

Fascinante interpolation

Autor(en): **Berrut, Jean-Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles =
Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg**

Band (Jahr): **83 (1994)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-308723>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Fascinante interpolation

par JEAN-PAUL BERRUT,
Institut de Mathématiques de l'Université, CH-1700 Fribourg

Mesdames, Messieurs, chers collègues,

En choisissant ce titre accrocheur, je ne voulais pas insinuer que l'interpolation est plus fascinante qu'un autre sujet. Tout domaine de recherche devrait être fascinant pour celui qui y travaille. Je veux uniquement tenter de montrer ici pourquoi je trouve personnellement l'interpolation fascinante, et essayer de vous convaincre, au moins partiellement, que cela *peut* être fascinant.

1. Pourquoi l'interpolation?

Ceux d'entre vous qui sont aussi âgés que moi se souviennent certainement des calculs mentaux qu'il fallait exécuter pour trouver les valeurs des logarithmes et des fonctions trigonométriques dans les *tables*: ces calculs me gâchèrent complètement les travaux pratiques de physique et sont une des raisons pour lesquelles j'ai passé de la physique aux mathématiques. Ils furent aussi probablement un des seuls contacts de la plupart d'entre vous avec l'interpolation. Si aujourd'hui l'interpolation dans les tables ferait bien rire les plus jeunes habitués aux calculatrices de poche, ces dernières n'ont guère diminué l'importance de l'interpolation dans d'autres domaines: pensons par exemple au dessin assisté par ordinateur, entièrement basé sur des interpolants.

Ici je vais prendre un exemple plus proche de l'analyse numérique, mon domaine de recherche: la résolution pratique de certaines *équations aux dérivées partielles (EDP)* de la physique.

Vous avez tous vu dans vos journaux les *courbes isobares* (càd. de pression constante) servant à la prévision du temps. Comment les obtient-on? En simulant le temps par avance, sur ordinateur.

Avant de commencer les calculs, on *mesure* les valeurs des grandeurs qui déterminent le déplacement des gaz qui forment l'atmosphère. Dans un modèle très simplifié, ceux-ci ne se déplacent en fonction du temps t que d'ouest en est (ou l'inverse) — coordonnée x — et verticalement — coordonnée z . Et on néglige la rotation de la terre, la friction des gaz et le réchauffement adiabatique. Alors les variables importantes sont la vitesse de l'atmosphère $\mathbf{v}(x, z, t) = (v_1, v_3)(x, z, t)$, sa pression $\mathbf{p}(x, z, t) = (p_1, p_3)(x, z, t)$, et son volume spécifique (la réciproque de sa densité) $\alpha(x, z, t)$. Les équations du mouvement de Newton, l'équation de la thermodynamique et l'équation de continuité donnent le système d'EDP suivant

pour ces inconnues en fonction du temps [Hal-Wil]:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{dv_3}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0 \\ \alpha \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{p} \frac{c_p}{c_v} \frac{d\alpha}{dt} &= 0 \\ \alpha \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \frac{d\alpha}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

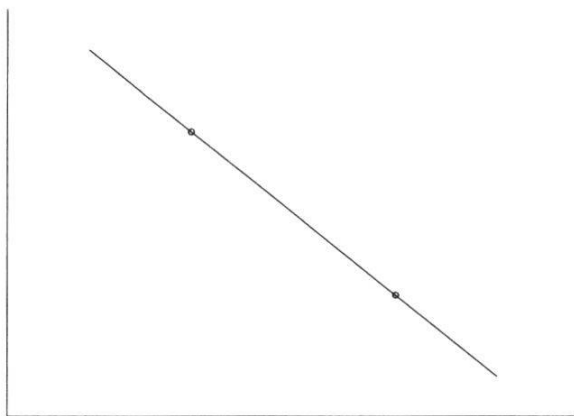
g y représente l'accélération terrestre, c_p et c_v sont les chaleurs spécifiques, respectivement à pression et volume constants.

Partant des valeurs mesurées des inconnues, on calcule alors les déplacements et changements de pression de l'atmosphère dans les heures et les jours suivants en résolvant ces équations; cela revient à simuler le temps par avance.

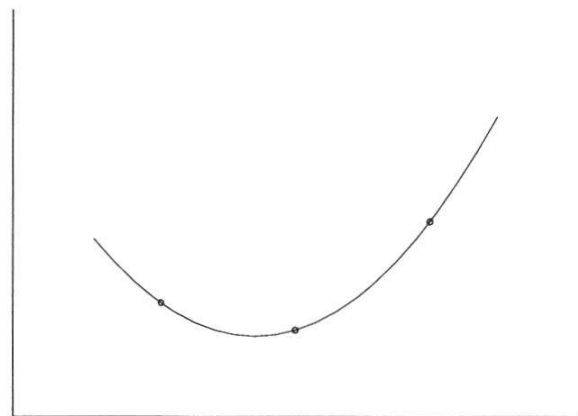
Le point important ici est que les trois inconnues \mathbf{v} , \mathbf{p} et α sont des *fonctions* de l'espace et du temps, donc de grandeurs continues. Elles représentent par conséquent une information infinie impossible à déterminer en pratique. On les remplace donc par des fonctions plus simples reconstituables à partir d'une information finie. Si cette information finie consiste en des valeurs de la fonction cherchée en un nombre fini de points (plutôt que dans le continu), alors l'approximation est un **interpolant** de la fonction. C'est entre autres cette application à la résolution pratique des EDP par le *calcul scientifique* qui donnent aujourd'hui son importance à l'interpolation.

2. Interpolation polynomiale

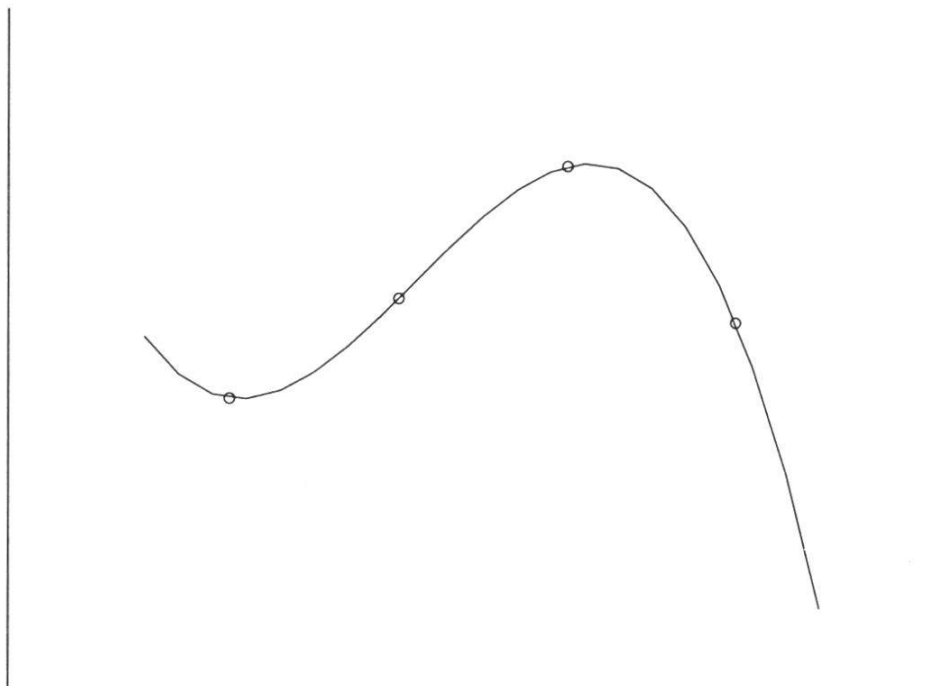
Les interpolants les plus simples sont les polynômes. Et si l'on ne sait rien par avance sur la fonction, les points les plus logiques semblent être les *points équidistants*. Pour 2, 3 et 4 points, cela donne



$$y_1(x) = a_0 + a_1x$$



$$y_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$



$$y_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Remarquez que le degré est plus petit d'une unité que le nombre de points.

On peut faire de même quel que soit le nombre de points: pour $n + 1$ points,

$$y_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \quad (1)$$

Les coefficients a_i dépendent de manière compliquée des x_i et des $f_i := f(x_i)$, si bien que pour l'interpolation on n'écrit pas le polynôme sous la forme classique (1).

Afin d'introduire l'autre représentation du polynôme que nous allons utiliser ici, prenons le cas de trois points (l'interpolant est donc une parabole) $-1, 0, 1$ et de la fonction $f(x) = \frac{2+x}{1+x^2}$. Alors les valeurs interpolées f_i sont

$$\frac{2+x}{1+x^2} = \begin{cases} 1/2, & \text{en } x_0 = -1, \\ 2, & \text{en } x_1 = 0, \\ 3/2, & \text{en } x_2 = 1. \end{cases}$$

Essayons maintenant d'écrire notre interpolant quadratique $y_2(x)$ comme

$$y_2(x) = \frac{\frac{b_0}{x - (-1)} \frac{1}{2} + \frac{b_1}{x - 0} 2 + \frac{b_2}{x - 1} \frac{3}{2}}{\frac{b_0}{x - (-1)} + \frac{b_1}{x - 0} + \frac{b_2}{x - 1}}$$

(les dénominateurs sont les distances de la variable aux points d'interpolation, et au numérateur chaque fraction est multipliée par la valeur de l'interpolant au point correspondant)

$$= \frac{\frac{b_0}{x+1} \frac{1}{2} + \frac{b_1}{x} 2 + \frac{b_2}{x-1} \frac{3}{2}}{\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x-1}} \quad (2)$$

avec une coefficient inconnu b_i à déterminer pour chacun des points d'interpolation.

Le numérateur et le dénominateur de (2) ont le même dénominateur commun $(x+1)x(x-1)$, le produit des distances de la variable à tous les points d'interpolation. Multiplions numérateur et dénominateur par ce dénominateur commun:

$$y_2(x) = \frac{b_0x(x-1)\frac{1}{2} + b_1(x+1)(x-1)2 + b_2x(x+1)\frac{3}{2}}{b_0x(x-1) + b_1(x+1)(x-1) + b_2x(x+1)}. \quad (3)$$

On voit donc que, quels que soient les b_i choisis, $y_2(x)$ est une **fonction rationnelle**, càd. un quotient de deux polynômes. Et *quels que soient les nombres* b_0, b_1 et b_2 (différents de zéro), $\lim_{x \rightarrow x_i} = f_i$, donc $y_2(x)$ interpole toujours $f(x)$ entre les points x_0, x_1 et x_2 .

Illustration

Si pour l'exemple ci-dessus et les coefficients arbitraires $b_0 = 7, b_1 = 4$ et $b_2 = 13$ on calcule la valeur de l'interpolant pour $x = 0.1$ puis toutes les valeurs de x obtenues en divisant celle-ci successivement par 100, on obtient la suite suivante de valeurs de l'interpolant, qui tend bien vers $f(0) = 2$.

x	$y_2(x)$
0.1	1.92721518987342
0.001	1.99900274813870
0.00001	1.99999000027500
0.0000001	1.99999990000003
0.000000001	1.99999999900000
0.00000000001	1.99999999999000
0.0000000000001	1.99999999999990
0.000000000000001	2.00000000000000

Et ceci vaut en tous les points d'interpolation, quel que soit le nombre de ces derniers. \odot

Le dénominateur de l'interpolant (3) s'écrit

$$b_0(x^2 - x) + b_1(x^2 - 1) + b_2(x^2 + x) = -b_1 + (b_2 - b_0)x + (b_0 + b_1 + b_2)x^2.$$

Pour que (2) soit un polynôme, il faut que ce dénominateur soit constant, càd. que

$$\begin{aligned} b_2 - b_0 &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

La solution de ce système est donnée par

$$b_0 = -\frac{b_1}{2} \quad b_2 = -\frac{b_1}{2},$$

pour $b_1 \neq 0$ quelconque. Avec $b_1 = -2$, cela donne

$$b_0 = 1 = \binom{2}{0}, \quad b_1 = -2 = -\binom{2}{1}, \quad b_2 = 1 = \binom{2}{2}.$$

Dans le cas général de $n + 1$ points équidistants, la solution est donnée à une constante près par

$$b_i = (-1)^i \binom{n}{i}, \quad i = 0(1)n.$$

Avec ces b_i , (3) est une modification de la formule de Joseph Louis LAGRANGE (1736–1813) pour le polynôme d'interpolation. Quoiqu'en disent la plupart des livres d'introduction à l'analyse numérique, surtout américains, elle est souvent meilleure que la formule instable de Isaac NEWTON (1643–1727), où de plus les différences divisées correspondant aux b_i dépendent de f , ce qui hypothèque l'utilisation de la formule pour la résolution d'équations. Remarquons cependant que la stabilité de la formule de Newton peut être sensiblement améliorée en réordonnant les points [Fis-Rei] selon la suite de Johannes Gualtherus VAN DER CORPUT (1890–1975), professeur à l'institut de mathématiques de notre Université en 1922–1923. L'idée d'utiliser la représentation (2) pour le calcul est venue à un certain William J. TAYLOR durant la deuxième guerre mondiale: ce dernier était l'un des nombreux mathématiciens qui ont dû leur emploi au National Bureau of Standards à la politique du New Deal instaurée par F.D. Roosevelt durant la grande crise des années 30. Cette formule a été baptisée *barycentrique* par Heinz RUTISHAUSER (1918–1970), notre génie national du calcul numérique, qui a entre autres eu l'idée de l'algorithme généralement utilisé pour le calcul de valeurs propres.

Illustration

Voyons maintenant l'erreur maximale de l'interpolation des fonctions $\sin 2x$, $\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{1+25x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ (où toutes trois ne prennent que des valeurs entre 0 et 1) pour 11 points d'interpolation équidistants ($n = 10$).

Fonction	Erreur
$\sin 2x$	$4.038 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$7.900 \cdot 10^{-4}$
$\frac{1}{1+25x^2}$	$1.916 \cdot 10^0$

L'exemple final, où l'interpolation polynomiale entre points équidistants donne des résultats catastrophiques, est dû à Carl RUNGE (1856–1927) [Run]. \odot

Pour un grand nombre $n + 1$ de points d'interpolation, les points équidistants ne sont donc pas adéquats; ceci se manifeste aussi dans le fait que les $b_i = (-1)^i \binom{n}{i}$, au signe près les nombres du triangle de Pascal, sont très différents les uns des autres. Il est donc naturel de chercher à utiliser d'autres points.

Dans le cas de $n + 1$ points *quelconques* x_0, x_1, \dots, x_n , on a pour le polynôme d'interpolation la formule barycentrique

$$y(x) = \frac{\frac{b_0}{x-x_0}f_0 + \frac{b_1}{x-x_1}f_1 + \dots + \frac{b_n}{x-x_n}f_n}{\frac{b_0}{x-x_0} + \frac{b_1}{x-x_1} + \dots + \frac{b_n}{x-x_n}}, \quad (4a)$$

où le coefficient b_i n'est plus $(-1)^i \binom{n}{i}$, mais la réciproque du produit des distances du point x_i à tous les autres points d'interpolation:

$$b_i := 1 \left/ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \right. . \quad (4b)$$

Et de meilleurs points que les points équidistants existent. On mesure la qualité des points par leur constante de Henri LEBESGUE (1875–1941), qui doit être la plus petite possible. Les bons points sont ceux qui, une fois rapportés verticalement sur le cercle dont le diamètre est donné par l'intervalle d'interpolation, sont presque équidistants. Les plus courants sont ceux d'Adrien-Marie LEGENDRE (1752–1833) et surtout ceux, exactement équidistants sur le cercle, de Pafnuti Lwowitsch ČEBYŠEV (1821–1894), pour lesquels on a pour l'essentiel la formule très simple $b_i = (-1)^i$ (voir (8) plus loin) et pour lesquels on peut aussi *prouver* que le polynôme d'interpolation est très proche du meilleur de tous les polynômes du même degré approximant f .

Illustration

La table du sommet de la page suivante montre pour des n croissant l'erreur d'interpolation de la fonction de Runge entre $n + 1$ points de Čebyšev. La différence avec celle des points équidistants se passe de commentaire! \odot

Mais si on ne peut pas choisir les points? Alors on pourrait penser se contenter d'une fonction rationnelle et utiliser le fait que tout choix des b_i donne un interpolant. Et, pour utiliser l'interpolant dans la résolution d'équations différentielles, choisir les poids indépendants de la fonction à interpoler. C'est un des projets auxquels je travaille en ce moment. J'ai proposé [Ber2] de prendre $b_i = (-1)^i$ quels que soient les points intérieurs, et la même valeur divisée par 2 pour les points des extrémités. Rien n'est encore prouvé quant à l'erreur, mais Benjamin NOËL, un de mes diplomants, vient d'obtenir des résultats numériques

n	Equidistants	Čebyšev
4	$4.382 \cdot 10^{-1}$	$4.599 \cdot 10^{-1}$
8	$1.045 \cdot 10^0$	$2.045 \cdot 10^{-1}$
12	$3.657 \cdot 10^0$	$8.423 \cdot 10^{-2}$
16	$1.432 \cdot 10^1$	$3.658 \cdot 10^{-2}$
20	$5.859 \cdot 10^1$	$1.773 \cdot 10^{-2}$
24	$2.572 \cdot 10^2$	$8.103 \cdot 10^{-3}$
28	$1.107 \cdot 10^3$	$3.649 \cdot 10^{-3}$
32	$4.778 \cdot 10^3$	$1.615 \cdot 10^{-3}$
36	$2.244 \cdot 10^4$	$7.388 \cdot 10^{-4}$
40	$1.044 \cdot 10^5$	$3.328 \cdot 10^{-4}$
80		$1.133 \cdot 10^{-7}$
160		$1.366 \cdot 10^{-14}$

d'une qualité étonnante pour certains points; ces résultats devraient permettre de mieux comprendre le comportement de cet interpolant.

3. Intégration

A nouveau, l'intégration d'une fonction quelconque est un problème que l'on ne peut en général pas résoudre sur le papier: en gros, on peut dire que seules les fonctions composées de celles que l'on étudie au gymnase peuvent être intégrées exactement.

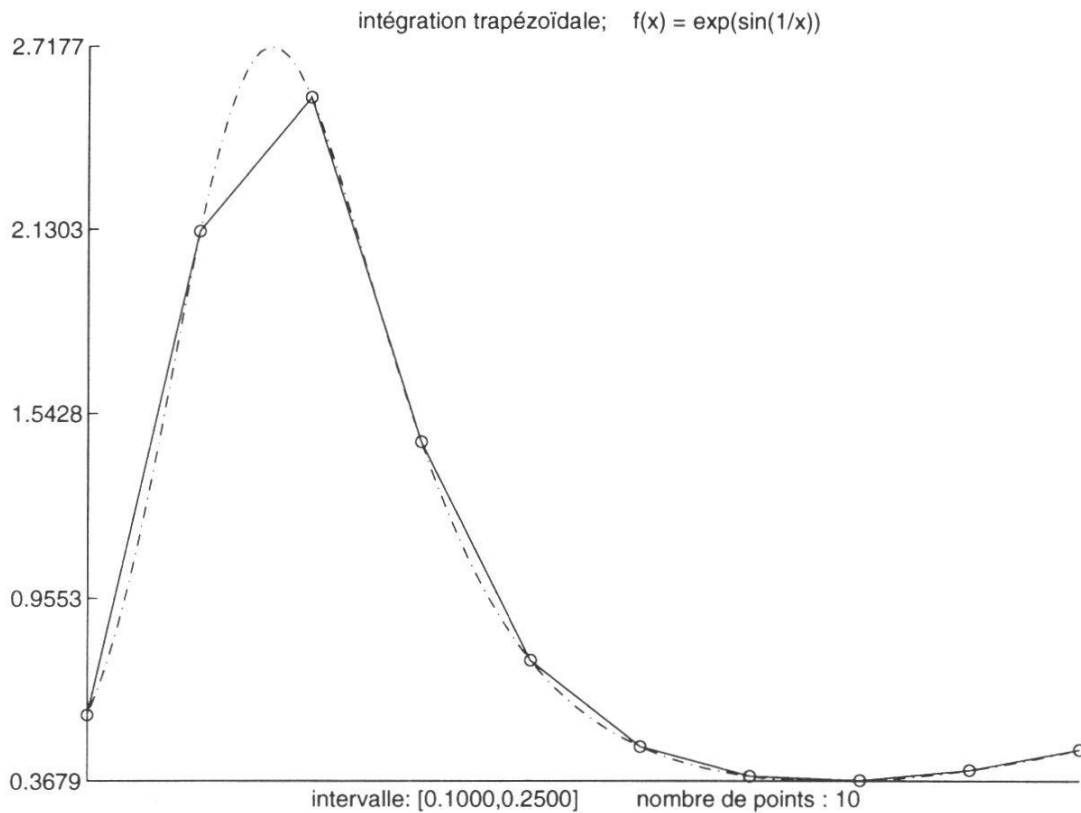
L'idée est alors de remplacer la fonction d'information infinie par un interpolant, ce qui rend l'information finie, et d'intégrer exactement cet interpolant. Dans le cas de certaines fonctions singulières que nous verrons plus loin, on peut même prouver que cette manière de faire est optimale.

Ici on ne parlera que d'intégrales définies $I := \int_a^b f(t)dt$. Rappelons qu'une telle intégrale est la surface entre le graphe de la fonction et l'axe des abscisses.

Une des méthodes les plus simples consiste à prendre sur l'intervalle $[a, b]$ des points d'interpolation équidistants t_k , approximer $f(t)$ par un segment de droite (un interpolant de degré 1) dans chacun de ces n intervalles de longueur h et intégrer exactement la ligne polygonale ainsi construite.

La surface sous celle-ci est faite de trapèzes (posés verticalement), ce qui donne la formule

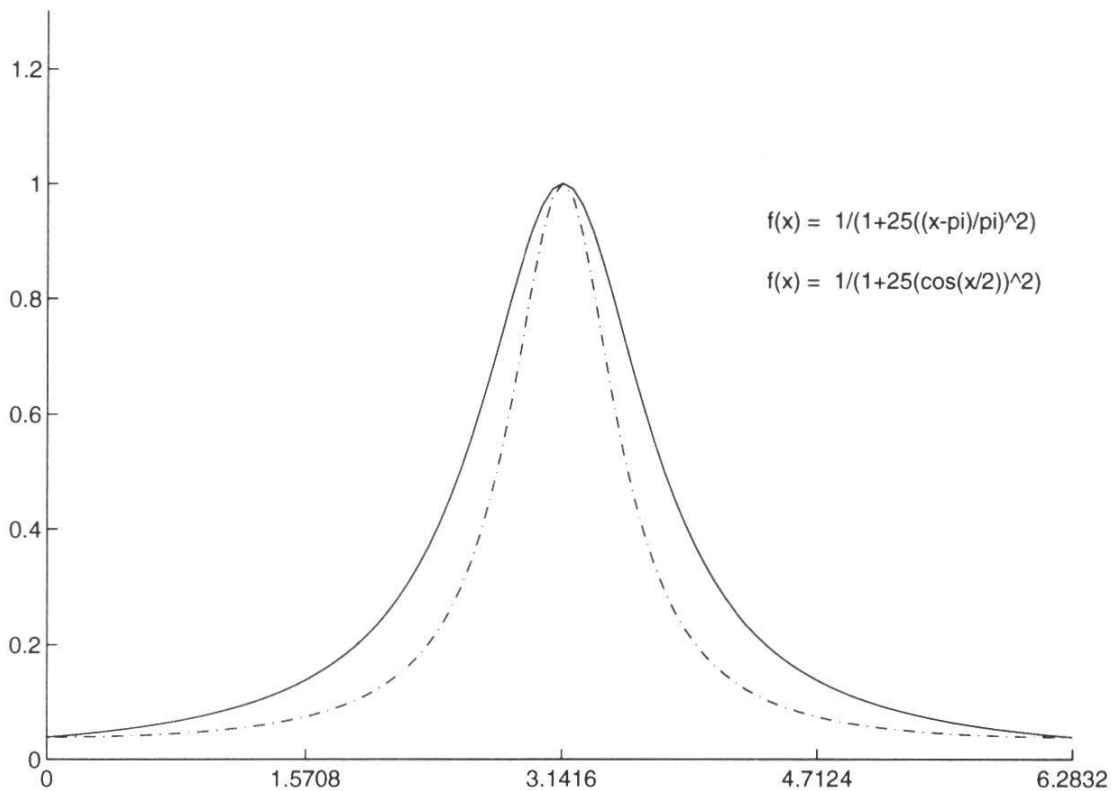
$$T(h) := h \left\{ \left[\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2}f(t_1) \right] + \underbrace{\left[\frac{1}{2}f(t_1) + \frac{1}{2}f(t_2) \right]}_{f(t_1)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left[\frac{1}{2}f(t_{n-1}) + \frac{1}{2}f(t_n) \right] \right\} = h \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k).$$



C'est la **règle d'intégration du trapèze**. Les " dans \sum'' signifient que le premier et le dernier termes de la somme sont à diviser par 2.

Illustration

Considérons les deux fonctions $\frac{1}{1+25\left(\frac{x}{\pi}-1\right)^2}$ et $\frac{1}{1+25\cos^2\frac{x}{2}}$,



qui ne diffèrent que peu l'une de l'autre, et intégrons-les de 0 à 2π avec un nombre croissant d'intervalles. On obtient les valeurs suivantes:

n	$\frac{1}{1+25(\frac{x}{\pi}-1)^2}$	$\frac{1}{1+25\cos^2\frac{\pi}{2}}$
1	0.2416609733530610	0.2416609733530610
2	3.2624231402663235	3.2624231402663235
4	2.0645346947662366	1.8639221370657391
8	1.7495462692026278	1.3392744017714020
16	1.7254328170369020	1.2365115752044911
32	1.7257151357648688	1.2322414176354950
64	1.7258284904609167	1.2322340188232968
128	1.7258568493475397	1.2322340188010841
256	1.7258639402207825	1.2322340188010843
512	1.7258657130111090	1.2322340188010841
1024	1.7258661562131921	1.2322340188010836
∞	1.72586630394762	1.23223401880108

(le symbole ∞ dénote la valeur exacte de l'intégrale). \odot

Comment expliquer une telle différence de rapidité de convergence de la règle du trapèze? Pour une fonction f suffisamment différentiable, l'erreur est donnée par la formule de Leonhard EULER (1707–1783) — le mathématicien qui se trouve sur nos billets de 10 francs — et Colin MACLAURIN (1698–1746) [Hen]

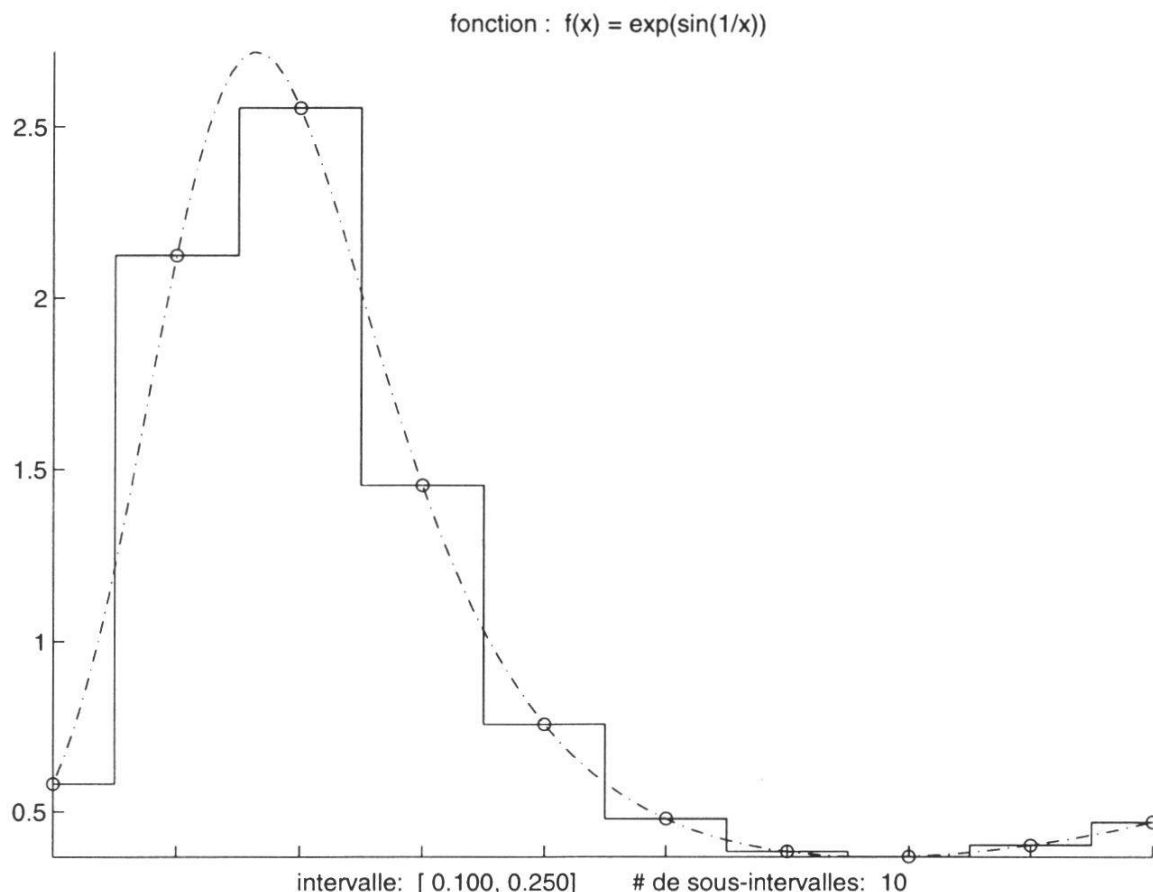
$$\begin{aligned}
 T(h) - I &= \frac{B_2}{2!} [f'(b) - f'(a)] h^2 + \frac{B_4}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] h^4 + \dots \\
 &\quad + \frac{B_{2m}}{(2m)!} [f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(a)] h^{2m} + O(h^{2m+1}) \quad (5) \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{B_{2i}}{(2i)!} [f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] h^{2i} + O(h^{2m+1}),
 \end{aligned}$$

où les constantes B_{2i} sont les *nombre de Jakob I BERNOULLI (1654–1705)*, mathématicien bâlois comme Euler. Ces nombres sont par définition les coefficients (sans les factorielles) de la série de Taylor (Brook TAYLOR (1685–1731), rien à voir avec W. Taylor vu plus haut) de la fonction $\frac{x}{e^x-1}$ autour de $x = 0$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{x^i}{i!}.$$

Pourquoi l'erreur ne dépend-elle que de la fonction f aux extrémités de l'intervalle? L'interpolant *linéaire par morceaux* par lequel on a introduit la règle du trapèze ne permet pas de l'expliquer.

L'interpolant *constant par morceaux*



intégré exactement donne aussi la règle du trapèze. Mais lui non plus ne permet pas d'expliquer que l'erreur ne dépende que de la fonction f aux extrémités.

Il existe cependant encore au moins un autre interpolant dont l'intégrale exacte est donnée par la règle du trapèze: l'**interpolant trigonométrique**. Pour des fonctions paires (càd. symétriques par rapport au centre de l'intervalle) et après un changement de variable pour amener l'intervalle à être $[a, b] \equiv [0, 2\pi]$, cet interpolant est donné par la même formule que (1) avec les monômes x^k remplacés par $\cos kt$:

$$z_n(t) = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 \cos t + \dots + \hat{c}_{n-1} \cos(n-1)t + \hat{c}_n \cos nt. \quad (6)$$

Ce n'est donc rien d'autre qu'une *série de Jean-Baptiste-Joseph FOURIER* (1768–1830) tronquée après le terme en $\cos nt$. Pour la série de Fourier complète (infinie), on sait que les coefficients de Fourier c_k sont donnés par la formule

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} I, \quad c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt.$$

Les coefficients du polynôme trigonométrique d'interpolation (6) sont exactement les approximations \hat{c}_k de ces intégrales par la règle du trapèze en prenant le même nombre d'intervalles que de coefficients (ceci n'est pas tellement surprenant, vu

que la règle du trapèze utilise alors les mêmes valeurs de f que le polynôme (6)). \widehat{c}_0 n'est alors rien d'autre que $\frac{1}{2\pi}T(h)$, où $T(h)$ dénote à nouveau l'approximation de I par la règle du trapèze.

Intégrons exactement le polynôme (6) pour approximer I :

$$\int_0^{2\pi} z_n(t)dt = \widehat{c}_0 \int_0^{2\pi} dt + \widehat{c}_1 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \dots + \widehat{c}_{n-1} \int_0^{2\pi} \cos(n-1)t dt + \widehat{c}_n \int_0^{2\pi} \cos nt dt.$$

Mais pour tout $k = 1, 2, \dots$, $\int_0^{2\pi} \cos kt dt = \frac{1}{k} \sin kt \Big|_0^{2\pi} = 0$ et donc

$$\int_0^{2\pi} z_n(t)dt = \widehat{c}_0 \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi}T(h)2\pi = T(h).$$

Lisant cette égalité de droite à gauche, on voit que l'approximation de I par la règle du trapèze n'est rien d'autre que l'intégrale exacte du polynôme trigonométrique interpolant $f(t)$! Et ainsi la raison pour laquelle l'erreur dépend des sauts des dérivées en 0 et 2π , selon la formule (5), devient claire. Le polynôme trigonométrique est 2π -périodique et ne peut pas être une bonne approximation de f si f ou ses dérivées ne sont pas 2π -périodiques. Cela explique pourquoi la règle du trapèze donne de bien meilleurs résultats pour une fonction périodique et à dérivées périodiques comme $\frac{1}{1+25\cos^2 x}$ que pour $\frac{1}{1+25x^2}$!

Remarques

- 1) Si l'on s'intéresse au polynôme trigonométrique d'interpolation (6), il faut calculer par la règle du trapèze les approximations \widehat{c}_k des c_k . C'est ce qu'on appelle la transformation de Fourier discrète. Or il y a $n + 1$ coefficients c_k , et chaque règle du trapèze exige un multiple de n opérations. Le total des opérations est donc de l'ordre d'un multiple de n^2 , qui croît assez vite avec n (plus d'un million pour $n = 1024 = 2^{10}$). En 1965, James W. COOLEY et John W. TUKEY ont publié un des articles les plus cités des mathématiques et de l'informatique [Coo-Tuk] dans lequel ils présentent un algorithme (càd. une méthode à caractère répétitif, idiomme dérivé du nom du mathématicien arabe Mohammed ibn Mûsâ AL-KHOVÂRIZMÎ (IX^e siècle)) permettant de calculer les $n + 1$ règles du trapèze en un multiple de $n \log_2 n$ opérations (guère plus de 10000 pour $n = 1024$) si n est une puissance de 2. Cet algorithme s'appelle la transformation de Fourier rapide (en anglais Fast Fourier Transform — FFT), voir [Hen] pour une présentation "simple". Pour ne citer qu'une de ses nombreuses applications, remarquons que c'est elle qui permet la tomographie et par conséquent les scanners;
- 2) il existe aussi pour le polynôme d'interpolation trigonométrique (6) une for-

mule barycentrique [Ber1]:

$$z_n(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n/2''} \frac{(-1)^k}{\cos t - \cos t_k} f(t_k)}{\sum_{k=0}^{n/2''} \frac{(-1)^k}{\cos t - \cos t_k}}, \quad t_k := k \frac{2\pi}{n}. \quad (7)$$

Celle-ci permet d'évaluer z_n de manière efficiente sans calculer les coefficients de Fourier par la FFT.

Par ailleurs, les points $x_k := \cos t_k = \cos k \frac{2\pi}{n}$, $k = 0(1)\frac{n}{2}$, ne sont rien d'autre que les points de Čebyšev mentionnés plus haut, et la formule barycentrique pour le polynôme d'interpolation (non-trigonométrique) (1) entre ces points [Sal] est la même que (7) avec le changement de variable $x := \cos t$:

$$y_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n/2''} \frac{(-1)^k}{x - x_k} f_k}{\sum_{k=0}^{n/2''} \frac{(-1)^k}{x - x_k}}, \quad x_k := \cos k \frac{\pi}{n}. \quad \odot \quad (8)$$

Il existe un autre cas où la règle du trapèze donne d'excellents résultats, comme l'a remarqué un certain Goodwin [Goo] en 1949. C'est pour l'**intervalle infini**, où elle devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx T(h) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh). \quad (9)$$

h	$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x^2} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$
2.000000000000	0.73575888234288	0.29305742447096
1.000000000000	0.36787944117144	0.88450897174632
0.500000000000	0.37863991635357	0.88622692545276
0.250000000000	0.37892803584528	0.88622692545276
0.125000000000	0.37894368321945	0.88622692545276
0.062500000000	0.37894462910716	0.88622692545276
0.031250000000	0.37894468774025	0.88622692545276
0.015625000000	0.37894469139731	0.88622692545276
0.007812500000	0.37894469162576	0.88622692545276
0.003906250000	0.37894469164003	0.88622692545276
0.001953125000	0.37894469164093	0.88622692545276
0.000976562500	0.37894469164098	0.88622692545276
0.000488281250	0.37894469164098	0.88622692545276

Illustration

La table de la page précédente contient l'intégrale de la même fonction $x^2 e^{-x^2}$, une fois sur l'intervalle $[-1, 1]$, une fois sur $]-\infty, \infty[$. \odot

C'est à nouveau l'interpolation qui permet d'expliquer intuitivement cette surprenante précision sur l'intervalle infini. En effet, la règle du trapèze infinie intègre exactement l'**interpolant SINC**. Ce dernier est une somme pondérée de copies de la fonction $\text{SINC}(x) := \frac{\sin x}{x}$, une par point d'interpolation $x_k = kh$, décalées de façon à évaluer 1 au point x_k et zéro en tous les autres points $x_\ell \neq x_k$ ([Ber5] p. 192), avec comme coefficients les valeurs à interpoler :

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \text{SINC} \left[\frac{\pi}{h}(x - x_k) \right].$$

Et $\int_{-\infty}^{\infty} \text{SINC}(x) dx = h$ (ibid. p. 195), donc $\int_{-\infty}^{\infty} S(x) dx = T(h)$ de (9).

Frank STENGER (1938–), de l'Université de l'Utah à Salt Lake City, est le "pape" de l'étude de ces interpolants SINC (je ne suis moi-même tombé sur eux qu'après qu'un collègue m'ait fait savoir, en regardant le MORGINS de ma plaque californienne, que Stenger avait choisi SINC-F comme plaque de voiture). Et je mentionnerai pour les mathématiciens parmi vous que, comme pour l'interpolation trigonométrique, on a *convergence exponentielle* de l'interpolant, ce qui implique la convergence exponentielle de la règle du trapèze :

$$\left| T(h) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{h}}, \quad h \rightarrow 0,$$

pour des constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de h . (En fait, c'est ce dernier résultat qui est le plus général des deux : l'interpolant trigonométrique n'est en fait rien d'autre que l'interpolant SINC d'une fonction périodique, ibid. p. 193).

Remarques

- 1) En utilisant la représentation de Magnus Gustav MITTAG-LEFFLER (1846–1927) — le "responsable" de l'inexistence d'un prix Nobel en mathématiques ? — de $1/\sin x$, on peut voir que la formule barycentrique de l'interpolant SINC est donnée par [Ber3]

$$S(x) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - x_k} f_k}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - x_k}},$$

une formule que l'on peut appliquer à des points x_k non équidistants pour obtenir un interpolant SINC rationnel non encore étudié;

- 2) si comme fonction de la variable complexe w
- f est partout différentiable (donc entière);
 - f ne croît dans aucune direction plus vite qu'une fonction exponentielle, c.à.d. $|f(w)| \leq C e^{\frac{\pi}{h}|w|}$ pour une constante C et tout $w \in \mathbb{C}$;
 - f est quadratiquement intégrable sur l'axe réel, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$,
- alors elle est à spectre borné et est reproduite exactement par son interpolant SINC:

$$S(w) = f(w) \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{C}$$

(et donc aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$). C'est le *théorème d'échantillonnage de Claude Elwood SHANNON (1916-)*, qui donne une condition suffisante pour qu'un signal puisse être reconstitué exactement par l'interpolation SINC [But-Ste] et est fondamental en traitement numérique des signaux. \odot

La règle du trapèze est la somme pondérée

$$\sum_{k=0}^n w_k f(t_k) \approx \int_a^b f(t) dt$$

dans laquelle les abscisses t_k sont choisies équidistantes et les poids w_k sont identiquement 1 sauf en a et b où ils sont $1/2$. Mais pour les cas où la règle du trapèze ne donne pas d'excellents résultats, il existe des quantités d'autres formules d'intégration. Et Claus Schneider de l'Université de Mayence vient de prouver [Sch] que toute formule d'intégration $\sum_{k=0}^n w_k f(t_k)$ qui intègre exactement la fonction 1 est l'intégrale exacte d'un *interpolant rationnel* de Charles HERMITE (1822-1901), c'est-à-dire ici d'une fonction rationnelle qui interpole non seulement les valeurs de f , mais aussi les valeurs aux mêmes abscisses d'une de ses primitives. Remarquons qu'il existe des formules barycentriques pour de tels interpolants.

4. Fonctionnelles de certaines fonctions singulières

La plupart des fonctions que l'on cherche dans la pratique sont analytiques (infiniment différentiables) sur un ensemble fini de sous-intervalles, avec d'éventuelles singularités aux extrémités de chaque sous-intervalle. Considérons uniquement l'un de ces sous-intervalles et supposons que

- la fonction traitée soit analytique dans tout le disque complexe dont le diamètre est l'intervalle considéré, ici normalisé à $[-1, 1]$ par changement de variable;
- la fonction soit quadratiquement intégrable sur le cercle unité Γ :

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^2 |dz| < \infty.$$

Cette intégrale mesure la grandeur de f , se nomme *norme* de f et est dénotée $\|f\|$.

Les mathématiciens appellent l'ensemble de ces fonctions un espace de Godefrey Harold HARDY (1877–1947) et le dénotent H^2 .

Exemples

$$f(w) = w^2 \sqrt{(1+w)(1-w)} = w^2 \sqrt{1-w^2} \quad \text{et} \quad f(w) = \frac{w}{\sqrt[3]{1-w^2}}$$

appartiennent à H^2 ,

$$f(w) = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} \quad \text{et} \quad f(w) = \frac{w^2}{1-w^2}$$

n'appartiennent pas à H^2 . \odot

Supposons maintenant que tout ce qu'on sache de f soient ses valeurs $f_i := f(x_i)$ en des points donnés x_0, x_1, \dots, x_n , et qu'on veuille approximer un nombre $N(f)$ qui dépende de cette fonction — ce qu'on appelle une *fonctionnelle* en mathématiques: $N(f)$ peut être par exemple la valeur de f en un certain point x^* , ou l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x)dx$. On supposera que cette dépendance est *linéaire*.

On veut maintenant trouver la meilleure approximation possible de ce nombre $N(f)$ sous la forme d'une somme pondérée

$$w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_n f_n$$

des valeurs données de la fonction, où les poids w_k dépendent certes des points x_k , mais *non de la fonction f* .

Alors il est naturel de chercher les poids pour lesquels le maximum de la valeur absolue de l'erreur de l'approximation de $N(f)$ par $\sum_k w_k f_k$ pour les fonctions d'une grandeur donnée est minimale:

$$\max_{\substack{f \\ \text{de même} \\ \text{norme}}} \left| \sum_k w_k f_k - N(f) \right| = \min!$$

Résultat étonnant [Ric-Dyn]: les poids w_k cherchés doivent être tels que *pour toute fonction f de H^2* la valeur approchée $\sum_k w_k f_k$ soit la valeur exacte de la fonctionnelle, certes non pour f , mais pour un certain *interpolant rationnel f^\perp* de f entre les points donnés x_i :

$$\sum_k w_k f_k = N(f^\perp)!$$

De nouveau, un interpolant apparaît où on ne l'attendait pas au premier abord. Et tout aussi étonnant: il existe une *formule explicite* pour cette fonction rationnelle f^\perp ([Gol], [Lar])!

Et alors qu'on ne peut en général pas calculer la fonctionnelle pour une fonction quelconque, cela est souvent possible pour une fonction rationnelle. Et je me suis aperçu [Ber4] que, si l'un des points est 0, on pouvait écrire f^\perp très simplement sous forme barycentrique (4a): il suffit de multiplier chaque coefficient

b_i du polynôme par le produit des distances du point x_i aux *points réciproques* des autres points (sans bien sûr 0):

$$b_i = \prod_{\substack{k=0 \\ x_k \neq 0}}^n \left(x_i - \frac{1}{x_k} \right) \bigg/ \prod_{\substack{k=0 \\ x_k \neq x_i}}^n (x_i - x_k).$$

(La formule n'est que légèrement plus compliquée si aucun des points n'est 0.)

Illustration

Les erreurs maximales d'interpolation des fonctions (dénotées (α, β, γ) dans la table) $f(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta \log^\gamma(1-x)$ entre 101 points de Čebyšev sur l'intervalle $[-1, 1]$ par le polynôme d'interpolation d'une part et la fonction rationnelle f^\perp d'autre part prennent les valeurs ci-dessous. La première colonne donne la fonction interpolée, les autres l'erreur par l'interpolation polynomiale, respectivement la fonction rationnelle f^\perp .

Fonction	Polynôme	f^\perp
(3, 3, 0)	0.0	0.0
(1/2, 1/2, 0)	$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.0
(1/4, 1/4, 0)	$5.7 \cdot 10^{-5}$	0.0
(1/4, 0, 0)	$4.9 \cdot 10^{-5}$	0.0
(1/4, 1/4, 1)	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-14}$
(1/4, 0, 1)	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-13}$
(-1/4, -1/4, 0)	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-13}$
(-1/2, -1/2, 0)	$5.2 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$
(-3/4, 0, 0)	$9.4 \cdot 10^{-1}$	$7.8 \cdot 10^{-10}$
(-1, -1, 0)	5.2	$6.2 \cdot 10^{-9}$

Les trois dernières lignes de résultats montrent que f^\perp approxime encore assez bien certaines fonctions trop singulières au bord pour appartenir à H^2 . \odot

5. Conclusion

Au travers des exemples ci-dessus j'ai essayé de vous convaincre de l'importance de l'interpolation et du fait qu'elle intervient souvent où on ne l'attendrait guère de prime abord. Le nombre de mathématiciens célèbres mentionnés dans ce texte témoigne de son importance, pour le moins dans les mathématiques. Elle y demeure aujourd'hui un domaine de recherche très prisé: on vient à peine [Boo-Ron] de trouver une solution satisfaisante au problème de l'interpolation polynomiale à plusieurs variables pour points quelconques. Il reste beaucoup à faire, et j'espère par mes travaux actuels sur les interpolants rationnels linéaires à constante de Lebesgue minimale [Ber6, Ber-Mit], entre autres, apporter une très modeste pierre à l'édifice.

6. Remerciements

Je suis redevable de l'aide de Monsieur Bernhard Kiener, assistant à l'Institut de Mathématiques de l'Université, pour plusieurs figures et tables. Je tiens à lui témoigner ici ma gratitude.

7. Bibliographie

- [Ber1] BERRUT, J.-P.: Baryzentrische Formeln zur trigonometrischen Interpolation (I). *Z. angew. Math. Phys. (ZAMP)* 35, 91–105 (1984).
- [Ber2] BERRUT, J.-P.: Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation. *Comput. Math. Applic.* 15, 1–16 (1988).
- [Ber3] BERRUT, J.-P.: Barycentric formulae for cardinal (SINC-) interpolants. *Numer. Math.* 54, 703–718 (1989). Erratum 55, 747 (1989).
- [Ber4] BERRUT, J.-P.: Barycentric formulae for some optimal rational approximants involving Blaschke products. *Computing* 44, 69–82 (1990).
- [Ber5] BERRUT, J.-P.: Quelques exemples simples d'applications de la fonction SINC en analyse numérique. In: « Les Annales du Centenaire de l'Université de Fribourg (Suisse) », 191–196 (1991).
- [Ber6] BERRUT, J.-P.: Linear rational interpolation of continuous functions over an interval. In: « Mathematics of Computation 1943–1993: a Half-Century of Computational Mathematics » (W. GAUTSCHI, ED.), 261–264. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, American Mathematical Society: Providence 1994.
- [Ber-Mit] BERRUT, J.-P., & MITTELMANN H.: Lebesgue constant minimizing linear rational interpolation of continuous functions over the interval. Report 94-4, Institut de Mathématiques: Fribourg (Suisse), 1994.
- [Boo-Ron] DE BOOR, C., & RON, A.: On multivariate polynomial interpolation. University of Wisconsin: Madison, 1994.
- [But-Ste] BUTZER, P. L., & STENS, R. L.: Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview. *SIAM Review* 34, 40–53 (1992).
- [Coo-Tuk] COOLEY, J. W., & TUKEY, J. W.: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.* 19, 297–301 (1965).
- [Fis-Rei] FISCHER, B., & REICHEL, L.: Newton Interpolation in Féjer and Chebyshev points. *Math. Comp.* 53, 265–278 (1989).
- [Gol] GOLOMB, M.: Interpolation operators as optimal recovery schemes for classes of analytic functions. In: « Optimal Estimation in Approximation Theory » (C. A. MICCHELLI & T. J. RIVLIN, EDS.), 93–138. Plenum: New York and London 1977.
- [Goo] GOODWIN, E. T.: The evaluation of integrals of the form $\int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{-x^2} dx$. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 45, 402–420 (1949).

- [Hal-Wil] HALTINER, G.J., & WILLIAMS, R.T.: Numerical Prediction and Dynamical Meteorology. Wiley: New York 1980.
- [Hen] HENRICI, P.: Essentials of Numerical Analysis. John Wiley: New York 1982.
- [Lar] LARKIN, F. M.: Optimal approximation by «almost classical» interpolation. In: «Padé and Rational Approximation» (E. B. SAFF & R. S. VARGA, EDS.), 275–288. Academic Press: New York 1977.
- [Ric-Dyn] RICHTER–DYN, N.: Minimal interpolation and approximation in Hilbert spaces. SIAM J. Numer. Anal. 8, 583–597 (1971).
- [Run] RUNGE, C.: Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Z. Math. Phys. 46, 224–243 (1901).
- [Sal] SALZER, H. E.: Lagrangian interpolation at the Chebyshev points $x_{n,\nu} = \cos(\nu\pi/n)$, $\nu = 0(1)n$; some unnoted advantages. The Computer J. 15, 156–159 (1972).
- [Sch] SCHNEIDER, C.: Rational Hermite interpolation and quadrature. In: «Numerical Integration IV» (H. BRASS & G. HÄMMERLIN, EDS.), 349–357. Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 112, Birkhäuser: Basel 1993.