Generation übereinstimmen.



Figur 5: Beispiel zweier im Conwayschen Spiel austauschbarer Konfigurationen.

Sei S eine Teilmenge der Ebene Z^2. Dann bezeichnet $N(S)$ die Vereinigung von S mit der Menge aller Nachbarzellen. Weiter stehe *Fig* S beziehungsweise *Fig* $N(S)$ für die Menge aller Figuren auf S beziehungsweise auf $N(S)$. Schließlich bezeichnen wir mit

$$F_S\colon \mathit{Fig}\ N(S) \longrightarrow \mathit{Fig}\ S$$

die Funktion, welche jeder Figur auf $N(S)$ die durch sie eindeutig bestimmte Nachfolgefigur auf S zuordnet. Man spricht von einer *Garten-Eden-Konfiguration* (S,f), wenn die Figur f auf S kein F_S-Bild ist.

Satz von Moore (1962). *Aus der Existenz austauschbarer Konfigurationen folgt die Existenz von Garten-Eden-Konfigurationen.* Die Bedeutung dieses Satzes in bezug auf die Beantwortung unserer Frage ist klar: Wie wir in einem einfachen

[1] Es ist mir kürzlich mitgeteilt worden, daß inzwischen eine explizit angebbare Garten-Eden-Konfiguration gefunden worden ist.

Beispiel (siehe Figur 5) gesehen haben, gibt es im Conwayschen Spiel austauschbare Konfigurationen. Somit gibt es auch Garten-Eden-Konfigurationen. Wie die nun aussehen – dies ist eine andere Frage. Da der Beweis des Satzes von Moore mit elementaren Mitteln gegeben werden kann, wollen wir unsere Betrachtungen mit einer Beweisskizze für diesen Satz abschließen.

Beweis: Die Ausgangslage bildet die Vorgabe zweier austauschbarer Konfigurationen (Q,f) und (Q,g). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Teilmenge Q ein Quadrat ist. Sei q die Seitenlänge des Quadrats und k eine später näher zu bestimmende natürliche Zahl. Wir bilden ein Quadrat S der Seitenlänge $kq-2$. Dann ist $N(S)$ ein Quadrat der Seitenlänge kq. Wir wollen zeigen, daß für eine genügend groß gewählte Zahl k die Abbildung

$$F_S \; Fig \; N(S) \longrightarrow Fig \; S$$

nicht subjektiv sein kann; d. h., daß es mindestens eine Figur auf S gibt, welche kein F_S-Bild ist. Bezeichnen wir mit a die Anzahl der möglichen Figuren auf S und mit b die Anzahl der verschiedenen Bilder von Figuren auf $N(S)$, dann ist zu zeigen, daß $b < a$. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß

$$a = 2^{(kq-2)^2} \quad \text{und } b \leqslant (2^{q^2}-1)^{k^2},$$

so daß es genügt, sich die Aufgabe zu stellen, für ein passendes k die Ungleichung

$$(2^{q^2}-1)^{k^2} < 2^{(kq-2)^2}$$

zu beweisen. Es kommt offenbar auf dasselbe hinaus, wenn wir die Ungleichung

$$k^2 \log_2 (2^{q^2}-1) < (kq-2)^2$$

oder die Ungleichung

$$\frac{1}{2^q} \log_2 (2^{q^2}-1) < \left(1-\frac{2}{kq}\right)^2$$

behandeln.

Wir setzen

$$r = \frac{1}{q^2} \log_2 \left(2^{q^2}-1\right)$$

und erhalten

$$r < \frac{1}{q^2} \log_2 2^{q^2} = \frac{q^2}{q^2} = 1.$$

Nun gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{2}{kq}\right)^2 = 1.$$

Somit gibt es ein genügend großes k, so daß

$$r < \left(1 - \frac{2}{kq}\right)^2 < 1,$$

woraus die gesuchte Ungleichung

$$\frac{1}{q^2} \log_2 \left(2^{q^2} - 1\right) < \left(1 - \frac{2}{kq}\right)^2$$

folgt.

Literatur:

BURKS, A. W. (Editor): Essays on cellular automata. Univ. of Illinois Press 1970.

GARDNER, M.: Verschiedene Artikel mit Bemerkungen über Conway's Spiel. Scientific American, Okt. 1970, Nov. 1970 und Febr. 1971.

MARKWALD, W.: Die Garten-Eden-Theoreme für Legespiele. Math.-phys. Sem. ber. *20* (1973).