

Les entrelacs dans les arts et les sciences naturelles

Autor(en): **Weber, Claude**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles =
Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg**

Band (Jahr): **78 (1989)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-308685>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Les entrelacs dans les arts et les sciences naturelles

par CLAUDE WEBER,
Université de Genève, Section de Mathématiques,
2-4, rue du Lièvre, Case postale 240, 1211 Genève 24

1. Nœuds usuels et traditionnels

On obtient un nœud en prenant un morceau de ficelle, ou une corde, une liane que l'on emmêle d'une certaine façon, puis que l'on serre. Le but d'une telle opération est d'attacher, de rendre solidaires certains objets. C'est le cas des nœuds effectués par les marins et les chirurgiens par exemple. Le nœud gordien était, selon la tradition, destiné à attacher le timon au char du roi dans la ville de Gordes en Asie-Mineure. Un nœud peut aussi avoir un intérêt propre, sans que d'autres objets interviennent; c'est le cas pour les tricots, les tissages, etc. L'art populaire des nœuds consiste à savoir faire le nœud approprié au but recherché. Cela peut demander de l'habileté et des connaissances. Il existe d'imposants répertoires de nœuds usuels, souvent consacrés aux nœuds employés dans la marine à voiles. Le plus célèbre est le «Ashley book of knots».

Mais, de toute façon, un nœud tel que nous venons de l'envisager peut toujours être défait. Le truc consiste à chercher l'une des deux extrémités et à tirer en arrière, petit à petit. De la patience et de la force peuvent être nécessaires.

2. Les nœuds dans les mythologies

L'idée suivante est très répandue, et cela depuis longtemps: l'opération de dénouement d'un nœud a une signification qui va bien au-delà du succès d'une technique. Les psychologues sont très sensibles à cette façon de voir les choses. D'ailleurs, les deux sens du mot «dénouement» ne sont-ils pas intimement liés? Une variante de ce que nous venons de dire consiste en ceci: un nœud recèlerait un certain secret, une certaine parcelle de connaissance. Celui qui dénoue le nœud s'approprie ce savoir. Plus prosaïquement, les «quipus» incas étaient des registres de nœuds destinés, pensent les spécialistes, à faire des comptes, des recensements. Ils contenaient donc une information certaine.

Dans son livre «Tabou et les périls de l'âme» James G. Frazer cite de nombreuses coutumes où le travail effectué par celui qui dénoue un nœud est un véritable parcours initiatique. Frazer attache beaucoup d'importance à ces coutumes et les traite comme un véritable outil de mythologie comparée. Ce point de vue est repris et amplifié par Georges Dumézil qui fait des nœuds un des attributs magiques du dieu Varuna, dieu que l'on retrouve dans d'autres mythologies sous la forme d'Ouranos, de Jupiter ou d'Odin. Voir: «Les dieux souverains des Indo-Européens» de G. Dumézil. Un cha-

pitre du livre de Mircea Eliade «Images et symboles» est aussi consacré à ces questions. Le dieu magicien ne combat pas les humains par la force; il les «charme» en les liant à l'aide de nœuds.

De toutes façons, je crois pouvoir dire que, dans les mythologies, les nœuds apparaissent aux points de contact entre le monde des dieux et le monde des hommes. Ceci est particulièrement clair dans le mythe du nœud gordien. Le mathématicien français Bernard Teissier exprime les choses un peu différemment en disant: «Les nœuds sont le langage par lequel les dieux parlent aux hommes.»

Pour un topologue, la constatation suivante est un peu décevante: en général (mais pas toujours) les nœuds apparaissent dans les pratiques magiques, rituelles, de façon générique: n'importe quel nœud fait l'affaire. Le point de vue «tel nœud est bénéfique tandis que tel autre est maléfique» semble la plupart du temps absent. Les coutumes rapportées par J. Frazer vont dans ce sens. Par exemple, dans certaines peuplades quand une femme va accoucher on défait tous les nœuds qui se trouvent dans la maison, sans exception. Un bouddhiste qui veut accéder au Nirvana doit se libérer de tous les liens qui le rattachent au monde terrestre; concrètement, il ne porte aucun nœud sur lui.

3. Les entrelacs en mathématiques

En première approximation, la topologie est la partie des mathématiques qui considère deux objets de l'espace comme équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre continûment, sans déchirure. Ainsi, pour un topologue, deux morceaux de ficelle sont toujours équivalents puisque le procédé de dénouement dont nous avons parlé plus haut ne rompt pas la ficelle. Alexandre le Grand n'était pas topologue.

On voit donc que, pour empêcher un topologue de dénouer une corde, il faut en supprimer les extrémités en faisant une épissure. Mathématiquement, un nœud est une courbe dans l'espace en une seul tenant (on dit qu'elle connexe) et sans extrémités (on dit qu'elle est compacte et sans bord). Un entrelacs est une réunion finie de telles courbes, deux à deux disjointes. On considère deux entrelacs comme équivalents (on dit isotopes) si l'on peut déformer continûment l'un en l'autre, sans déchirure. (La définition précise est trop technique pour être donnée ici.)

Une représentation graphique d'un entrelacs est obtenue en le projetant sur un plan de façon à ce que l'image ne se recoupe qu'en des points doubles. En un point double, on indique quel brin se trouve dans l'espace au-dessous de l'autre en interrompant localement le brin inférieur. Ce procédé est utilisé par les artistes depuis qu'ils ont dessiné des entrelacs.

Remarque: A une représentation graphique, il ne correspond pas un entrelacs bien défini dans l'espace (il faudrait pour cela deux projections) mais toute une famille d'entrelacs. Cependant, deux entrelacs de la famille sont toujours isotopes. De sorte que, si l'on veut faire de la topologie, une seule représentation graphique suffit pour se donner un entrelacs.

Attention: Suivant le contexte, il n'est pas toujours très clair dans le langage de tous les jours si les mots nœuds/entrelacs désignent une courbe dans l'espace ou une

représentation graphique particulière. Par exemple, «le sceau de Salomon» ou «les anneaux des Borromées» (Fig. 1) désignent des représentations graphiques explicites.

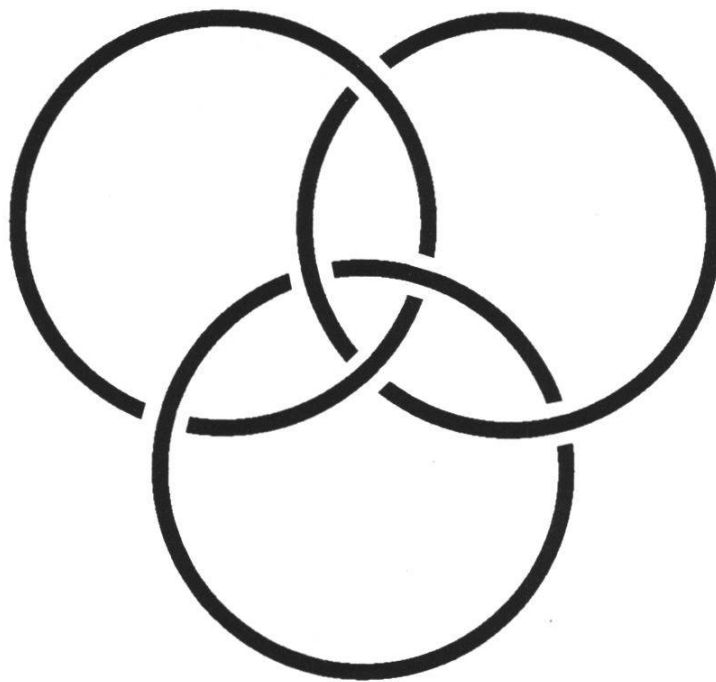


Fig. 1: L'entrelacs des Borromées.

4. Les entrelacs de Jacques Lacan

Le psychanalyste français Jacques Lacan s'est intéressé aux entrelacs et a entraîné dans son sillage plusieurs disciples. Plutôt que d'esquisser une théorie que je ne maîtrise pas, je préfère donner une illustration de l'usage des entrelacs fait par cette école. (Je ne sais pas s'ils se reconnaîtront dans ce qui suit.) Il arrive qu'un groupe d'individus (disons une équipe sportive) soit lié par une certaine activité, mais que ce groupe se disperse si l'un quelconque de ses membres se retire. On peut alors essayer de décrire les liens qui existent entre les membres de ce groupe par un entrelacs, chaque composante de l'entrelacs représentant un membre de l'équipe. Ceci prend encore plus de poids si l'on sait que, pour J. Lacan, le signe n'est pas arbitraire. La propriété de «dispersion» se traduit par la propriété topologique suivante: si l'on supprime une composante quelconque de l'entrelacs, alors l'entrelacs résiduel peut être entièrement défait. Un tel entrelacs est appelé brunnien, du nom du mathématicien H. Brunn qui a le premier étudié cette propriété à la fin du XIX^e siècle. L'entrelacs des Borromées est un entrelacs à trois composantes qui est «brunnien». Bien sûr, on peut varier les combinaisons: les individus restent groupés si l'un des membres s'en va, mais se dispersent si un deuxième quitte le groupe. On peut aussi ajouter des individus ayant des propriétés particulières, etc. J. Lacan a aussi utilisé les entrelacs pour représenter certains concepts de psychanalyse (Le «nœud du fantasme»).

5. Des physiciens à l'origine de la théorie des nœuds

A la suite des travaux de H. Helmholtz sur l'écoulement des fluides incompressibles et sans viscosité, les physiciens Peter G. Tait et William Thomson (le futur Lord Kelvin) ont tenté vers la fin des années 1860 d'établir une théorie atomique de la matière basée sur l'hypothèse que les atomes sont constitués par des nœuds de l'éther, le nœud étant une ligne de vortex selon la théorie de Helmholtz. Cette théorie s'est heurtée à de grandes difficultés physiques et mathématiques de sorte que ses initiateurs ont rapidement abandonné cette piste. Cependant P. Tait a continué ses investigations sur la théorie des nœuds et il peut être à juste titre considéré comme le véritable fondateur de la théorie des nœuds. Il faut ajouter que James C. Maxwell (à la suite de Carl F. Gauss) avait découvert certaines notions de base concernant les entrelacs (comme le coefficient d'enlacement) lors de ses recherches sur l'électrodynamique et qu'il en avait fait bénéficier son ami P. Tait.

6. Les Pictes et les manuscrits irlandais

A partir de l'an mille avant Jésus-Christ, les Celtes ont envahi l'Europe occidentale par vagues successives. Leur art ornemental est très caractéristique et se distingue par une abondance d'arabesques (que l'on devrait appeler des «celtiques»). Une partie des Celtes se sont établis en Grande-Bretagne; sous la poussée romaine ils se sont repliés en Ecosse puis en Irlande. Peut-être au contact des populations qui se trouvaient là auparavant, ces Celtes ont développé une forme d'art unique qui a frappé les Romains à tel point qu'ils leur ont donné le nom de Pictes (Picti = ceux qui dessinent). Ils nous ont transmis des bijoux extraordinairement ciselés (la broche de Tara, par exemple), des pierres gravées et les fameux «manuscrits irlandais», dont les plus anciens remontent au VIII^e siècle. Il s'agit de manuscrits des Evangiles abondamment illustrés par des entrelacs extrêmement complexes. Il en existe quelques dizaines en Europe, le plus célèbre étant le «Book of Kells», précieusement conservé à Dublin après avoir subi bien des aventures.

Voir: «The Book of Kells. Reproductions from the manuscript in Trinity College (Dublin) with a study of the manuscript» par Françoise Henry. Thomas and Hudson: London 1976.

«Celtic art. The methods of construction» par Georges Bain. Constable: London.

Trois volumes de la collection Zodiaque intitulés «L'Art irlandais», malheureusement presque épuisés.

7. Les entrelacs chez les Arabes

Comme les Pictes, les Arabes ont développé un art ornemental abstrait qui utilise abondamment les entrelacs (mais pas exclusivement). On retrouve des entrelacs dans les palais et les mosquées, représentés dans le bois des plafonds, la pierre des parois, les

croisillons des fenêtres, la marqueterie des portes, etc. Ils sont d'une facture très différente des entrelacs pictes, moins «sauvages», plus disciplinés, du moins en apparence.

Bien sûr, le mieux est de pouvoir admirer les bâtiments originaux, qui sont répandus tout autour de la Méditerranée. A défaut, il existe de bons livres de reproductions. Je recommande «L'art arabe» de Prisse d'Avennes, édité en 1869, et réédité depuis.

Attention: Les manuscrits arabes, très richement illustrés, ne contiennent en général pas d'entrelacs.

8. La notion d'enchevêtrement

Il y a un principe (non explicité mais néanmoins bien présent) caché dans l'utilisation des entrelacs par les artistes: On ne dessine pas un nœud au hasard.

Remarque: Construire un nœud «au hasard» est un concept intéressant en soi; il a des applications potentielles, en chimie des polymères par exemple.

Bien au contraire, les artistes dessinent des nœuds/entrelacs organisés, structurés. Cette structure est, en fait, mathématique. Dans ce qui suit, je vais essayer de dégager une partie de cette structure mathématique, basée sur la notion d'enchevêtrement et de combinaison d'enchevêtrements.

Ces notions ont été introduites par le mathématicien John Conway vers 1970 sous le nom de «tangles» et «tangles moves». En toute généralité un enchevêtrement consiste en la donnée d'une boule dans l'espace; en plus cette boule contient un certain nombre d'arcs (un arc se matérialise par un morceau de ficelle dont les extrémités sont dans le bord de la boule) et, éventuellement, un entrelacs.

Etant données deux enchevêtrements, on peut les additionner de la façon suivante:

1. On choisit une face dans le bord de chaque boule, de façon que chaque face contienne le même nombre d'extrémités d'arcs.
2. On recolle les deux boules le long des faces choisies de façon que l'extrémité d'un arc dans une face corresponde à l'extrémité d'un arc dans l'autre face.

Bien sûr, on peut répéter l'opération en utilisant un troisième enchevêtrement, puis un quatrième, etc.

Ces procédés ont des analogues à deux dimensions, qui permettent d'additionner les représentations graphiques d'enchevêtrements. C'est cette technique qui est utilisée par les Pictes et par les Arabes. Elle admet un certain nombre de variantes, de sorte que nous n'entrons pas plus avant dans les détails.

Il est clair que le résultat final va dépendre de deux facteurs: des enchevêtrements choisis initialement, qui vont jouer le rôle de «motifs» et de la combinatoire sous-jacente aux additions. On peut représenter cette combinatoire, en tout cas partiellement, par un graphe.

La combinatoire utilisée par les Arabes est très intéressante. Elle est associée à des pavages du plan, provenant très souvent de groupes de symétrie. C'est pourquoi il y a en général un bord chez les Arabes, qui représentent un enchevêtrement plutôt qu'un entrelacs; l'enchevêtrement n'étant qu'une vue partielle de l'entrelacs infini qu'on ne peut pas voir en entier.

La combinatoire utilisée par les Pictes est plus simple, mais les motifs sont plus complexes. Les Pictes font en sorte que le résultat final soit sans bord; ils obtiennent un véritable entrelacs après un nombre fini d'opérations.

Je conseille au lecteur intéressé de se reporter aux ouvrages conseillés et d'essayer de voir la structure sous-jacente à certaines reproductions.

9. Quelques exemples

1) La figure 2 est un enchevêtrement à deux dimensions. La «boule» est un triangle rectangle. Elle contient deux arcs.

Ensuite, on combine quatre exemplaires du même enchevêtrement de façon à obtenir un carré. Pour cela, on dessine les deux diagonales d'un carré; elles partagent le carré en quatre triangles rectangles.

Pour obtenir la projection d'un entrelacs dans l'espace, les Pictes commencent par dédoubler les courbes afin de rendre la configuration plus complexe. Ensuite, ils rendent la projection alternée, c'est-à-dire: lorsqu'on suivra un brin, on passera alternativement dessus et dessous à chaque croisement. Sur l'original, le dessin ne fait que quelques millimètres de diamètre.



Fig. 2: Enchevêtrement à deux dimensions.

2) La figure 3 est un dessin effectué par Georges Bain, reproduisant fidèlement une des enluminures du livre de Kells. Ici, d'autres procédés que les combinaisons d'enchêvements sont utilisés.

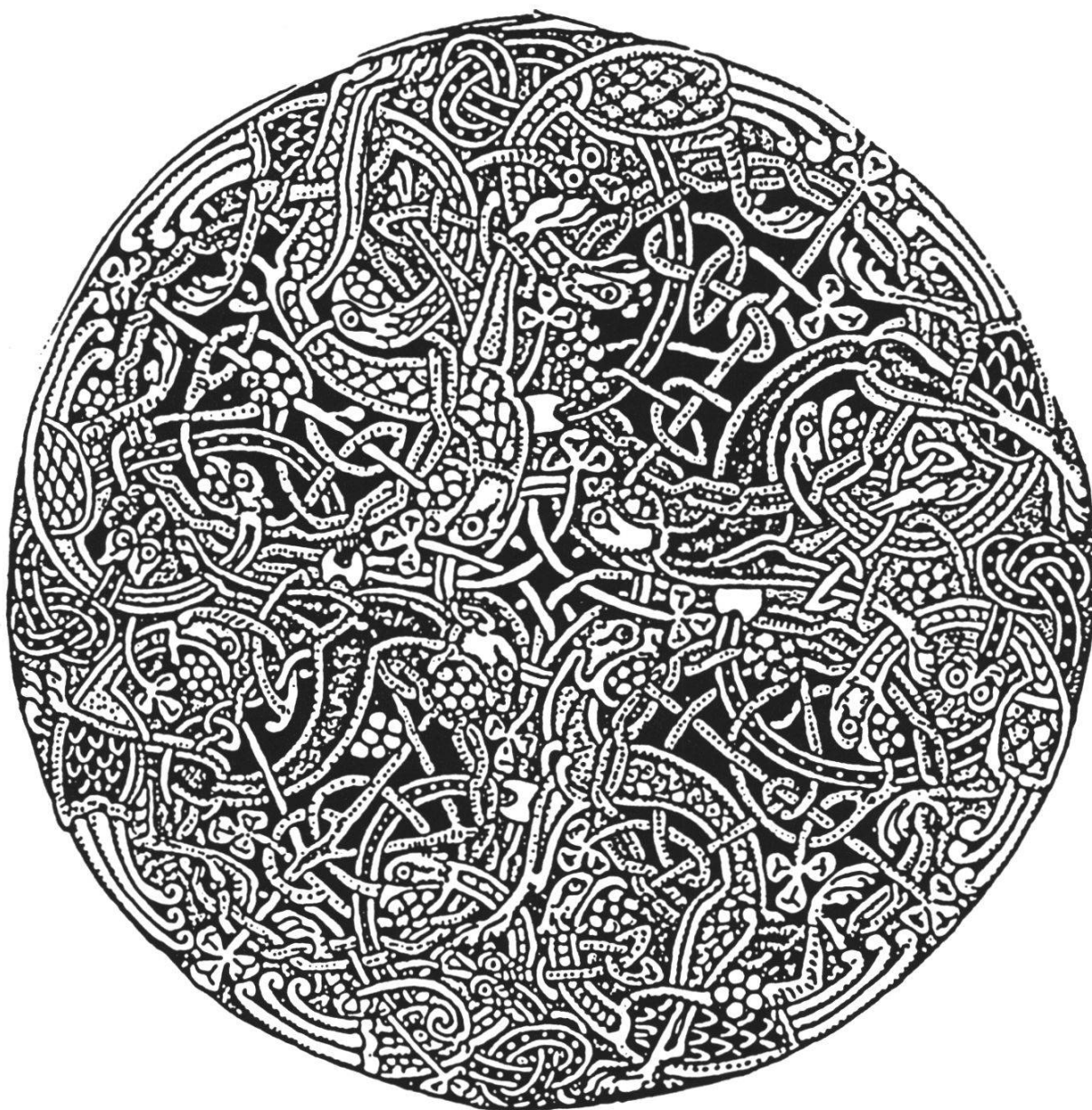


Fig. 3: Une des enluminures du livre de Kells.

3) Voici un enchevêtrement utilisé par les Arabes. La boule est représentée dans le plan par un triangle équilatéral (Fig. 4).

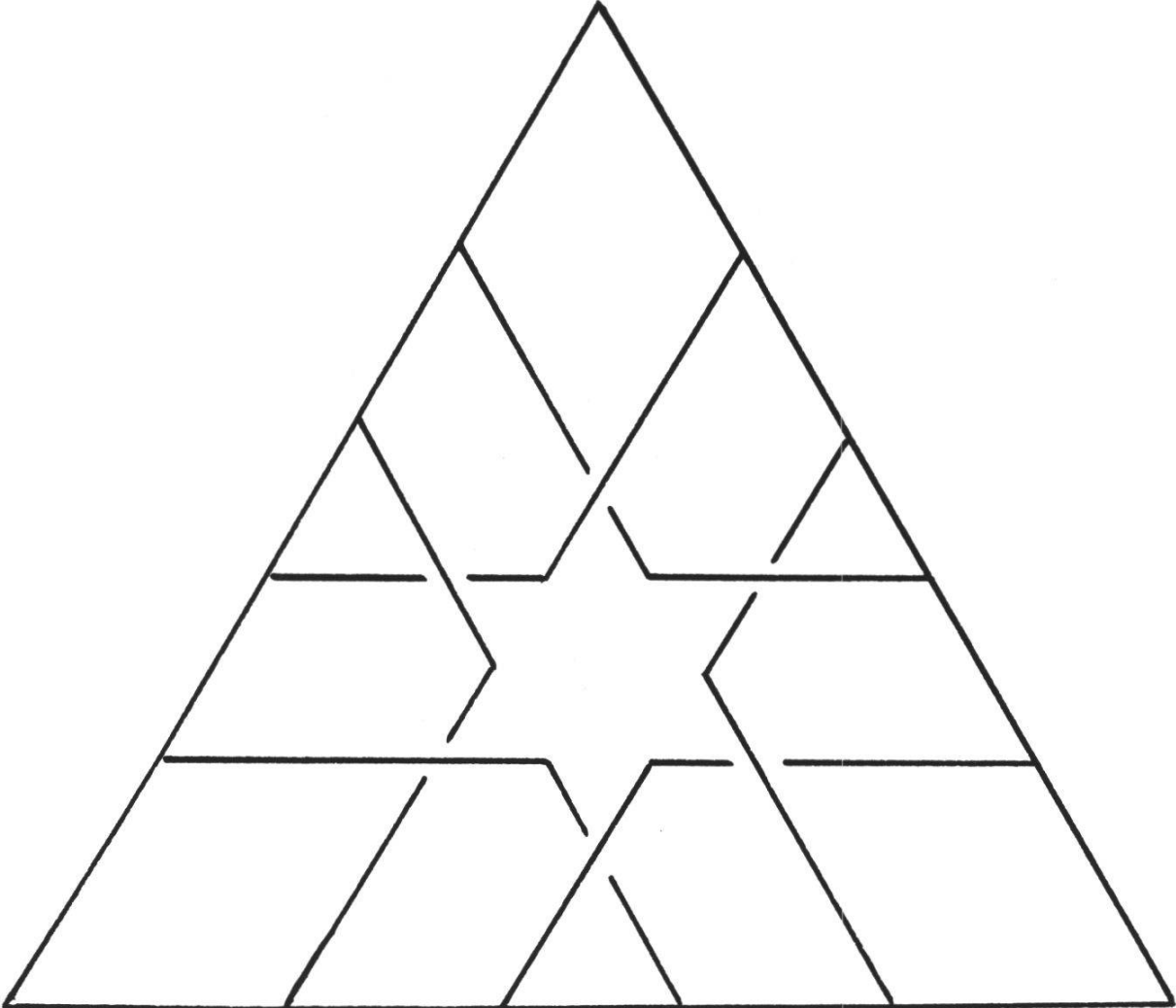


Fig. 4: Enchevêtrement utilisé par les Arabes.

Ensuite, les Arabes considèrent un pavage du plan par des triangles équilatéraux (issu d'un réseau hexagonal). Ils remplissent chaque triangle par une copie de l'enchevêtrement de la figure 4.

4) Voici une construction arabe plus subtile. La figure 5 représente un enchevêtrement dont la boule est représentée dans le plan par un rectangle.

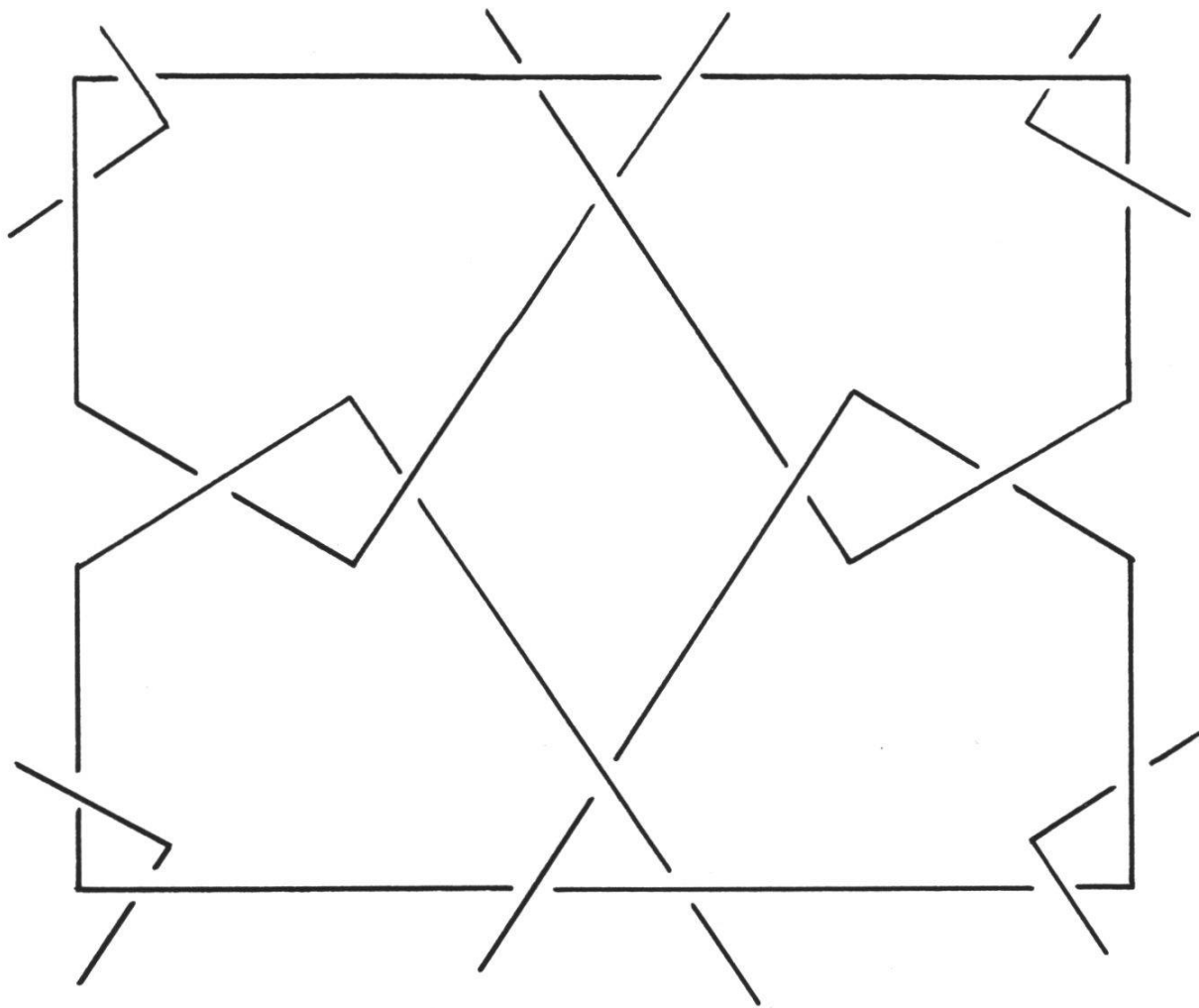


Fig. 5: Un autre enchevêtrement arabe. Pour simplifier le dessin, on n'a pas dessiné le bord de la boule.

Ensuite, les Arabes considèrent un pavage du plan par des rectangles en quinconce, suivant le schéma de la figure 6 et remplissent chaque rectangle par une copie de l'enchevêtrement de la figure 5.

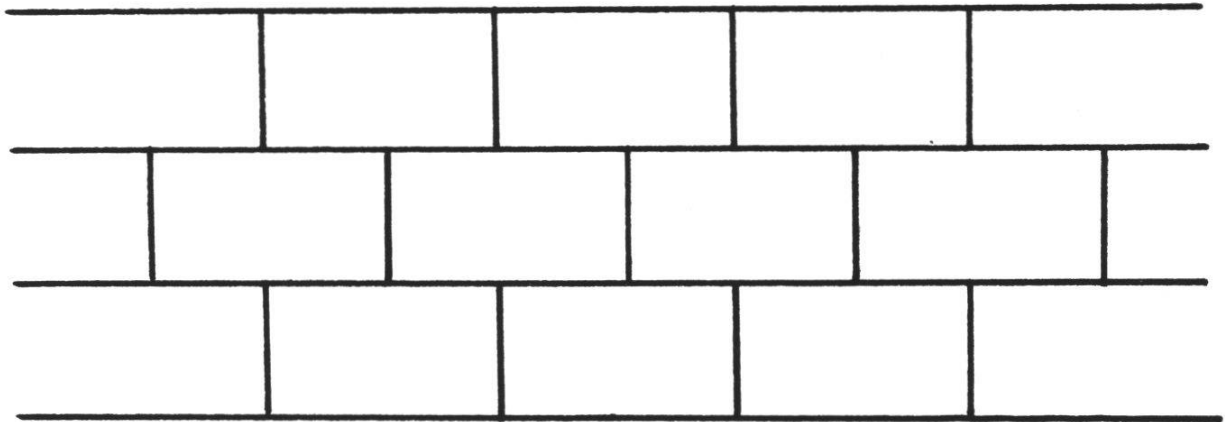


Fig. 6: Pavage du plan par des rectangles.

10. L'ADN

Selon le modèle proposé par Francis Crick et James Watson, l'ADN se présente comme une hélice à deux brins. Des considérations chimiques permettent d'orienter chacun des brins en suivant l'ordre dans lequel se succèdent les sucres et les phosphates. Les deux brins de l'hélice sont alors orientés de façon opposée. On pense actuellement que le modèle en double hélice n'est valable que localement et sans la présence d'agents «extérieurs» (chimiques ou physiques).

Mathématiquement, on peut représenter grossièrement un segment d'ADN à deux brins par un rectangle long et mince. L'âme du rectangle représente l'axe de l'hélice et les deux longs côtés du rectangle représentent les deux brins d'ADN.

La plupart des virus et des prokaryotes ont un ADN dont l'âme se referme pour former une courbe sans extrémités dans l'espace. (La situation est beaucoup plus compliqués chez les eukaryotes.) L'ADN est alors un ruban dans l'espace et non un ruban de Moebius à cause des orientations chimiques sur le bord.

Les biologistes pensent que, *in vivo*, l'âme du ruban est une courbe en général non nouée dans l'espace. Cependant, le bord du ruban est un entrelacs à deux composantes non banal; son coefficient d'enlacement est très grand.

Un problème très important à l'heure actuelle consiste à comprendre quelle est la forme (la géométrie) de l'ADN *in vivo* et de savoir quels facteurs déterminent cette forme.

11. Enzymes modifiant la topologie de l'ADN

Lors de certains processus biochimiques (comme la réplication ou la recombinaison) la topologie de l'ADN est modifiée, parfois de façon très importante (le coefficient d'enlacement peut provisoirement devenir nul). Par la définition même du mot «topologie», ceci ne peut être fait que brutalement, en cassant et en recollant différemment. On pense depuis quelques années que certains enzymes sont responsables de ces modifications. Les biologistes les ont baptisés topoisomérases et recombinases. Les mécanismes biochimiques précis selon lesquels ces opérations sont effectuées ne sont pas connus. Mais, dans certains cas, c'est-à-dire pour certains enzymes, on a pu observer, au moyen d'expériences très ingénieuses, quelle modification de la topologie est effectuée par un enzyme donné. En quelques mots: on a pu «voir» (via microscopie électronique) que l'enzyme modifie in vitro des nœuds d'ADN d'un certain type en des nœuds d'un certain autre type.

Le modèle suivant a été proposé par le topologue De Witt Sumners; il ne préjuge pas de l'action spécifiquement biochimique. On représente l'enzyme par une boule dans l'espace. La partie de l'ADN interceptée par la boule est un enchevêtrement. Pour les processus étudiés, il est raisonnable de penser que cet enchevêtrement est composé de deux arcs. Dans plusieurs situations ces deux arcs sont orientés (par exemple lors de la «site specific recombination»). On suppose alors que l'action de l'enzyme consiste à remplacer cet enchevêtrement par un autre. Autrement dit, il effectuerait une modification d'enchevêtrement («tangle move»). Il est entendu que la partie de l'ADN qui est en dehors de la boule représentant l'enzyme est laissée intacte.

Le problème topologique qui se pose est alors le suivant: sachant que l'enzyme modifie tel nœud en tel nœud, quelles sont les modifications d'enchevêtrement susceptibles d'induire les transformations de nœuds observées?

D.W. Sumners a montré par exemple que, pour l'enzyme appelé TN3-resolvase, il y a une et une seule modification d'enchevêtrement compatible avec les expériences. Il a même pu faire une prédiction qui a été confirmée par une nouvelle expérience. La démonstration de D.W. Sumners utilise des résultats récents assez complexes de théorie des nœuds. La figure 7 représente l'action de TN3-resolvase proposée par D.W. Sumners. Noter que l'extérieur de la boule est non banal.

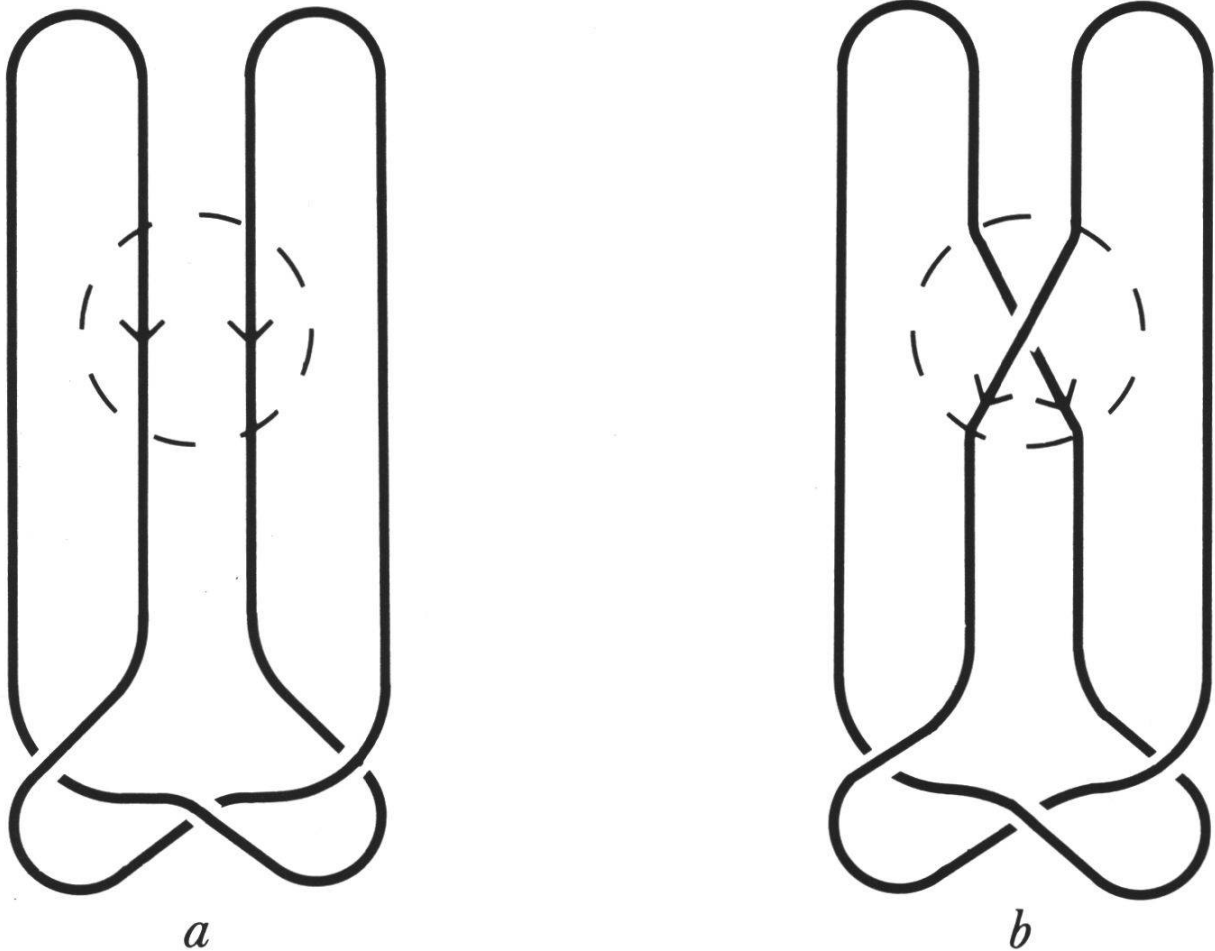


Fig. 7: Nœuds d'ADN
 a) avant l'action de l'enzyme TN3-resolvase,
 b) après l'action de l'enzyme TN3-resolvase.

12. Les polynomes de V. Jones

Les modifications d'enchevêtrement à deux arcs orientés les plus simples sont représentées sur la figure 8. Elles interviennent de façon essentielle dans les propriétés fondamentales des polynomes découverts par Vaughan Jones. Ces polynomes ont des liens étroits et encore mystérieux avec la mécanique statistique et la théorie quantique des champs. Ils donnent lieu actuellement à une grande activité entre physiciens théoriciens et mathématiciens.

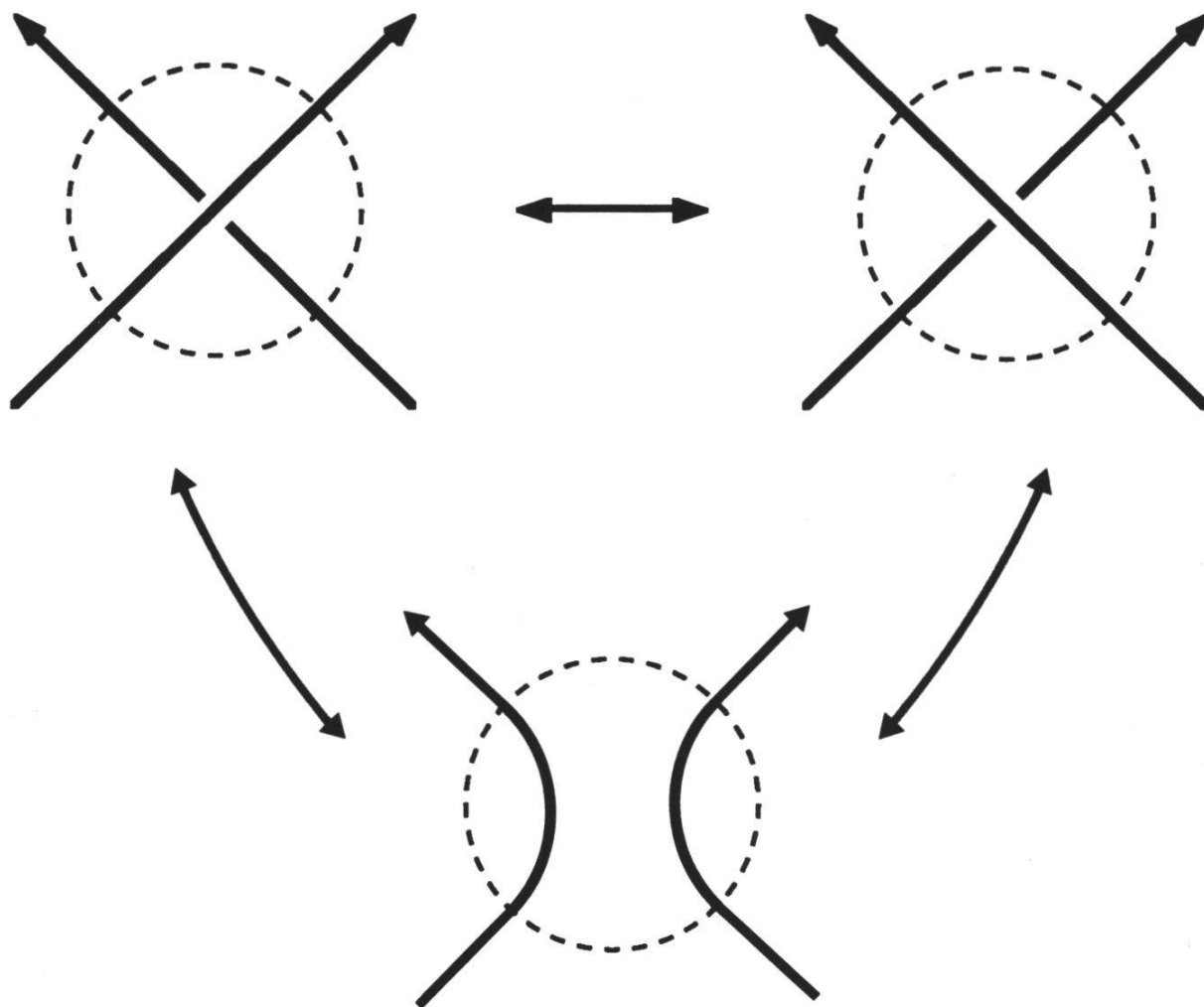


Fig. 8: Modifications d'enchevêtrement à deux arcs orientés.