Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 87 (1998)

Artikel: Über die Kybeia und die Arithmomantica : ein Kapitel aus der Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Autor: Caramuel y Lobkowitz, Juan / Ineichen, Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-309000

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA

von Juan CARAMUEL y LOBKOWITZ
ein Kapitel aus der Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Robert INEICHEN

Inst. de mathématiques de l'Université de Fribourg, Pérolles
CH-1700 FRIBOURG
Privat: Rigistr. 63, CH-LUZERN

Fu un vero frutto dell'età barocca per il talento eccentrico, l'inquieta curiosità intellettuale, l'enorme varietà di interessi... (L. Bernardini Soto, 1977)

Freie Übersetzung der beiden Disticha unter dem Bild:

Dies ist Caramuel, dem ganzen Erdkreis bekannt.
Der gewaltige Ruhm trug den leuchtenden Namen zu den Sternen.
Sein Angesicht wird hier gestochen; sein weiter Geist sitzt in den vielen Büchern.
Er ist soviel wert wie viele zusammen; er erfasst alles, was zu wissen ist.

(Das Bild findet sich in Ioannis Caramuelis Theologiae moralis fundamentalis liber primus. Lugduni MDCLXXVI.)

The MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA, published in 1670 by the Spanish Cistercian Juan Caramuel y Lobkowitz (1606–82), contains a mathematical treatment of the games of dice and the Genoese lottery. This work has been rarely and incompletely discussed in the classical literature concerned with the early history of probability. The goal of this paper is an exposition of Caramuel's approach and its links with Huygens' work.

Der Zisterziensermönch und spätere Bischof Juan Caramuel y Lobkowitz hat 1670 seine MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA publiziert, eine umfangreiche Präsentation der damaligen "alten" und "neuen" Mathematik. Darin wird in den Abschnitten KYBEIA und ARITHMOMANTICA die Berechnung der Gewinn- und Verlustmöglichkeiten und der gerechten Einsätze bei Glücksspielen (Würfeln, Lotterien) ausführlich behandelt: eine sehr frühe Einbettung einer *Glücksspielrechnung* in den Rahmen einer mathematischen Enzyklopädie! — "Wahrscheinlichkeiten" im eigentlichen Sinne werden dabei noch nicht berechnet: statt von *Wahrscheinlichkeitsrechnung* spricht man in diesem Zusammenhang deshalb besser von *Glücksspielrechnung*. Ausführliche und einigermassen vollständige Darstellungen des Inhalts dieser Glücksspielrechnung von Caramuel mit dem dazu notwendigen Kommentar gibt es kaum. Dies soll hier nachgeholt werden. Selbstverständlich muss dabei auch etwas auf die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen werden, vor allem natürlich auf Zusammenhänge mit der systematischen und streng deduktiv aufgebauten Abhandlung von Christiaan Huygens von 1657, DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEAE. Weiter soll auch ein Blick auf seine Sprache und auf die von ihm verwendete Terminologie geworfen werden.

1. "Damit im Theologischen die mathematische Klarheit gefunden werde ..."

Ut in Theologicis Mathematica inveniatur claritas, et in Mathematicis Theologica inveniatur securitas — "damit im Theologischen die mathematische Klarheit gefunden werde und in der Mathematik die theologische Sicherheit": Dieser Satz fasst wohl in etwa die Ziele zusammen, die sich der gelehrte Zisterziensermönch und spätere Bischof Juan Caramuel y Lobkowitz (1606–1682) mit der Ausarbeitung seiner KYBEIA und der anschliessenden ARITHMOMANTICA gestellt hatte. Seine Ausführungen unter diesen beiden Titeln bieten eine Glücksspielrechnung im eigentlichen Sinne des Wortes. Er widmet ihr in seiner MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA, im zweiten Band, also in der MATHESIS NOVA, mehr als sechzig Seiten. Es geht ihm dabei nicht nur darum, die Berechnungen darzustellen, die einem helfen können, die Gewinn- und Verlustmöglichkeiten bei Glücksspielen zu erkennen und damit auch die Einsätze gerecht festzusetzen. Nein, er möchte dem *Theologen* zeigen, wann ein solches Spiel von der mathematischen Seite her als gerecht, als unparteiisch bezeichnet werden kann; dem *Mathematiker* aber will er erläutern, wann gegen ein solches keine Bedenken moralischer Art anzumelden sind. — In unserer Arbeit wollen wir nun Caramuels Glücksspielrechnung nachgehen. (0)[1], (1)

"Zwei voneinander unabhängige Entwicklungen führten durch ihr Zusammentreffen zur Mathematisierung des Wahrscheinlichen in der Zeit zwischen Pascal und de Moivre. Es handelt sich dabei um die *Wandlung des Bedeutungsinhaltes von probabilitas zu einem quantifizierbaren Begriff* und zum andern um das *Konzept des Zufalls*,

[1] Ziffern in runden Klammern verweisen auf Anmerkungen am Schluss dieser Arbeit.

das im Rahmen der Glücksspiele in einer *Chancenverhältnisrechnung* mathematisiert wurde" (I. Schneider, 1976a). Die Überlegungen zur Glücksspielrechnung, die Caramuel in seiner KYBEIA und in seiner ARITHMOMANTICA anstellt, gehören also in den einen der beiden Ströme, die dann schliesslich in die Konzeption und Ausarbeitung einer *Wahrscheinlichkeitsrechnung* durch Jakob Bernoulli (1655–1705) in seiner ARS CONJECTANDI (postum 1713) einmündeten. Caramuel berechnet indessen hier noch *keine Wahrscheinlichkeiten* (probabilitates) im eigentlichen Sinne; er zählt *Gewinn-* und *Verlustmöglichkeiten* und zeigt, wie sich damit die *Einsätze* festlegen lassen, die zu einem gerechten Spiel führen. Deshalb bezeichnen wir ja seine diesbezüglichen Ausführungen — um Missverständnissen vorzubeugen (2) — einfach mit "Glücksspielrechnung". In der Antike, im Mittelalter und in der frühen Neuzeit wurde nämlich mit *probabilis* — unter anderem — vor allem eine *opinio*, also eine *Meinung*, bezeichnet, die glaubwürdig war, die z.B. durch eine Autorität bezeugt worden war. "Probabilis" und "probabilitas" umfassten allerdings schon damals ein breites Spektrum von Bedeutungen (cf. Th. Deman, 1933). — In einem anderen Bereich jedoch, aber gerade *nicht* in seiner Glücksspielrechnung, verwendet auch Caramuel "probabilis" und "probabilitas": Als Moraltheologe vertritt er bekanntlich einen ausgesprochenen Probabilismus, und so tritt natürlich der Begriff "probabilitas" in seinen Publikationen, die von diesem Probabilismus handeln, als einer der grundlegenden Begriffe sehr häufig auf; damit ist er also auch mitten im anderen der beiden oben skizzierten Ströme. Wir werden sehen, dass sich diese beiden Ströme bei ihm noch kaum vermischen, aber vielleicht doch gelegentlich berühren. — Caramuel nahm übrigens eine scharf antijansenistische Haltung ein und stellte sich im Kampf gegen den Jansenismus ganz auf die Seite der Jesuiten. Und in diesem Zusammenhang ist eine weitere Feststellung von I. Schneider von Interesse (1976b): "Die Lebensfähigkeit der Huygensschen Glücksspielrechnung", so schreibt er, "hätte sich sicher ziemlich bald erschöpft, wenn nicht bedingt durch Ereignisse wie den Probabilismusstreit zwischen den Jansenisten und Jesuiten das Probabilitas-Konzept der Zeit mit der Glücksspielrechnung verknüpft worden wäre." (3)

2. Biographisches

Juan Caramuel y Lobkowitz, geboren 1606 in Madrid, Sohn eines aus Böhmen stammenden Vaters und einer friesischen Mutter, offenbarte schon in früher Jugend grosses Talent für Mathematik und Astronomie. (4) Er trat in den Orden der Zisterzienser ein und wurde "einer der originellsten Zisterzienser seiner Zeit" (H.J. Roth, 1980). Er studierte Philosophie in Alcalá, Theologie in Salamanca und in Löwen und promovierte 1638 zum Dr. theol. Verschiedenste Aufgaben, vor allem im Dienste der Kirche, führten ihn fast durch ganz Europa. 1657 wurde er Bischof von Campagna-Satriano im Königreich Neapel, 1673 Bischof von Vigevano in der Lombardei. Er starb 1682 in Vigevano; die Grabinschrift in der dortigen Kathedrale lautet: "Magnus Caramuel, episcopus Vigevani".

Caramuel zeigte zeitlebens eine ganz aussergewöhnliche intellektuelle Aktivität und Neugierde; seine umfassende Gelehrsamkeit (er kannte z.B. 24 Sprachen, darunter mehrere asiatische, so auch das Chinesische) ist von seinen Freunden und von seinen

Feinden anerkannt worden. Während er in seinen Werken "einerseits Ausblicke von ungeahnter Neuheit und Folgenschwere eröffnete und das Nächste wie das Fernste in kühner Conception vereinigte, gefiel er sich andererseits in Paradoxen und allem Absonderlichen " (F. Kaulen, 1883). "Ce n'est qu'en théologie morale qu'on parle encore de lui. Il est un des casuistes les plus représentatifs et les plus avancés du courant laxiste: princeps laxistarum a pu dire S. Alphonse" (R. Brouillard, 1949). — Seine Schriften sind überaus zahlreich: mehr als siebzig Bände im Folioformat über die verschiedensten Fachgebiete, Philosophie, Theologie, Musik, Poetik, Mathematik, Architektur usw.: dem enzyklopädischen Ideal des Barocks folgend, wollte er in *jedes* Wissensgebiet eindringen. Er muss ungeheuer fleissig gearbeitet haben, und man darf seiner Aussage in einem seiner theologischen Werke wohl Glauben schenken: A prima pueritia praeter legere et scribere nihil ago. Sive in via sim, sive in lecto, semper meditor, quae sim dicturus. Quotidie ingenium XIV horis exerceo (hier zitiert nach F. Kaulen, 1883). (5)

Auf seine zweibändige Darstellung der Mathematik, die MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA, werden wir im folgenden noch zu sprechen kommen. Dabei wird die eben zitierte Aussage, dass Caramuel *nur* noch in der Moraltheologie genannt werde, allerdings etwas zu relativieren sein. 1982, also 300 Jahre nach seinem Tode, hat man in Vigevano einen internationalen Kongress durchgeführt, um die vielfältigen Arbeiten dieses Polyhistors darzustellen: P. Pissavino, LE MERAVIGLIE DEL PROBABILE — JUAN CARAMUEL 1606–1682 (Vigevano 1990). Im gleichen Zeitraum sind auch noch weitere Arbeiten über Caramuel erschienen, so die Bücher von D. Pastine (1975) und von J. Velarde Lombraña (1989) und die Abhandlung von L. Bernardini Soto (1977). Über die mathematischen Arbeiten von Caramuel hat S. Garma in Valencia eine Dissertation publiziert (1978). — Den Spaniern hat D.F. Diéguez bereits 1919 Juan Caramuel als "un matemático español del siglo XVII" durch eine Darstellung von Leben und Werk in Erinnerung gerufen: "el símbolo de la ciencia española del siglo XVII" — *"die Symbolgestalt der spanischen Wissenschaft des 17. Jh."* — Caramuel ist also keineswegs in Vergessenheit geraten!

3. Zu den mathematischen Werken von Caramuel

Im Zusammenhang mit unserer Darstellung von Caramuels KYBEIA und ARITHMOMANTICA müssen wir kurz auf seine zwei mathematischen Werke hinweisen, auf die MATHESIS AUDAX, deren Titelblatt die Jahreszahl 1644 trägt (nicht 1642, wie gelegentlich zu lesen ist), und die bereits genannte MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA von 1670. Eine umfangreiche Arbeit über diese Werke mit vielen interessanten Einzelheiten hat A. Pérez de Laborda (1990) publiziert; er konnte dabei auch die Ergebnisse aus der eben erwähnen Dissertation von S. Garma mitverwenden. Ferner orientieren selbstverständlich D.F. Diéguez (1919), D. Pastine (1975) und J. Velarde Lombraña (1989) bei ihren Besprechungen von Caramuels zahlreichen Schriften auch über seine mathematischen Werke. Aus verständlichen Gründen kann jedoch in jenen Gesamtdarstellungen auf die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA, die uns nun hier speziell interessieren werden, nicht sehr detailliert eingegangen werden.

Caramuels erstes Buch über Mathematik ist seine MATHEMATICA AUDAX. Ein eigenartiges, den heutigen Leser überraschendes Buch, will er darin unter anderem doch zeigen, wie sich mit Mathematik auch ganz schwierige Probleme der Metaphysik und der Theologie lösen lassen! Nicht nur "humana et terrestria", sondern auch "Angelica et Divina" sollen "lineis" und "numeris" — also mit Hilfe der Geometrie und der Arithmetik! — dargestellt und entschieden werden, schreibt er im prooemium. Nacheinander behandelt er Logik, Methaphysik und Theologie. Es geht ihm dabei nicht etwa einfach darum, diese Gebiete axiomatisch-deduktiv darzustellen, also von Postulaten und Axiomen aus in streng logischer Aufeinanderfolge und Verbindung die Theoreme zu gewinnen und so die ganze Lehre darzustellen: Versuche, theologische Abhandlungen in dieser Art aufzubauen, gab es ja bereits im Mittelalter (cf. z.B. R. Ineichen 1993). Nein, er geht weiter und verwendet auch eigentliche mathematische Begriffsbildungen, um Sachverhalte aus der Logik, der Metaphysik und der Theologie darzustellen. Ein ganz einfaches Beispiel: In der Logik führt er das punctum logicum ein, gegeben durch die simplex apprehensio, die "einfache Erfassung". Und ganz analog, wie zwei Punkte der (gewöhnlichen) Geometrie eine Gerade bestimmen, kommt nun bei ihm die These: Ex duobus punctis logicis et unione logica componitur *linea logica*, seu *propositio*. Analoge, doch z.T. viel schwierigere Beispiele finden sich in seiner Darstellung der Methaphysik und der Theologie. Bei der Behandlung der Theologie weist er jedoch mit Überzeugung darauf hin, dass es in der Divina Philosophia eben viele Fragen gäbe, die ohne Mathematik nicht verstanden werden können [quae non possunt intelligi sine Mathesi]. Er präzisiert aber auch, dass sich seine Theologia mathematica von der scholastischen Theologie nicht etwa objecto unterscheide, sondern bloss modo ratiocinandi. — Bevor man solche Darlegungen be- oder verurteilt, sollte man bedenken, dass "bereits Descartes die Anwendung der Mathematik auf *alle* Lebensgebiete vorbereitet" hatte (E. Fueter, 1938), dass Caramuel sich sehr mit Descartes beschäftigt hat, dass er im "Jahrhundert der Mathematik" lebte und schrieb und dass aus jener Zeit z.B. Arbeiten von Barockscholastikern vorhanden sind, die gar "mit Dreieck und Kugeln" operieren, "um die eucharistische Realpräsenz zu beweisen" (I. Müller, 1971, p. 124). (6)

Die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA sind im Teil COMBINATORIA des zweiten Bandes der MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA enthalten — einer Arbeit "ausserhalb der wiederholt und längst betretenen Pfade" (M. Cantor, 1913, p. 771). Wie wir bereits gesagt haben, handelt es sich bei der MATHESIS BICEPS um eine Art Enzyklopädie, eine Darstellung der alten und neuen Mathematik, soweit sie damals publiziert war. Natürlich hat Caramuel sehr viel aus anderen Büchern übernommen; er zitiert übrigens oft andere Autoren. Das ist ganz normal: Auch heute würde eine zweibändige mathematische Enzyklopädie nicht aus lauter Originalarbeiten des Autors bestehen! Doch wo man auch immer in einem dieser Bände zu lesen beginnt, bemerkt man bald, wie er den Stoff in seiner eigenen, farbigen und abwechslungsreichen Sprache darstellt, immer bemüht, dem Leser, den er oft ganz direkt anspricht (attende..., rogaris..., sumis... usw.), das Mitkommen zu erleichtern. Es würde zu weit führen, hier auch nur alle Kapitelüberschriften aufzulisten; es sei dafür nochmals auf A. Pérez de Laborda (1990) verwiesen. Aber einige wenige Besonderheiten des Werkes von Caramuel wollen wir doch anführen:

— Er untersucht z.B. die Teilbarkeitseigenschaften der natürlichen Zahlen.

— Weiter führt er die Darstellung der natürlichen Zahlen mit Basen ein, die von 10 verschieden sind, und betrachtet also *n–äre Zahlendarstellungen.* Er stellt Zahlen etwa im *binären* Zahlensystem dar. 0 durch o, 1 durch a, dann $2 = ao$, $3 = aa$, usw., $31 = aaaaa$, $32 = aooooo$ etc.. Hier ist anzumerken, dass bereits Blaise Pascal (1623–1662) in seiner kleinen Abhandlung DE NUMERIS MULTIPLICIBUS (1654 bzw. 1665) festgestellt hat, dass für die Basis 10 unseres Zahlensystems keine "natürliche Notwendigkeit" [necessitas naturae] besteht, dass sie auf einer Konvention [ex instituto hominum] beruht und dass durchaus andere Basen gewählt werden können (B. Pascal, 1954, p. 159) — nach M. Cantor (1913, p. 783) ein "jedenfalls unbekannter Vorgänger von Caramuel". G.W. Leibniz machte seine Dyadik erst 1697 bekannt (H. Wussing 1990, p. 225); eine Abhandlung über dieses binäre (duale) Zahlensystem, EXPLICATION DE L'ARITHMÉTIQUE BINAIRE[...], publizierte er 1703.
— Caramuel definiert und berechnet ferner "Cologarithmen", um bei gewissen trigonometrischen Rechnungen negative Kennziffern zu vermeiden. Seine Tafel zeigt, dass diese "Cologarithmen", die wir hier mit Clog bezeichnen wollen, mit den dekadischen Logarithem (lg) so zusammenhängen:

$$\text{Clog}\, x = 10 - lgx; \quad \text{so ist also z.B. Clog } 1 = 10, \quad \text{Clog } 2 = 9,69\,897,$$
$$\text{Clog } 10^9 = 1 \quad \text{und} \quad \text{Clog}\, 10^{10} = 0.$$

— Schliesslich nimmt er in seine MATHESIS NOVA, wie bereits erwähnt, die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA, also die Darstellung einer Glücksspielrechnung, auf und dies in einer Zeit, da die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch in ihren Anfängen, in statu nascendi war!

4. Mathematik des Würfelspiels - KYBEIA

(p. 972–995)

4.1 Allgemeines

Glücksspiele gehören wohl zu den ältesten Spielen der Zivilisation. Bereits von den vedischen Indern, also den Indern des Zeitraumes etwa 2000–1000 vor Christus, wird bezeugt, dass das Würfelspiel zu jenen Vergnügungen gehörte, denen sie sich mit Leidenschaft hingaben. Aus der Antike berichten uns viele Zeugnisse vom sehr eifrigen Spiel der Griechen und Römer mit den Knöcheln (den Astragalen) und mit dem eigentlichen Würfel; mit Knöchel und Würfel ist übrigens auch im antiken Palästina gespielt worden. Und von den Germanen überliefert uns Tacitus, dass sie mit so unbeschwertem Leichtsinn gewürfelt haben, dass sie gar ihr Leben oder ihre Freiheit in einem allerletzten Wurf aus Spiel setzten, wenn sie alles andere verloren hatten (GERMANIA 24).

Doch eine "Glücksspiel*rechnung*", etwa eine zahlenmässige Beurteilung der *Chancen* bei solchen Spielen oder eine systematische Berechnung des *Einsatzes*, ist in der Antike nicht entstanden. Es finden sich aber im Schrifttum der Antike viele Überlegungen und Begriffe, die ins *Umfeld* von wichtigen, grundlegenden Überlegungen und Begriffen der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören (vgl. dazu R. Ineichen, 1996). Erst im 13. und 14. Jahrhundert hat man begonnen, Spielsituationen, wie sie

sich beim Werfen von drei Würfeln ergeben können, systematisch in mathematischer Form zu beschreiben, so im Pseudovidius DE VETULA eines unbekannten Autors und in frühen Kommentaren zur DIVINA COMMEDIA von Dante (1265-1321); (vgl. dazu z.B. R. Ineichen, 1988). — Ein eigentlicher Durchbruch gelang dann aber erst Blaise Pascal (1623–1662) und Pierre de Fermat (1601–1665) mit den Überlegungen, die sie in ihrem berühmt gewordenen Briefwechsel von 1654 diskutierten: zwar noch *keine* Berechnung von *Wahrscheinlichkeiten*, sondern eigentlich eine Berechnung von Erwartungswerten und von Chancenverhältnissen bei gewissen Glücksspielen und vor allem auch bei der Verteilung der Einsätze in vorzeitig abgebrochenen Spielen, bei den "Teilungsproblemen". 1656 vollendete Christiaan Huygens (1629–1695) die Fassung seiner kurzen, doch systematisch und streng deduktiv aufgebauten Abhandlung VAN REKENINGH IN SPELEN VAN GELUCK, die in lateinischer Übersetzung 1657 erschien, eingefügt in die EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM LIBRI QUINQUE von Frans van Schooten (um 1615–1660), unter dem Titel DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEAE; die Ausgabe in Niederländisch wurde 1660 publiziert. (7) Gegen Ende des 17. Jahrhundert hat Jakob Bernoulli (1655-1705) seine ARS CONJECTANDI geschrieben, die postum 1713 publiziert wurde. In seinem Werk — er sprach von *ars conjectandi sive stochastice*, also von "Vermutungs- oder Mutmassungskunst" — konnte er zwar auf den Arbeiten einiger weniger Wegbereiter aufbauen, doch ging er in seinen Überlegungen und Folgerungen weit über das hinaus, was zu seiner Zeit schon vorgelegen hatte. Damit lag nun eine schon recht breit entwickelte *Stochastik* vor, eine Stochastik übrigens, die sich keineswegs auf die Behandlung von Glücksspielen beschränkte, sondern auch auf viele wichtige Fragen des menschlichen Lebens angewendet sein wollte, so etwa bei Krankheiten, Todesfällen, bei der Beurteilung der Lebenserwartung und bei Entscheidungen im Rechtswesen. — 1671 ist auch die erste systematische Theorie der Berechnung von Leibrenten erschienen, in welcher der Wahrscheinlichkeitsbegriff bewusst verwendet worden ist, verfasst vom holländischen Staatsmann Johan de Witt (1625–1671), WAERDYE VAN LYF-RENTEN. Der Fachausdruck "Wahrscheinlichkeit" kommt in ihr noch nicht vor, "aber der Ausdruck *Apparentie ofte Hazardt* bedeutet offensichtlich das gleiche" (K. Kohli, B.L. van der Waerden, in J. Bernoulli, 1975, p. 530). — Und in eben diesem 17. Jahrhundert, in welchem also mehrere sehr wichtige Arbeiten zur Grundlegung und Entwicklung der Stochastik verfasst worden sind, ist schliesslich 1670 das zweibändige umfangreiche Werkt MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA von Juan Caramuel y Lobkowitz erschienen. Im zweiten Band, in der MATHESIS NOVA, sind im Abschnitt COMBINATORIA 24 Seiten der KYBEIA gewidmet — *De alea et ludis fortunae serio disputans*; anschliessend folgen 46 Seiten ARITHMOMANTICA, die ein spezielles Problem der Stochastik behandeln, nämlich das Genueser *Lotto*. Den Überlegungen von Caramuel zur Stochastik soll nun im folgenden nachgegangen werden.

4.2 Ausgangspunkt, erste Beispiele

(p. 971–973)

Nach Caramuel müssten Glücksspiele im gut geführten Staat eigentlich verboten sein. (8) Bis es aber soweit ist, muss dafür gesorgt sein, dass sie nicht in ungerechter

Art und Weise durchgeführt werden. Er will zeigen, wie dieses Ziel erreicht werden kann, und geht dazu aus von der "allgemeinen Lehre, die allenthalben von den Theologen überliefert wird" [a communi doctrina, quae a Theologis passim traditur, exordium sumo]:
"Bei Spielen und Lotterien, die allein vom Zufall [vom Glück] abhängen, muss völlige 'Unparteilichkeit' [aequalitas, Gleichheit] gewahrt werden" — In ludis et sortibus, quae a sola fortuna dependent, servari omnino debet *aequalitas.* — An Stelle von aequalitas verwendet Caramuel gelegentlich auch aequitas — "Gleichheit", "Billigkeit". (9)

Doch woher kann der reine Theologe [purus Theologus] wissen, ob aequalitas vorliegt? Er muss dazu auf die Mathematik zurückgreifen, denn
"Damit aequalitas gewahrt werden kann, ist es notwendig, dass der Einsatz der Gefahr [dem Risiko] entspricht [ut periculo pecunia correspondeat] und zwar so, dass diejenigen, die sich der gleichen Gefahr aussetzen, den gleich hohen Einsatz [aequalem pecuniam] leisten müssen, dagegen diejenigen, die sich ungleichen Gefahren aussetzen, ungleiche Einsätze leisten müssen; derjenige muss einen weniger hohen Einsatz leisten, der sich einer grösseren Gefahr aussetzt, dagegen derjenige einen höheren Einsatz, der sich einer kleineren Gefahr aussetzt."
Es ist dabei aber nicht nur abzuklären, ob Gefahr besteht, sondern auch, wie gross sie ist; denn *die Grösse des Einsatzes richtet sich nach der Grösse der Gefahr* [nam exponendae pecuniae tantitas a periculi tantitate dependet].

Anschliessend legt Caramuel nun die ersten beiden Beispiele vor, zunächst eines "das von einigen vorgelegt zu werden pflegt, nämlich: wenn jemand, ohne dass ich es weiss, in der einen Hand 3 Münzen versteckt, in der anderen 7 und mir die Möglichkeit bietet auszuwählen, dann ist dies mir soviel wert, als wenn er mir [sofort] 5 gegeben hätte" [hoc tantum valet, ac si 5 dedisset]. — Hier kann keine Ungleichheit der Gefahr gemessen werden. "Da der vernünftige Grund [ratio] des einen nicht grösser ist als jener des anderen, treffe ich die Mitte zwischen zwei Extremen [inter duo extrema ferio medium] und sage, dass der Unterschied in zwei gleiche Teile zu teilen ist, und dass jene Wahl für mich soviel wert ist, wie wenn er mir 5 gäbe." — Anders ist es aber beim Würfelspiel [in alea]: Hier können Gleichheit und Ungleichheit von Hoffnung und Gefahr [spei et periculi aequalitas et inaequalitas] erkannt und genau bestimmt werden. — Aber weil ja gerade hier die Schwierigkeiten liegen, will Caramuel "im vorliegenden Werk zwei Strahlen der Macht Gottes anrufen, nämlich die *Theologie und die Kombinatorik*" — so wie "die Alten im Sturm zwei Gottheiten anriefen, nämlich Castor und Pollux [...], und damit dies klarer hervortritt, werden wir im folgenden zunächst über das Glücksspiel [ludus qui a sola pendet fortuna] handeln."

Beim ersten Beispiel, wo es um die 3 bzw. 7 Münzen geht, vermerkt Caramuel ausdrücklich, es pflege von einigen (!) vorgelegt zu werden [quod solet a nonnullius proponi]. Es findet sich mit denselben Zahlen tatsächlich auch in der oben bereits erwähnten Abhandlung von Huygens von 1657. Deshalb drängt sich bereits hier ein erstes Mal ein Vergleich zwischen Huygens und Caramuel auf; auch bei späteren Aufgaben und Beispielen von Caramuel werden wir wieder auf Huygens zurückkommen müssen. Huygens formuliert die Aufgabe zuerst in der Einleitung zu seiner Abhandlung, und hier ist zu sagen, dass Caramuels Formulierung mit jener von Huygens zwar nicht vollständig, aber doch weitgehend übereinstimmt. Wir werden bei anderen Aufgaben, die sich bei Huygens und bei Caramuel finden, sehen, dass sie sich schon in der sprachlichen Formulierung der Problemstellung

wesentlich stärker unterscheiden.
Huygens diskutiert die Lösung im Anschluss an den Beweis seines ersten Lehrsatzes, die Propositio I: "Wenn ich a oder b erwarte, von denen ich jedes ebenso leicht erhalten kann, so ist meine Erwartung [expectatio] $(a+b)/2$." Damit bekommt er natürlich sofort die Lösung: Si ad 3 vel 7 aequa sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; [...] (hier und bei allen lateinischen Huygens-Texten in der Übersetzung, die Frans van Schooten vorgenommen hat). Im Anschluss daran zeigt Huygens an Hand der vorgelegten Zahlen nochmals, dass es sich hier wirklich um ein gerechtes Spiel handelt. — Caramuel wird hier und auch später wohl kaum den originalen Text von Huygens zur Verfügung gehabt haben, sonst hätte er wirklich keinen Grund gehabt, den Text von Huygens im Anschluss an seine Ausführungen noch in extenso anzufügen und dazu noch zu schreiben, er habe von diesem Text erst gehört, als er seine eigene Darstellung einem ihm bekannten Gelehrten gezeigt habe. (Wir werden darauf später zurückkommen.) Natürlich ist es sehr wohl möglich, dass er aus einer Quelle schöpfen konnte, die ihrerseits auf dem Huygens-Text beruhte: jeder, der ein umfangreiches zweibändiges Lehrbuch der "alten und neuen" Mathematik schreibt, wie dies Caramuel getan hat, wird sich auf andere Darstellungen stützen! Und zudem ist auch noch zu bedenken, was der Mathematikhistoriker A.W.F. Edward (1982) in einem ähnlichen Zusammenhang schreibt: "the obligation to quote others was not then a firm part of mathematical writing."

Auch die Argumentationen bei der Lösung dieser Aufgabe sind ganz verschieden. Huygens wendet einen vorher bewiesenen Lehrsatz an, um den Wert (die "Hoffnung") des Spieles zu berechnen. Schooten verwendet in seiner Übersetzung für diesen Begriff den Ausdruck valor expectationis, woraus sich unser heute gebräuchlicher Fachausdruck "Erwartungswert" ergeben haben dürfte. Caramuel hingegen argumentiert eigentlich mehr oder weniger mit dem "gesunden Menschenverstand", ohne auf einen vorher bewiesenen Lehrsatz Bezug zu nehmen: Leitend sind für ihn die oben wiedergegebenen Gedanken über den Zusammenhang von Gefahr und Einsatz, der durch die vielen nun noch folgenden Beispiele präzisiert wird.

Verschieden sind Huygens und Caramuel auch in ihren einleitenden Bemerkungen: Huygens setzt voraus, dass der Begriff des fairen Spiels, des gerechten Spiels seinen Lesern selbstverständlich ist; er appelliert an einen intuitiven oder doch wenigstens nicht-mathematischen Begriff von "Unparteilichkeit" (vgl. L. Daston, 1989). — Er gibt zwar keine Definition seines Wertbegriffs, aber er formuliert zunächst einen *Grundsatz*: "Ich nehme als Grundlage, dass im Spiel die *Chance*, die jemand zu irgend etwas hat, gleich viel wert ist wie dasjenige, mit dem, wenn man es hat, man wieder zu derselben Chance gelangen kann in einem ehrlichen Spiel, d.h. in einem solchen, in dem niemandem Verlust geboten wird" (Übersetzung von B.L. van der Waerden, J. Bernoulli, 1975, p. 9). Daraus leitet er dann die drei Lehrsätze (10) ab, die er im weiteren benötigt (vgl. dazu B.L. van der Waerden, 1975, p. 8ff., I. Schneider 1996, Huygens in J. Bernoulli, 1899, p. 4ff. oder Huygens, Oeuvres compl. t. XIV, 1920). Nach B.L. van der Waerden (l.c.) ist der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* implizit im Begriff der Chance (Kans) enthalten, den Huygens dauernd verwendet. — Caramuels Einleitung ist anderer Art; wir haben sie oben skizziert.

Wir werden — wie schon gesagt — noch mehrmals in die Lage kommen, Caramuel und Huygens vergleichen zu müssen. Deshalb soll hier ein für allemal festgehalten werden: Huygens ist als Physiker und Astronom *einer der bedeutendsten Naturforscher* des 17. Jahrhunderts, dazu *ein grosser Mathematiker*, der eine ganze Reihe von schwierigen Problemen der Mathematik meisterhaft bewältigt hat und mit seiner oben erwähnten Abhandlung über die Berechnungen bei Glücksspielen von 1656/57 zu einem Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung geworden ist. Und seine Abhandlung ist

systematisch und streng deduktiv aufgebaut, knapp und scheinbar lückenlos (vgl. dazu I. Schneider, 1996 und unsere Anmerkung (10)). Sie ist *more geometrico* geschrieben. — Caramuel hingegen ist, wie wir bereits gesehen haben, ein *Polyhistor*, der über unglaublich viele Wissensgebiete geschrieben hat, also einer, der wohl fast in allen Sätteln reiten konnte. Er ist *nicht* primär Mathematiker, obwohl er sich schon in früher Jugend mit der Mathematik beschäftigt hat. Aber er kennt die Mathematik — vetus et nova! — sehr gut, und man findet in seiner MATHESIS BICEPS auch durchaus eigenständige und originelle, interessante Überlegungen. In seiner KYBEIA schreibt er sehr anschaulich, abwechslungsreich in seinen Formulierungen, keineswegs knapp, farbig, immer bemüht, dem Leser das Mitkommen zu erleichtern. Er gibt *keine* systematisch und deduktiv aufgebaute Theorie, seine Argumentationen sind gelegentlich einfach Plausibilitätsbetrachtungen, manchmal auch nicht frei von Wiederholungen — und an verschiedenen Stellen auch fehlerhaft.

4.3 Vom Würfeln — De Alea

(p. 973–975)

In diesem Abschnitt stellt Caramuel zuerst verschiedene Spielgeräte vor und gibt *seine* zugehörigen Fachausdrücke an:

— *Talus* oder taxillus, das vierseitige Knöchelchen (ossiculum), das als "Würfel" geworfen wurde, von den Griechen als *astragalos* (ἀστράγαλος) bezeichnet, von den Spaniern *taba* genannt. ἀστραγαλίζω: talis ludo; ἀστραγαλίζοντες: qui talis ludunt usw. — Caramuel erwähnt nicht, dass dieser kleine Knöchel aus der hinteren Fusswurzel von Schaf oder Ziege stammt. Die Bezeichnung der Seiten und die Zuordnung von Zahlenwerten zu den einzelnen Seiten stimmen nur teilweise mit jenen überein, die aus der Antike überliefert sind (vgl. R. Ineichen, 1996, p. 26).

—*Perinola* (span.): ein Kreisel, dessen oberer Teil als Würfel gestaltet ist; die vier Seitenflächen sind mit P, D, S, T bezeichnet. P: pone unum nummum; D: derelinque (hoc est, nec ponas nec extrahas); S: sume unum nummum; T: Totum, quod est positum, extrahe.

— Schliesslich noch der eigentliche *Würfel*: talus [!] cubicus, habens sex superficies. Die Bezeichnung *tessera* wird hier noch nicht eingeführt, später jedoch in der Regel verwendet. Griechisch wird er als *kybos* (κύβος) bezeichnet, wegen der Zahl der Seiten auch als βόλος ἑξάπλευρος; κυβεία: lusus aleae, Würfelspiel; κυβευτής: qui aleam ludit, aleator, Würfelspieler u.a.m.

Schon im Altertum und im Mittelalter wurde in der Regel mit drei oder mit zwei Würfeln gespielt: Man hatte drei bzw. zwei Würfel zu werfen, und der Mitspieler oder der Spieler selbst hatte vorauszusagen, welche Augensumme sich ergeben wird. Caramuel gibt richtig an, auf wie viele Arten sich die Augensummen von 2 bis 12 ergeben und folgert ebenfalls ganz richtig, dass bei diesem Spiel mit zwei Würfeln, die Zahl 7 die beste Zahl ist [hinc patet optimum numerum esse septenarium], weil sie auf die grössere Anzahl von Arten aus den Punktezahlen der beiden Würfel erzeugt werden kann [pluribus modis potest egredi]. Aus seinen späteren Ausführungen (p. 994) ist

auch zu ersehen, dass er das Problem der drei Würfel richtig erfasst hat: hier sind 10 und 11 die besten Zahlen [si denique utamur 3 tesseris, optimi numeri sunt 10 et 11].

Das Problem der drei Würfel spielt in der Vorgeschichte der Stochastik übrigens eine wichtige Rolle. Es taucht bereits im 13. Jh. auf, also früher als das Teilungsproblem, auf das wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen werden. Besonders bemerkenswert ist, dass es schon damals richtig und unter Berücksichtigung des stochastischen Charakters gelöst worden ist: in einer fingierten Autobiographie von Ovid, im Pseudoovidius DE VETULA, gibt der unbekannte Verfasser in lateinischen Hexametern alle notwendigen Resultate, auf dass der Leser die Stärken und Schwächen der einzelnen Augensumme vollständig erfasse. — Im sechsten Gesang des *Purgatorio* seiner *Divina commedia* weist Dante (1265–1321) ebenfalls auf das Spiel mit den drei Würfeln — den gioco della zara — hin, und schon seine ersten Kommentatoren fügen ihren Betrachtungen mathematische Überlegungen über die besten Prognosen an, allerdings zunächst nicht so vollständig und korrekt, wie dies in DE VETULA geschehen ist (R. Ineichen, 1987, 1988).

Das nächste Spiel betrifft nochmals das Werfen des *Knöchels* oder, wie Caramuel hier sagt, des *talus vetus*. Er wird geworfen, und Paulus wettet auf eine bestimmte der vier Seiten, Cajus auf die gegenüberliegende. Beide haben die gleich grosse Summe einzusetzen, weil sie in gleicher Weise dem Schicksal ausgeliefert sind [quia aeque est obnoxius fortunae unus quam alter]. — Der heutige Leser der Ausführungen von Caramuel vermisst natürlich einen Hinweis darauf, dass hier die beiden einander gegenüberliegenden Seiten, die ja von verschiedener Gestalt sind als "gleichberechtigt" (gleichmöglich) vorausgesetzt werden. Dies trifft zwar einigermassen zu: Versuche zeigen, dass die beiden einander gegenüberliegenden schmalen Seiten mit einer Wahrscheinlichkeit von je etwa 10 % erscheinen, die beiden breiten Seiten mit einer Wahrscheinlichkeit von je ungefähr 40 %. Doch solchen Fragen ist Caramuel hier nicht nachgegangen. Dies zeigt sich dann besonders deutlich im anschliessend betrachteten Spiel: Cajus setzt auf eine bestimmte Seite, sein Gegner Paulus setzt darauf, dass gerade diese Seite nicht erscheint, sondern irgendeine der drei andern. Caramuel betrachtet nun offenbar die vier Seiten des Knöchels alle als gleichmöglich und meint: "Wer also sagt, dass von vier [Fällen], die möglich sind und eintreffen können, dieser eine [Fall] eintreffen wird und keiner der anderen drei, kann der nur auf eine Art gewinnen und auf drei Arten irren. Also muss er eine Goldmünze [aureus] setzen und drei erwarten: es ist ebenso viel, eine Goldmünze drei Gefahren auszusetzen, wie drei Goldmünzen einer Gefahr [tantum enim est exponere unum aureum tribus periculis quam tres aureos uni periculo]. Natürlich wäre seine Überlegung durchaus richtig, wenn alle vier Seiten gleichmöglich wären; dies trifft aber beim Astragalos, wie wir eben ausgeführt haben, nicht zu. — Bemerkenswert ist hingegen die *ausführliche und anschauliche Art seiner Erklärungen* : Er lässt Cajus gegen drei fiktive Spieler spielen; jedesmal wettet Cajus auf das Erscheinen seiner Seite, auf jede der drei anderen Seiten setzt jeweils je einer der drei fiktiven Spieler, und zwar jedesmal eine Goldmünze. So ergeben sich drei gerechte und gleichwertige [iusti et aequales] Abmachungen und Cajus wird eine Goldmünze verlieren, wenn er verliert, jedoch drei gewinnen, wenn er gewinnt und damit alle drei fiktiven Spieler verlieren. — Viele Seiten weiter hinten (p. 994) weist aber Carmuel dann doch darauf hin, das die vier Seiten des Astragalos *nicht* gleichmöglich sind. Er stellt fest, dass der Astragalos von anderer Gestalt ist als der Würfel und dass beim Astragalos manche Seiten seltener auftreten [aliquae partes

rarius eminent]. Diese und einige andere Ungereimtheiten seiner Ausführungen an anderen Stellen seiner KYBEIA sind wohl doch eine Folge seiner überaus schnellen Arbeitsweise — kein Wunder bei der Fülle seiner Publikationen!

Von Girolamo Cardano (1501–1576), Arzt, Verfasser von populär-philosophischen Schriften und Mathematiker, stammt das älteste, erste Lehrbuch der "Wahrscheinlichkeitsrechnung", der LIBER DE LUDO ALEAE (ca. 1564, gedruckt 1663), wohl eher für Spieler als für Mathematiker gedacht. (11) Im 31., dem zweitletzten Kapitel behandelt auch er den ludus talorum. Doch auch er, der bekanntlich ein überaus eifriger, leidenschaftlicher Spieler war, berücksichtigt in seinen Überlegungen die Tatsache nicht, dass die Seiten keineswegs gleichmöglich sind. Er hat wohl fast immer mit Würfeln und kaum je mit Knöcheln gespielt.

Das nächste Spiel betrifft nochmals die *Würfel* — an dieser Stelle immer noch nicht als tesserae bezeichnet, sondern als *taxilli communes*. Caramuel stellt zunächst fest, dass, wenn man wettet, mit einem Würfel eine bestimmte Zahl, etwa den Sechser [Senarius] zu werfen und dafür eine Goldmünze setzt, man den Anspruch auf fünf Goldmünzen hat, wenn man ihn tatsächlich wirft. Anschliessend behandelt er vollständig und übersichtlich nochmals das Spiel mit zwei Würfeln: eine Tabelle gibt für jede Augensumme Hoffung [spes] und Gefahr [periculum] an. "Von hier aus lässt sich ein Urteil ableiten über den Wurf von drei und mehr Würfeln: immer derjenige nämlich, der verpflichtet ist, eine beschlossene Punktezahl zu erwarten, setzt sich der grösseren Gefahr aus als jener, der verpflichtet ist, alternativ diese oder diese oder eine andere zu erwarten."

Auch Girolamo Cardano behandelt das Problem der zwei und drei Würfel in seinem LIBER DE LUDO ALEAE richtig und vollständig, ebenfalls natürlich auch Huygens in seiner schon mehrfach zitierten Abhandlung. Es soll aber doch darauf hingewiesen werden, dass diese Probleme nicht so trivial sind, wie sie dem heutigen Leser vielleicht erscheinen: selbst G.W. Leibniz schreibt noch in einem Brief vom 22.3.1714, es sei "aussi faisable", also gleichmöglich, in einem Wurf mit zwei Würfeln zwölf oder elf Punkte zu erzielen (Brief an L. Bourget; siehe G.W. Leibniz, 1887, p. 569–570). Dabei müsste er doch hier unterscheiden: $12 = 6 + 6$ und $11 = 5 + 6$, aber auch $11 = 6 + 5$. Caramuel dagegen stellt für 12 klar fest: spes 1, pericula 35; für 11: spes 2, pericula 34 usw.

4.4 Teilungsprobleme — De his, qui ludum inceptum relinquant

(p. 976-980)

Ein Spiel, in welchem jener siegt, der zuerst eine bestimmte Punktezahl erreicht hat, muss aus irgendeinem Grunde unterbrochen werden. Es stellt sich die Frage, wie der Einsatz verteilt werden soll: ein *Teilungsproblem* (problème des partis, problem of points). — Caramuel beginnt mit der folgenden Aufgabe: Camillus und Fridericus würfelten [ludebant aleam]; jeder hat eine Goldmünze [aureus] eingesetzt. Gewinnen soll derjenige, der zuerst dreimal gewonnen hat. Fridericus hat bislang zweimal gewonnen, Camillus einmal. Nun geht der Würfel verloren [alea perditur], und das Spiel kann nicht vollendet werden. Wie soll jetzt der Einsatz [deposita pecunia] geteilt werden? — Anschliessend formuliert Caramuel noch ein (fast) analoges Problem für ein Ballspiel [ludus pilae], wo dem einen noch ein Teilsieg zum endgültigen Sieg fehlt, dem andern aber noch zwei Teilsiege. Es kann nicht mehr weitergespielt werden, "weil

der Ball geplatzt ist" [pila rumpitur] — ein kleines Beispiel für die meist sehr farbigen und anschaulichen Formulierungen von Caramuel! (12) Er präsentiert die folgenden Überlegungen: wenn im nächsten, nun nicht mehr durchgeführten Spiel, Camillus siegen würde, so würden beide gleichviel erhalten, nämlich je eine Goldmünze. Wenn aber Fridericus siegen würde, so würde er zwei Goldmünzen erhalten und Camillus keine. Der Sieg in diesem fiktiven Spiel ist "in gleicher Weise zweifelhaft" [victoria est aeque dubia]. Also muss die Teilung *zwischen* 1 und 2 gemacht werden, so dass keiner der beiden vor dem Sieg soviel hat, wie er durch den Sieg erringen könnte. Zwischen 1 und 2 ist die Mitte 1 1/2. Also wird Camillus 1/2 Goldmünze erhalten, Fridericus 1 1/2.

Bei der oben beschriebenen Situation im Ballspiel wird er noch deutlicher: Der Spieler, dem noch zwei Teilsiege fehlen, würde entweder mit einem weiteren Teilsieg den Gleichstand mit dem Gegner erreichen und damit seine eingesetzte Goldmünze wieder erhalten oder, falls der Gegner siegen würde, auch diese Goldmünze noch verlieren. Nun "ist die *Mitte* zwischen der einen Seite (nichts verlieren) und der anderen (eine Goldmünze verlieren) die Hälfte verlieren." — Damit kommt er wieder zur gleichen durchaus richtigen Teilung im Verhältnis von 1 : 3 wie beim Würfelspiel.

Anschliessend zieht Caramuel eine interessante *Folgerung*, die nun nicht mehr ein Teilungsproblem betrifft. "Daraus folgt [hinc patet]: Bei jedem Spiel, bei welchem der eine sagt: 'Ich werde zweimal gewinnen, bevor du einmal gewinnst', muss dieser eine Goldmünze setzen, der andere drei." — Er findet es dann aber doch notwendig, dieses Verhältnis von 1 : 3 für das Verhältnis der Einsätze noch besonders zu begründen: Wir spielen zuerst um eine Goldmünze. Wenn ich dieses erste Spiel verliere, so verliere ich eine Goldmünze. Wenn ich es gewinne, so werde ich meine Goldmünze und die dazu gewonnene gegen zwei Goldmünzen des Mitspielers setzen. Wenn ich wieder gewinne, so habe ich total drei Goldmünzen gewonnen (meine eigene, im ersten Spiel eingesetzte natürlich nicht mitgerechnet). Wenn ich aber das zweite Spiel verliere, nachdem ich das erste gewonnen habe, so verliere ich trotzdem insgesamt nur eine Goldmünze; denn jene, die ich beim ersten Spiel vom Gegner erhalten habe, bezahle ich ja nicht selber. Ausdrücklich weist er auf eine wichtige Voraussetzung hin (Ballspiel!): Beide Spieler müssen über die gleiche Erfahrung verfügen [pono esse aeque doctos syncybeytas]. — ($\sigma\upsilon\gamma\kappa\upsilon\beta\epsilon\upsilon\tau\acute{\eta}\varsigma$: Mitspieler, collusor).

Das Teilungsproblem, welches hier vorgelegt worden ist, findet man samt der Lösung auch bei Huygens als Propositio IV seiner Abhandlung (Huygens 1920, p. 66f.; J. Bernoulli 1899, p. 12f. bzw. 1975, p. 114). Wieder greift Huygens auf einen früher bewiesenen Lehrsatz zurück, wie es seinem systematischen und deduktiven Aufbau entspricht — more geometrico! Und wieder beruhen die durchaus plausiblen, recht plastisch vorgetragenen Überlegungen von Caramuel eher bloss auf dem gesunden Menschenverstand; sie sind aber doch nicht wesentlich verschieden von jenen von Huygens. Die vorgegebenen Zahlen sind bei beiden Autoren dieselben. "Victoria est aeque dubia" drückt bei Caramuel das aus, was bei Huygens mit "gelijcke kans" bzw. "manifestum autem est me aequam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum" ausgesagt wird. — Die Folgerung von Caramuel findet sich auch bei Huygens im Anschluss an seine Lösung, immerhin findet sich aber bei Caramuel noch eine Begründung, die sie vom Teilungsproblem unabhängig macht. — Blaise Pascal behandelt dieses Teilungsproblem bereits in seinem Brief vom 29. Juli 1654 an Pierre de Fermat (B. Pascal, 1954, p. 77; I. Schneider, 1988, p. 26). Auch hier geht es um drei Gewinnspiele, und

der eine Spieler hat zwei Partien gewonnen, der andere erst eine, genau wie bei Caramuel und bei Huygens. Mit dem Einsatz, um den es bei Caramuel geht, würde Pascals Lösung, frei formuliert, so aussehen: Fridericus würde feststellen, dass er auf alle Fälle eine Goldmünze erhält, die zweite vielleicht auch, vielleicht aber nicht: "Die Aussichten sind gleich [le hasard est égal]; teilen wir also diese zweite Goldmünze und geben Sie mir dazu noch jene, die mir sicher gehört." — Als Huygens seine Abhandlung zur Publikation an Frans van Schooten sandte, hat er in seinem Begleitbrief vom 27. April 1657 (Chr. Huygens, 1920, p. 58) ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich seit einiger Zeit einige der berühmtesten Mathematiker von ganz Frankreich mit Rechnungen dieser Art beschäftigt haben, "damit niemand mir die Ehre der Ersterfindung zuweist, [...]. Aber diese Gelehrten [...] haben indessen ihre Methoden geheim gehalten. Ich habe also die ganze Materie selber prüfen und vertiefen und mit den Elementen beginnen müssen. [...] in vielen Fällen habe ich feststellen können, dass meine Lösungen in keiner Art von ihren Lösungen abweichen." — A.W.F. Edwards (1982) schreibt dazu: "It is *just* possible to believe that no inkling of Pascal's method of expectations was communicated to Huygens along with the problem of Points, but difficult. [...] through correspondence with Carcavi in the autumn of 1656 [...] he learnt that his method was the same as Pascal's [...] the obligation to quote others was not a firm part of mathematical writing." (10), (13)

Nun folgen — wie bei Huygens — weitere Teilungsprobleme. Dem einen, Theon, fehlen noch drei Teilsiege bis zum Endsieg; dem anderen, Thyrsus, fehlt noch einer. Das Spiel wird abgebrochen; wir können die Situation kurz durch die Zahlen der fehlenden Teilsiege beschreiben, also hier (3;1). Jeder der beiden Spieler hat einen aureus eingesetzt. Theon muss so überlegen: Wenn ich das nächste Teilspiel gewinnen würde, so wäre ich in der Situation (2;1) und würde, wie oben 1/2 aureus erhalten; wenn ich es verliere, so erhalte ich nichts. "Da ich also zwischen 1/2 aureus und nichts hin- und herschwanke [fluctuo], muss mir 1/4 aureus gegeben werden." Caramuel führt also dieses Teilungsproblem auf das vorher behandelte zurück. Dasselbe tut Huygens in der Propositio V, mit den bereits mehrmals festgestellten Unterschieden in der Darstellung. — Auch für die Situation $(4;1)$, wo also dem einen 4 Teilsiege zum Endsieg fehlen, dem andern noch ein Teilsieg, steht nun für Caramuel die Lösung bereit [iam ex doctrina praemissa est expedita resolutio]: jener, dem vier Teilsiege fehlen, könnte das nächste fiktive Spiel verlieren und hätte damit alles verloren, oder es gewinnen und damit die Situation $(3;1)$ erreichen, in welchem ihm als 1/4 aureus zukommen würde. Wir müssen die Mitte zwischen 0 und 1/4 treffen, was 1/8 aureus für ihn ergibt; das Teilungsverhältnis ist also $1:15$.

Aus diesen beiden eben dargestellten Teilungsproblemen zieht Caramuel jeweils wieder Folgerungen derselben Art wie bei den zuerst behandelten: "In einem Spiel, in dem ich viermal siegen muss, bevor mein Gegner einmal siegt, ist die aequitas gewahrt, wenn ich 1 und der andere 15 setzt. — Es ist ihm auch klar, dass man nun auf diesem Weg ins Unendliche fortschreiten kann [hac via in infinitum posse progredi]. Dies erläutert er durch eine Tabelle:

Qui, antequam alter semel, lucrari debet	debet exponere unum aureum contra
semel	unum
bis	tres
ter	septem
quater	quindecim
quinquies	triginta-unum
sexies	sexaginta-tres etc.

Er erläutert auch das Bildungsgesetz der Zahlen in dieser Tabelle ganz korrekt: "Die Zahlen, die beigezogen werden, sind 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 usw., bei denen die Aufteilung so gemacht werden muss, dass derjenige, der mehrmals gewinnen muss, damit er das Geld erhält, einen einzigen aureus zu setzen hat, sein Gegner aber alle übrigen." — In moderner Formulierung etwa so: wer n–mal zu gewinnen hat, bevor der andere einmal gewinnt, setze einen aureus gegen $2^n - 1$ aurei. — Es ist interessant, dass sich diese Aussage bei Huygens noch nicht findet, sondern erst in der Ars conjectandi von Jakob Bernoulli in einer Anmerkung zur Propositio V von Huygens.

Anschliessend behandelt Caramuel noch zwei weitere Teilungsprobleme. Zunächst für die Situation (3;2), wo also dem Paulus 3 Teilsiege fehlen und dem Petrus noch 2. "Wenn sie zufällig [forte] weiterspielen würden, mit welcher Hoffnung und Gefahr [qua spe, quo periculo] würden sie nun beim ersten Wurf agieren?" Um bequemer rechnen zu können, lässt er jeden 16 Silberlinge (argentei) einsetzen, so dass die pecunia deposita nun 32 Silberlinge ausmacht. — Wenn Petrus im nächsten (fiktiven) Spiel gewinnen würde, so wären die beiden Spieler in der Situation (2;2) und jeder würde 16 Silberlinge erhalten. Wenn aber Petrus verliert, so erhalten wir die Situation (3;1) des vorangehenden Problems und Petrus würde 4 Silberlinge erhalten. Und wieder: inter 16 et 4 medium tenet 10. Soviel erhält also Petrus, Paulus bekommt den Rest, 22.
"Aus der Lösung des vorangehenden Falles ergeben sich viele ihm fast gleiche [illi suppares]." Er behandelt nun noch die Situation (2;4), die ähnlich wie wir das eben gemacht haben, auf die beiden schon behandelten Fälle (1,4) und (2;3) zurückgeführt werden kann.

Es sind dies die Aufgabenstellungen der Propositiones VI und VII bei Huygens mit denselben Zahlen; Zahlen, die sich z.T. auch schon im Briefwechsel von Pascal mit Fermat finden (I. Schneider 1988, p. 25ff.; B. Pascal 1954, p. 77ff.). Die Resultate sind dieselben. Bei der Darstellung der Überlegungen, die zu diesen Resultaten führen, zeigen sich wieder die gleichen Unterschiede, die wir schon mehrmals hervorgehoben haben.

Ponamus aleones esse tres! Jetzt versucht Caramuel Teilungsprobleme zu lösen, wenn *drei Spieler* beteiligt sind und das Spiel abgebrochen werden muss, bevor einer so viele Teilsiege hat, wie man zum Gewinn des Spieles benötigt. Die Lösungen von Caramuel sind *falsch.* Seine Fehler entstehen wohl dadurch, dass er immer nur Spiele zwischen zweien betrachtet und das ganze Spiel zwischen den drei Spielern aus solchen Teilspielen zusammenzusetzen sucht.

Huygens gibt in Propositio VIII die richtige Lösung für die Situation (1; 1; 2) und in Propositio IX die Lösung für beliebig viele Spieler, nebst einer Tabelle für verschiedene Situationen bei drei Spielern.

Diese hier vorliegende und ähnliche Situationen weisen wohl wieder darauf hin, dass Caramuel bei der Abfassung seiner Arbeit die Abhandlung von Huygens nicht — oder dann sicher nicht vollständig – zur Verfügung hatte [vgl. Abschnitt 4.8].

Seine Ausführungen über Teilungsprobleme beschliesst Caramuel mit einer Nota "Von denen, die das *Spiel aufgeben, bevor es begonnen wird*" [De his, qui ludum, antequam incipiatur, relinquunt]: "Es geschieht zuweilen, dass ein Spiel gar *nicht begonnen* werden kann, *nachdem man bereits festgelegt hat, wer den Vortritt hat.*" Wie soll nun der Einsatz geteilt werden? Zu gleichen Teilen oder zu ungleichen, etwa weil jener in einer besseren Lage ist, der bereits für den Vortritt ausgelost worden ist [quia melior est illius condicio, qui fuit praecedentiam sortitus]? Caramuel betrachtet zwei Beispiele, die er allerdings *falsch* löst. Wir betrachten kurz das zweite dieser Beispiele (p. 980). Es wird mit zwei Würfeln gespielt [duabus tesseris — jetzt wird also *tessera* für den Würfel verwendet]: Petrus und Paulus würfeln, einer nach dem andern, zuerst Petrus, dann allenfalls Paulus, dann, wenn nötig, wieder Petrus usw. Petrus gewinnt, wenn er mit zwei Würfeln die Augensumme 6 [Senarius] erzeugt, Paulus gewinnt, wenn er die Augensumme 7 [Septenarius] würfelt. Zwei Würfel können auf 36 Arten kombiniert werden. Der Senarius kann auf 5 Arten erzeugt werden, der Septenarius auf 6 Arten. "Für Petrus verhält sich die Hoffnung [spes] zur Besorgnis [timor] wie 5 : 36, für Paulus wie 6 : 36"; die gesamte Einlage ist 36. — Caramuel überlegt jetzt so: Petrus ist Vorhand [est manus Petrus]. Der erste Wurf [iactus], der also Petrus zukommt, ist — bevor er geschieht — 5/36 von 36 wert [also 5]; im hinterlegten Geld [in deposito] bleibt ein Rest [residuum] von 31/36 von 36 [also 31]. Der zweite Wurf [ictus], der nun Paulus zukommt, ist — bevor der erste geschieht — 6/36 des Residuums wert, also 5 1/6. Es bleiben nun noch 36 – 5 – 5 1/6, also 25 5/6. Bis hier hat Caramuel richtig überlegt. Doch nun verteilt er ganz einfach diesen Rest zu *gleichen* Teilen [qui bifariam divisi] auf Petrus und Paulus. Dies ist aber falsch; denn der allenfalls notwendige dritte Wurf hätte für Petrus den Wert 5/36 von 25 1/6, der eventuell notwendige vierte Wurf für Paulus den Wert 6/36 des neuen Residuums usw. Damit würde sich für die Anteile von Petrus und Paulus je eine geometrische Reihe ergeben, die dann auf ein Teilungsverhältnis von 30 : 31 führen würden.

Huygens löst die Aufgabe als Problem XIV zunächst auf andere Art auf Grund seiner eingeführten Lehrsätze, ohne geometrische Reihen (J. Bernoulli, 1899, p. 49/50, Chr. Huygens, 1920, p. 86). Im ersten Teil der Ars conjectandi, in welchem J. Bernoulli die ganze Abhandlung von Huygens mit ausführlichen Kommentaren wiedergibt, zeigt Bernoulli, wie man das Problem mit geometrischen Reihen anpacken kann. — In seiner *History of the Mathematical Theory of probability* (p. 46) schreibt I. Todhunter (1865) zu diesem Fehler von Caramuel: "It is strange that Caramuel went wrong when he had the treatise of Huygens to guide him; it seems clear that he followed this guidance in the discusssion of the problem of Points for *two* players, and then deserted it." Wir meinen, *wenn* er wirklich einfach der Abhandlung von Huygens gefolgt wäre, so hätte er es fast sicher nicht für notwendig befunden, sie am Schlusse seiner *Kybeia* noch anzufügen (wir kommen darauf noch zurück). Es scheint uns wahrscheinlicher, dass ihm eine oder mehrere unvollständige Quellen zur Verfügung standen, die ihn zu den Aufgabenstellungen geführt haben und ihn zu seinen Überlegungen angeregt haben; dies um so mehr, da ja diese Aufgaben — und damit wohl auch die Lösungen — zu seiner Zeit offenbar diskutiert worden sind, wie übrigens auch Huygens schreibt.

4.5 Mehrfache Würfelversuche — De iactuum multiplicatione

(p. 980–982)

"Wer einen Würfel [tessera] nimmt und verspricht, z.B. eine 5 zu werfen, der hat für sich eine einzige Gewinnmöglichkeit [modus lucrandi] und fünf Möglichkeiten zu verlieren [modi perdendi], und deswegen wird sich bei ihm die Erwartung [spectatio] zur Gefahr [periculum] verhalten wie 1 : 5. Wenn er also einen aureus setzt, wird sein Gegner 5 aurei setzen müssen, damit beim Preis das angemessene Verhältnis gewahrt bleibt" [ut in pretio debita conservetur proportio].

Nach einer kleinen Anwendung dieser einleitenden Überlegungen auf den Kauf einer entsprechenden Wette geht Caramuel nun zu *mehrfachen* Versuchen über: "Es will Aurelius das Glück versuchen, und er sagt: Wenigstens beim zweiten von zwei Malen werfe ich einen Fünfer." — Wieviel hat er zu setzen, wieviel der Gegner, "so dass die Ungleichheit im Geld durch die festgelegte Ungleichheit der Gefahr bestimmt werde" [ut posita inaequalitate periculi pecuniae inaequalitas determinetur]?
Hier lassen sich die Überlegungen von Caramuel so zusammenfassen: Ein Wurf ist 1/6 wert [unus ictus valet 1/6]. Nehmen wir an, der Sieger erhalte als ganzen Preis [totum pretium] 36. Von diesen wird jener, der im ersten Wurf einen Fünfer erzeugen will 1/6, also 6, setzen müssen. Im ersten Wurf kann er sich aber allenfalls — wenn er keinen Fünfer wirft — das Recht auf einen zweiten Wurf erwerben. Dieser zweite Wurf ist, bevor er gespielt wird, wieder 1/6 wert. 1/6 wovon? Von der Differenz zwischen dem ganzen Preis, den Aurelius im Falle eines Gewinnes erhalten würde, und dem bereits errechneten Einsatz 6, also 1/6 von $(36 - 6)$, somit 5. Aurelius hat also 11/36 einzusetzen, bevor der erste Wurf gespielt ist; denn $6 + 5 = 11$. — Sein Gegner setzt 25/36 ein.

Die beiden eben behandelten Aufgaben erscheinen auch in der Propositio X von Huygens, in welcher dann allerdings noch weitere Fragestellungen enthalten sind. Wiederum stehen Huygens für die Lösungen seine Lehrsätze zur Verfügung, während Caramuel mit etwas anderen Überlegungen erfolgreicht versucht, "Unparteilichkeit" [aequalitas] zu erzeugen. — Heute würde man bei diesem Beispiel mit Hilfe eines Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr rasch zum Ziel kommen: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gegner gewinnt, ist $5/6 \cdot 5/6 = 25/36$; damit wird die Wahrscheinlichkeit, dass Aurelius gewinnt, $1 - 25/36 = 11/36$, und für das Verhältnis der Einsätze erhält man wieder 11 : 25. Doch sollte man ja in der Wissenschaftsgeschichte nicht einfach "die Sache so, wie sie gegenwärtig ist", festschreiben und "von dieser fixierten Gestalt aus [...] das Gewesene bloss als eine mangelhafte Gestalt der gegenwärtigen ansehen" (H. Givsan, 1990).

Mit einer analogen Überlegung kommt Caramuel auch zu einem richtigen Ergebnis, wenn Rodamirus in drei Würfen mit einem Würfel mindestens einmal einen Fünfer werfen will (Caramuels Phantasie im Finden neuer Namen ist übrigens unerschöpflich!):
Rodamirus hat $11/36 + 1/6 \cdot (36/36 - 11/36) = 91/216$ einzusetzen, der Gegner somit 125/216. Das Verhältnis der Einsätze ist also 91 : 125.

Heute würde man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder rascher zum Ziel kommen, denn für den Gegner ergibt sich sofort eine Gewinnwahrscheinlichkeit von
$(5/6)^3 = 125/216$ und damit für Rodamirus eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $1 - 125/216 = 91/216$.

Jetzt verallgemeinert Caramuel:
"Du wirst die Rechnung ins Unendliche fortsetzen können" [poteris hinc computum in infinitum promovere]. Nach einem Zahlenbeispiel sagt er dem Leser, er werde die nachstehende *Regel* befolgen können, um noch weiter vorzurücken [ut ulterius progrediaris, poteris hanc observare regulam]:
"Vermindere den ganzen Preis nacheinander um den sechsten Teil, und so wirst du das haben, was der adversarius setzen muss."

Er lässt sich nun von der *Algebra* leiten [si me dirigit Algebra], um die Einsätze des Gegners [adversarius] zu berechnen. *Verkürzt* und in *modernisierter* Schreibweise lassen sich seine Überlegungen so wiedergeben:

Wenn der Würfel das *erste* Mal geworfen wird, wenn weiter der gesamte Einsatz A beträgt und ich eine bestimmte Zahl werfen soll, so zahlt der adversarius $A - 1/6 \cdot A$, dies ist für ihn zunächst "der ganze Preis des Spieles" [totum concertationis pretium]. Wenn ich in mindestens einem von *zwei* Würfen die bestimme Zahl werfen soll, zahlt der adversarius den eben angegebenen Preis minus 1/6 dieses Preises, also

$$A - 1/6 \cdot A - 1/6 \cdot (A - 1/6 \cdot A) = 25/36 \cdot A = (5/6)^2 \cdot A,$$

was Caramuel durch das für den heutigen Leser ungewohnte Symbol $A - 1/6 - 1/6$ darstellt. Diese seine "mathematischen Zeichen" [metarithmeticae notae] erklärt er so: "Der adversarius nimmt von der früheren Summe [A] den sechsten Teil [$1/6 \cdot A$] weg und vom Ergebnis nochmals den sechsten Teil dieses Ergebnisses" [also 1/6 von $(A - 1/6 \cdot A)$]. Analog zahlt der adversarius bei drei Würfen

$$A-1/6\cdot A-1/6\cdot(A-1/6\cdot A)-1/6\cdot[A-1/6\cdot A-1/6\cdot(A-1/6\cdot A)] = 125/216\cdot A = (5/6)^3\cdot A.$$

Dies wird durch das Symbol $A - 1/6 - 1/6 - 1/6$ dargestellt; das letzte Zeichen 1/6 bedeutet also offenbar, dass wieder 1/6 des Restes, d.h. des Ergebnisses der ersten beiden Subtraktionen weggenommen werden muss, usw.

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man die Richtigkeit dieses Vorgehens leicht einsehen: Wenn n–mal geworden werden darf, so gewinnt der adversarius mit der Wahrscheinlichkeit $(5/6)^n$; derjenige, der den Würfel wirft, also mit der Wahrscheinlichkeit $1 - (5/6)^n$. Der adversarius hat somit einen Einsatz zu leisten von $(5/6)^n \cdot A$, der Werfer somit einen Einsatz von $[1 - (5/6)^n] \cdot A$ zu zahlen. Dieser Einsatz des adversarius kann aus den Einsätzen bei $(n - 1)$ Würfen berechnet werden *gemäss der oben gegebenen Regel*:

Man subtrahiert vom Ergebnis der bisherigen Subtraktionen, also von dem, was der adversarius bei $(n - 1)$ Spielen zu zahlen hat, d.h. von $(5/6)^{n-1} \cdot A$, den sechsten Teil dieses Ergebnisses und erhält so den Einsatz des adversarius, wenn n–mal gewürfelt werden darf, es ist nämlich

$$(5/6)^{n-1} \cdot A - 1/6 \cdot (5/6)^{n-1} \cdot A = (5/6)^n \cdot A.$$

Der nächste Abschnitt (p. 982) liefert dann eine Tabelle für die Aufteilung des Einsatzes von 36 Einheiten auf den adversarius und den Werfenden, wenn 1, 2, 3, ..., 10 Würfe zugelassen sind. Dabei sind die Zahlen des Teilungsverhältnisses mit dekadischen *Logarithmen* berechnet, was in diesem Zusammenhang doch bemerkenswert

ist. (14) In einer zusätzlichen Kolonne ist auch noch die Aufteilung des Einsatzes nach der "Meinung des Volkes", des "grossen Haufens" gegeben, die vulgi opinio: "Gewiss sehr verbreitet, da ja die Spieler [aleatores] als unkundige oder sogar unredliche Menschen überhaupt keine Kenntnis von diesen Feinheiten haben" [nullam habent harum subtilitatum notitiam].

Huygens gibt in der Propositio X die allgemeine Regel nicht an, zeigt aber durch Zahlenbeispiele, wie man allmählich den Wert des Spieles bei beliebig vielen Würfen finden könnte. Er findet aber diese Art der Berechnung "viel zu weitschweifig" [multo prolixior]; in der Propositio XI zeigt er dann, wie man in grösseren Sprüngen weiterschreiten kann. — Ähnliche Überlegungen finden sich auch in einem nicht näher datierten Brief von P. de Fermat an B. Pascal aus dem Jahre 1654. Durch die Art der Fragestellung und ihre durchaus "moderne" Form weicht die Darstellung von Fermat jedoch wesentlich von jener von Caramuel ab (P. de Fermat, 1894, p. 288).

4.6 Abhängige und unabhängige Ereignisse?

(p. 982–983)

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Unterscheidung von unabhängigen Ereignissen und abhängigen Ereignissen von grundlegender Bedeutung: Zwei Ereignisse A und B heissen voneinander unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit des einen nicht vom Eintreffen oder Nichteintreffen des anderen abhängt. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Unabhängigkeit von Ereignissen in der Regel *definiert*; um diese Unabhängigkeit als Fachbegriff der Stochastik zu kennzeichnen, spricht man dann oft von *stochastischer Unabhängigkeit.* Für zwei Ereignisse, etwa A und B *definiert* man dabei so: Die Ereignisse A und B heissen stochastisch unabhängig, wenn gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. — Dass die Unabhängigkeit von zwei Ereignissen durch die Produktformel *definiert* werden kann und dass es sich bei dieser Aussage nicht um einen im Rahmen der üblichen Axiome beweisbaren Satz handelt, hat G. Bohlmann 1901 erkannt. (15) — Die Produktformel als solche findet man indessen für unabhängige Ereignisse bereits klar formuliert in der Einleitung zu DE MENSURA SORTIS, SEU, DE PROBABILITATE EVENTUUM IN LUDIS A CASU FORTUITO PENDENTIBUS von Abraham de Moivre (1712). Er beginnt die entsprechende Aussage so: Si eventus duo nullo modo ex se invices pendeant [...] — "Wenn zwei Ereignisse auf keine Art voneindander abhängen [...]." Von solchen Zusammenhängen ist selbstverständlich bei Caramuel noch keine Rede. Aber es ist doch von bemerkenswertem Interesse, dass schon er *durch Beispiele auf diesen Sachverhalt ausdrücklich hinweist*!

Caramuel vergleicht zwei Aufgaben miteinander, das Würfelspiel (alea) und das "Raten auf gut Glück" (divinatio a fortuna):
(a) mit einem Würfel in zwei Würfen mindestens einmal eine vom Gegner bestimmte Zahl zu werfen und
(b) aus sechs verschiedenen Buchstaben in höchstens zwei Versuchen jenen Buchstaben zu erraten, den sich der Gegner ausgedacht hat.

Sehr richtig stellt er zunächst fest, dass, wer beim *ersten* Mal den vom Gegner ausgedachten Buchstaben erraten will, "eine Hoffnung [spes] wie 1" hat und "eine Gefahr [periculum] wie 5", also genau, wie wenn er verspricht, in einem *einzigen* Wurf eine befohlene Zahl zu würfeln. — Wenn es nun aber um *zwei* Versuche geht, so ist die Situation anders: Wer sich beim Erraten des Buchstabens das erste Mal geirrt hat,

ist nun informierter [fit doctior]; dadurch, dass er sich geirrt hat, vermindert er die Gefahren [pericula errando diminuit]. Er würde den zuerst falsch geratenen Buchstaben nicht nochmals sagen, sondern einen anderen; er hat somit 2 (!) modi non errandi und 4 pericula. (Dies würde man heute wohl etwas anders sagen und 1 und 4 einander gegenüberstellen.) Und ganz richtig weist er auch noch auf einen Schützen [sagittarius] hin, der nach einem ersten Fehlschuss "beim zweiten oder beim dritten Schuss nicht mehr in einer so grossen Gefahr ist [non enim in secunda explosione, aut in tertia tanto subest pericula], da er, durch den Irrtum gewarnt, die Hand senkt, wenn er höher geschossen hat, als er hätte sollen" usw. — "Dies alles trifft aber bei den Würfeln nicht zu." [...] "Der Würfelspieler hat das erste Mal 5 Gefahren, das zweite Mal 5, das dritte Mal 5 usw., immer 5. Ihm helfen nämlich die begangenen Fehler nicht, die Gefahr des Irrtums zu mindern" [illum enim errores admissi non iuvant, ut periculum errandi minuat] (R. Ineichen 1998).

4.7 Das Spiel "passe-dix" — De ludo ultra decem

(p. 983–985)

In der neueren Literatur wird mit dem Hinweis auf dieses Spiel gelegentlich die folgende Aufgabe verbunden (vgl. E. Czuber, 1914, Bd. I, p. 29): "Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, *mit drei Würfeln eine 10 überschreitende Summe zu werfen.* [...] Die Lösung kann ohne Aufstellung der möglichen und günstigen Fälle gefunden werden. Zeigt ein Wurf die Nummern a, b, c in irgendwelcher Verteilung auf die drei Würfel, so ordne man ihm den Wurf $7-a$, $7-b$, $7-c$ zu. Der erste ergibt die Summe $a+b+c$, der zweite $21-(a+b+c)$; ist jetzt $a+b+c>10$, so ist $21-(a+b+c)\leq 10$; somit entspricht jedem günstigen Fall ein ungünstiger, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1/2$." — Natürlich macht diese Überlegung davon Gebrauch, dass die Würfel so beziffert sind, dass jeweils zwei gegenüberliegende Seiten die Summe 7 ergeben. Diese heute allgemein übliche Bezifferung findet sich auf den ältesten bekannten Würfeln und bei manchem Würfel aus der Antike noch nicht; immerhin kennt man aber z.B. einen ägyptischen Würfel aus dem 16. Jh. v. Chr. und viele alte Würfel aus Griechenland, die bereits diese Art der Bezifferung haben (vgl. z.B. R. Ineichen, 1996, p. 41ff.).

Caramuel gibt eine bis in die Einzelheiten gehende Beschreibung dieses Spiels und zusätzlich gute Ratschläge, wie Streitigkeiten vermieden werden können. Er führt für das Spiel die Namen $META\ \Delta EKA\Delta A$, ultra decem und - qui ab Hispanis vocatur — Passa-diez [heute: Pasa-diez] an. Es werden also drei Würfel [tesserae] geworfen. "Wenn dabei nicht *zwei Würfel dieselbe Punktezahl* haben, so gilt der Wurf nicht; er begünstigt oder schadet keiner Partei. Wenn zwei Würfel dieselbe Punktezahl aufweisen [...], ist der Wurf gültig. Wenn die Augenzahl aller drei Würfel 10 übersteigt, dann gewinnt der, der diese Punktezahl geworfen hat; andernfalls verliert er."

Er stellt in einer Tabelle die möglichen Summen zusammen, die sich aus den Kombinationen von jeweils zwei gleichen Punktezahlen und einer dritten ergeben, und stellt fest, dass sich 36 "brauchbare Würfe" [iactus utiles] finden lassen, von denen 18 die eine und 18 die andere Partei begünstigen [favent]. Also ist die aequalitas gewahrt; es handelt sich nach seiner Ansicht sogar um einen ludus aequalissimus. Dieser Schluss ist zwar richtig; allerdings erscheint er fast etwas vorschnell; denn es ist ja immerhin

zu beachten, dass in seiner Tabelle z.B. die Kombination 111 nur auf eine Art erzeugt werden kann, hingegen die Kombinationen 112, 113, ..., 116 auf je drei Arten; analog ist es mit den Kombinationen aus 22, 33 bis 66 und je einer weiteren Augenzahl. Doch Caramuel hat Glück bei dieser Überlegung: 111, 222 und 333 lassen den Werfenden verlieren, 444, 555, 666 gewinnen, und so bewahrt das Spiel die aequalitas! — Im weiteren erwähnt er dann, dass die Belgier *jeden* Wurf mit *drei gleichen* Augenzahlen als einen Wurf von herausragender Qualität betrachten — aus religiösen Gründen wegen der Erinnerung an den trinitarischen Gott; für sie sind dann auch die Würfe 111, 222, 333 günstig [faustus]. Dadurch "verdirbt der Belgier das sonst schöne Spiel" [ludum alias pulchrum corrumpit]; es verliert die aequalitas. Er zählt nun wieder die modi lucrandi und die modi perdendi, also die günstigen und ungünstigen Fälle; allerdings zählt er nun Fälle zusammen, die aus dem Grunde, den wir oben angeführt haben, nicht gleichmöglich sind.

Das Spiel *Passe-dix* ist seit dem 15. Jh. nachgewiesen (J.-M. Lhôte, 1994, p. 572). Unter dem Nahmen *Zehen pass* ist es auch bei Johann Fischart (ca. 1546–ca. 1590) erwähnt, und zwar im Spielverzeichnis seiner AFFENTEURLICHEN UND UNGEHEUERLICHEN GESCHICHTSSCHRIFT [...] von 1575, der ersten Auflage seiner GESCHICHTSKLITTERUNG (vgl. W. Tauber, 1987, p. 84). — F. Semrau (1910) führt das Spiel unter jenen Spielen an, die bereits im "alten Frankreich" gespielt worden sind. — Im 1283 entstandenen SCHACHZABELBUCH von König Alfons X. dem Weisen (1221–1284) ist eine grössere Zahl von Würfelspielen beschrieben; *passe-dix* ist jedoch nicht dabei.

Caramuel ist oft ein recht kurzweiliger Erzähler. Zum Beispiel berichtet er uns hier unter anderem, dass bei den Christen das Würfelspiel als "unziemlich" [indecens] betrachtet wird, weil die Soldaten seinerzeit um Christi Rock das Los warfen [mitterent sortem]. Und er erwähnt, dass die Portugiesen [Lusitani] beim Spiel mit zwei Würfeln die Augensumme 5 der Augensumme 7 vorziehen, weil 5 ja die Anzahl der Wunden Christi ist. Doch "was auch immer mit der Theologie geschieht, die Mathematik verurteilt diese Würfe schwer" [quidquid fit de Theologia, iactus hos graviter condemnat Arithmetica]; denn — wie er richtig schreibt — 5 kann mit zwei Würfeln auf vier Arten erzeugt werden, 7 aber auf sechs Arten: Wir können deshalb 7 immer mit grösserer Hoffnung [maiori spe] erwarten!

4.8 Caramuel und Huygens

(p. 985–995)

4.8.1 Eine kluge Untersuchung über dasselbe Thema — Ingeniosa Diatriba de eodem argumento

"Während ich diese Abhandlung [hoc syntagma] dem angesehenen Herrn N., einem sehr gebildeten Mann vorstellte, zeigte er mir auch eine gewisse kluge Untersuchung [diatriba] über dasselbe Thema, die nach seiner Meinung von Christianus Severinus Longomontanus geschrieben worden sei. (16) Und weil sie sorgfältig und kurz ist, musste sie dieser Abhandlung angefügt werden, und zwar vor allem deswegen, weil sie über die Umwege der Algebra verläuft [quia per Algebrae labyrinthos excurrit], um mit grossem Aufwand [magno molimine] die Streitfragen zu klären, die wir *kürzer, klarer*

und leichter entschieden haben" [quas nos brevius, clarius et facilius decidimus]. — Nach Caramuel ist Spielen eine ernste Sache, und dem Nächsten darf weder durch Bosheit noch durch Irrtum ein Unrecht zugefügt werden.Und deshalb sind nach seiner Ansicht die Theologen, die über das Spiel geschrieben haben, zu loben, dass sie gelehrt haben, der Mensch müsse mit Klugheit und — in Hinsicht auf seinen Tod — mit Umsicht spielen. Weil aber die Theologie hier nicht genügt, *"müssen die Mathematiker gelobt werden, die ihr durch Fleiss und Begabung geholfen haben; unter anderen jener, der mit einer feinen und glücklichen Feder die folgenden Sätze geschrieben hat."*

Nun folgt der Text der eingangs erwähnten Diatribe unter dem Titel DE RATIOCINIIS IN ALEA: Diese stammt aber keineswegs von Longomontanus, wie der "angesehene Herr N." meinte [putabat]. Es handelt sich nämlich um den *vollständigen* Text der Abhandlung DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEAE von Christiaan Huygens, einschliesslich der fünf Problemata, die Huygens "an Stelle einer Schlussvignette" [coronidis loco] seiner Abhandlung ohne Lösungen und Resultate anschliesst. (17)

4.8.2 Bemerkungen zur vorangehenden Abhandlung — Notae in praecedentem Diatriben

Hier betrachtet Caramuel kritisch die Ausführungen von Huygens (bzw. von Longomontanus), äussert sehr selbstbewusst — zu selbstbewusst, muss man wohl sagen! — und ohne jeden Respekt vor der grossen Leistung von Huygens seine Meinung und verweist auf die Lösungen von entsprechenden Problemen in seinen eigenen Ausführungen. Caramuel geht auf den interessanten systematisch-deduktiven Aufbau der Abhandlung von Huygens, also auf die eigentliche "Theorie", die ja bei ihm selbst weitgehend fehlt, überhaupt nicht ein.

So meint er etwa zu Propositio I, in welcher Huygens das Beispiel anfügt, wo jemand zur Erlangung des Betrages 3 dieselbe Chance hat wie zur Erlangung des Betrages 7 und der Wert des Spieles dann 5 ist, seine eigene Begründung sei einfacher, "frei von Umwegen" [circumloquia]; er betont, dass, wenn jemand 5 einsetze, es dann einfach darum gehe, 2 zu verlieren (wenn man 3 erhält) oder 2 zu gewinnen (wenn man 7 erhält); jeder der beiden Spieler setzt 2 der Gefahr aus. — Bei Propositio II weist er auf sein Beispiel mit den Knöcheln hin (4.2). Er übersieht allerdings, dass Huygens ausdrücklich Gleichmöglichkeit voraussetzt [pari facilitate obtingere possit — gelijcke kans], was bei den verschiedenen Seiten des Astragalos (talus vetus) nicht der Fall ist.

Für den wichtigen Satz, den Huygens in der Propositio III formuliert, beweist und an einem komplizierten Beispiel noch verdeutlicht, bringt er kein Verständnis auf. Hingegen "müsste er [Huygens] über Zahl und Grösse der Gefahren deutlicher handeln" [de numero periculorum et quantitate clarius agere], schreibt er dazu.

Für die Popositiones IV–VII kann er auf seine richtigen Lösungen der entsprechenden Teilungsprobleme hinweisen.

Bei Propositio VIII geht Caramuel nicht auf den Unterschied zwischen den (richtigen) Resultaten von Huygens und seinen (falschen) Resultaten ein.
Caramuels Hinweise zu Propositio IX sind richtig; sie betreffen aber nicht den ganzen Inhalt dieser Propositio. Seine Ausführungen zeigen nochmals, dass er das Problem

der drei Würfel richtig erfasst und gelöst hat: 10 und 11 sind die "besten Zahlen" [si denique utamur 3 tesseris, optimi numeri sunt 10 et 11].

Bei den Propositiones X und XI weist er auf seine eigenen, richtigen Lösungen hin.

Interessant an seinen Ausführungen zu Propositio XII ist die Unterscheidung von certitudo moralis und certitudo realis. (18) Hier tritt auch der Terminus "wahrscheinlicher" [verosimilius] auf: "Es [ist] wahrscheinlicher, dass derjenige, der viele Male den Würfel wirft, irgendeinmal die befohlene Zahl wirft als derjenige, der nur wenige Male würfelt"

Die Bemerkungen zu Propositio XIII sind teilweise falsch. Die in Propositio XIV gestellte und von Huygens richtig gelöste Aufgabe hat Caramuel falsch gelöst. (19)

5. Mathematik des Genueser Lottos — ARITHMOMANTICA

(p. 995–1036)

Unter dem Titel ARITHMOMANTICA untersucht Caramuel Probleme, die sich im Zusammenhang mit dem Genueser Lottospiel stellen. Er definiert: *MANTIKH* a graecis dicitur facultas, quae futura aut occulta praedicit. A Latinis divinatrix vocatur [...]. Er versteht also unter Mantik die Fähigkeit, Zukünftiges oder Verborgenes zu weissagen. Die ARITHMOMANTICA wird definiert als jene *Wissenschaft, die durch die Zahlen weissagt* [ars, quae divinat per numeros]. Dann geht er auf die Spiele ein, die man in Cosmopolis zu veranstalten pflege, Spiele, die auch in Intalien sehr häufig seien. — Vierzig Seiten weiter hinten (p. 1035) stellt er dann fest, dass mit Cosmopolis eigentlich *Genua* gemeint ist, und so untersucht er also in seiner ARITHMOMANTICA in erster Linie das *Genueser Lotto.*

Dieses Genueser Lotto wird vom Mathematikhistoriker Moritz Cantor wie folgt beschrieben (M. Cantor, 1898, p. 57–58):
"In Genua wurden zu Anfang des 17. Jh. unter 100 Senatoren [...] jährlich 5 durch das Los für die höchsten Ehrenstellen bestimmt. [...] Benedetto Gentile führte Wetten darauf ein, dass dieser oder jener Name gezogen werde, und einige genuesische Bankiers versprachen jedem, der eine solche Wette zu wagen geneigt sei, den 20 000–fachen Betrag, wenn er alle 5 Namen rate, entsprechend weniger, wenn nur 4 oder 3 Namen erraten werden wollten. Allmählich übernahm der Staat selbst dieses für den Unternehmer höchst gewinnreiche Spiel, indem an die Stelle der 100 Namen 90 Nummern traten, deren 5 gezogen wurden, so so entstand wahrscheinlich 1620 das genuesische Zahlenlotto."

Es ist zu bemerken, dass diese Lotterie nicht etwa einen Einzelfall darstellt. Im späten 17. Jh. und im 18. Jh. scheint Europa von einer eigentlichen Begeisterung, einer Sucht für verschiedenartigste Lotterien ergriffen worden zu sein: "it is true, that a rage for lotteries of every description swept Europe in the late seventeenth and eighteenth centuries" (L. Daston, 1988, p. 141ff.). — D.R. Bellhouse (1991) ist der etwas komplizierten Geschichte der Genueser Lotterie nachgegangen; er kommt unter anderem zum Schluss "it appears that election by lot in Genoa probably did not occur until the latter half of the seventeenth century and that gambling on the outcome

was part of this election. There is further evidence, althoug weak, that there was a number lottery separate from the election by lot." Er stellt weiter fest, dass Caramuels Untersuchungen von 1670, denen wir hier nun etwas nachgehen wollen, unter den Mathematikern des 18. Jh. nicht sehr bekannt geworden sind, ebensowenig wie jene des Mathematikers, Physikers und Astronomen B. Frénicle de Bessy (Paris, um 1605–1675) über das Genueser Zahlenlotto, die vor 1675 ausgearbeitet, aber erst später (1693 bzw. 1729) publiziert worden sind (cf. E. Knobloch, 1994). (20) In unserem Zusammenhang interessiert noch, dass D.R. Bellhouse schreibt, dass die Ideen in der Arbeit von Frénicle "may have been inspired by Caramuel (1670)".

5.1 Beschreibung der Lotterie von Cosmopolis durch Caramuel

(p. 995–998)

Caramuel vermerkt zuerst, dass es sich hier um eine *Quaestio Arithmetico-Theologica* handelt, "dass im Theologischen die mathematische Klarheit und im Mathematischen die theologische Sicherheit" gefunden werden muss. — Seine Beschreibung der Lotterie von Csmopolis (bzw. also von Genua) ist die folgende:
"In einer gewissen Stadt [...] waren 5 Konsuln zu wählen, und weil es 100 fähige Bürger gab [...] wurde die Wahl dem Los [dem Zufall] anvertraut [sorti commissa fuit electio]. Und nachdem die Namen dieser 100 sehr angesehenen Männer in eine silberne Urne geworfen sind, wird zu Gott gebetet, dass er sich dazu hergebe [...], für das öffentliche Wohl zu sorgen. Und es wird ein fünfjähriger Knabe vorgeführt, unfähig der Hinterlist [doli incapax], der mit nacktem Arm, damit es keinen Betrug gebe, vor allen Leuten jene Namen einzeln herauszieht." Er fährt dann in seiner typischen, immer möglichst konkreten und anschaulichen Ausdrucksweise weiter und berichtet, dass ein begüterter und reicher Kaufmann [mercator opulentus et dives] namens Franciscinus ein öffentliches Spiel [concertatio publica] mit den folgenden Bedingungen eingerichtet habe:

- Wer auch immer spielen möchte, kann als Einsatz soviel zahlen, wie er will; er hat dazu fünf der hundert Namen zu nennen.
- Wenn von denjenigen fünf Namen, die er genannt hat, ein einziger unter den ausgelosten ist, so erhält er den Einsatz zurück; wenn aber zwei davon unter den ausgelosten sind, so erhält er das 10–fache des Einsatzes, wenn drei, dann das 300–fache, wenn vier, dann das 1500–fache; wenn alle fünf ausgelost worden sind, so erhält der Spieler das 10 000–fache des Einsatzes.
- Wenn man aber nicht nur die fünf Namen, sondern auch noch die *Reihenfolge* [ordo] der Auslosungen voraussagen möchte und dies gelingt, so erhält man das 20 000–fache des Einsatzes.

Nun untersucht Caramuel zuerst ausführlich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine solche Wette vom moralischen, vom rechtlichen und vom mathematischen Standpunkt aus als "erlaubtes Spiel" [concertatio licita] betrachtet werden kann; darauf wollen wir hier nicht nochmals eingehen.

5.2 Einige Voraussetzungen

(p. 998–1005)

"Das Spiel ist ein Vertrag, der zwischen zwei oder mehr Personen geschlossen worden ist, durch dessen Gültigkeit der Besiegte verpflichtet ist, die Sache oder den abgemachten Preis [rem aut pretium expositum] dem Sieger zu übergeben." Weiter stellt Caramuel fest, dass dieses von Franciscinus angebotene Spiel nur vom Glück, vom Zufall [a sola fortuna] abhängt, im Gegensatz zu anderen Spielen, die nur von der Fertigkeit ["vom Fleiss": a sola industria] abhängen oder als "gemischte Spiele" [ludi mixti] von beidem. — Nun muss in einem solchen Spiel "Gleichheit der Bedingungen" [condicionum aequalitas] herrschen; es darf weder im Preis [in pretio], noch in der Gefahr [in periculo] Ungleichheit sein. Dabei darf der, der einer "grösseren Gefahr zu verlieren ausgeliefert ist, weniger Goldstücke [aurei] setzen gegen mehr Goldstücke, damit die eine Ungleichheit durch die andere beseitigt und das Spiel zur Gleichheit zurückgeführt wird." Wie dies gemeint ist, wird zunächst an Beispielen erläutert und schliesslich gut zusammengefasst:

"Wie sich die Gefahr von Peter zur Gefahr von Paul verhält, so muss sich der Geldbetrag, den Paul aussetzt, zu jenem verhalten, den Peter aussetzt." [Sicut se habet periculum Petri ad periculum Pauli, ita se habere debet pecunia, quam exponit Paulus ad illam, quam exponit Petrus.] — Sachlich dieselbe Wettregel findet man auch bei Girolamo Cardano (1501–1576) in seinem *Liber de ludo aleae* (geschrieben um 1564, publiziert 1663). (21)

Er fordert ferner: Wer durch Betrug [per fraudem] im Spiel gewonnen hat "leistet nicht Genugtuung, wenn er zurückgibt, was er gewonnen hat, sondern er ist auch verpflichtet, das zu zahlen, was der andere auf Grund der aequitas [...] gewonnen hätte". Eine Lehre, die er auch den Beichtvätern [qui audiunt confessiones] nachdrücklich zur Beachtung empfiehlt!

In einem der folgenden Abschnitte (p. 1001) fasst Caramuel kurz die *Kombinatorik* zusammen. Von der Kombinatorik handelt allerdings auch bereits ein früherer Abschnitt der MATHESIS NOVA (p. 921ff.), der *vor* der KYBEIA eingefügt ist. Die KYBEIA [quae combinatoriae genus est] und die ARITHMOMANTICA sind aber ihrerseits ebenfalls unter dem grossen Obertitel COMBINATORIA eingereiht. Caramuel bezieht sich dabei zunächst auf den spanischen Jesuitenpater Sebastian Izquierdo (1601–1681), dessen Werk PHARUS SCIENTIARUM von 1659 er kannte (cf. E. Knobloch, 1979, 1994). Er erwähnt auch Christophorus Clavius (1537–1612), ebenfalls Jesuitenpater. (22) — Wir wollen aus dieser Kombinatorik nur einige Fachausdrücke festhalten (zur Geschichte der Kombinatorik vgl. R. Haller, 1995 und E. Knobloch l.c.):
— *Combinare* est rerum datarum numerum considerare et ex ipsis duas vel plures simul ponere. Ergo *combinatio* erit duarum vel plurium rerum in dato numero contentarum compositio. Diese combinationes [compositiones] unterscheidet Caramuel nach substantia [wie z.B. AB et CD], positione [wie etwa AB und BA] und repetitione [A et AA]; deshalb spricht er unter anderem von combinationes materiales und combinationes locales.
— Die combinationes *materiales* sind im wesentlichen das, was wir auch heute noch

Kombinationen nennen, also Auswahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge; die combinationes *locales* sind unsere *Variationen*, unsere Auswahlen, bei denen wir die Reihenfolge der Elemente berücksichtigen. — Caramuel erläutert an Beispielen das Vorgehen und zeigt z.B., dass sich aus fünf Elementen 10 Kombinationen der Länge zwei und 20 Variationen der Länge zwei (jeweils ohne Wiederholungen) bilden lassen: Ergo in Quinario clauduntur decem materiales et viginti locales Binarii. Dazu gibt er auch noch Tabellen. — Binarii, Ternarii, Quaternarii etc.: mit diesen offenbar von den distributiven Zahlwörtrn abgeleiteten Fachausdrücken bezeichnet Caramuel Kombinationen bzw. Variationen der Länge 2, 3, 4 usw. — Kombinatorische Fragen behandelt Caramuel übrigens auch in anderen Werken, so zum Beispiel im PRIMUS CALAMUS von 1663 (cf. E. Knobloch, 1994).

5.3 Das erste Spiel — ein einziger Name wird vorausgesagt

(p. 1005–1006)

In diesem ersten Spiel trägt man den Sieg davon, wenn man "einen von denen, die ins Amt gewählt werden sollen", nennt. Damit der Leser das Spiel exakt durchschaut, legt Caramuel vier Verträge vor, die in diesem Falle abgeschlossen werden könnten. Er setzt voraus, "dass die Lösung dieser und anderer ähnlicher Fälle oder Verträge gewonnen wird aus dem Verhältnis zwischen Hoffnung und Gefahr [ex spei et periculi proportione]; denn der Gewinn muss so oft multipliziert werden, wie die Gefahr multipliziert wurde".

a) Der "verwegene Johannes" schliesst folgenden Vertrag ab: "Ein einziger soll von den 100 bezeichnet werden, und ich werde ihn nennen." Johannes hat eine einzige Möglichkeit zu gewinnen und 99 zu verlieren [unicum modum lucrandi et 99 perdendi]. Somit verhält sich "die Hoffnung zur Gefahr wie 1 : 99. Also müsste er, wenn er 1 Goldmünze setzt, notwendigerweise 99 gewinnen". — Dies ist richtig.

b) Der "vorsichtigere Petrus" schliesst einen anderen Vertrag ab: "Von jenen 100 sollen 5 ins Amt gewählt werden, und ich werde einen von jenen 5 nennen." [...] "Peter hat 5 Möglichkeiten zu gewinnen und 95 Möglichkeiten zu verlieren. Es verhält sich [...] die spes zum periculum wie 5 : 95 = 1 : 19. Wenn er also eine Goldmünze setzt, darf er [im Falle eines Sieges] 19 erwarten." — Auch diese Überlegung ist richtig.

Anschliessend untersucht Caramuel noch zwei weitere Verträge:
— "Von den 100 soll *einer* ins Amt gewählt werden, und ich werde 5 nennen und unter jenen Fünfen werde ich den Gewählten treffen."

— "Von den 100 sollen *fünf* ins Amt gewählt werden in Cosmopolis, und ich werde auch 5 nennen, und in meinen Fünfen soll wenigstens einer [saltem unus] von den in Cosmopolis Gewählten eingeschlossen sein."

In diesen beiden Fällen ist Caramuels Berechnung des Verhältnisses von spes zu periculum falsch. (23)

5.4 Das zweite Spiel — zwei Namen sollen vorausgesagt werden

(p. 1006–1008)

"Das zweite Spiel ist schwieriger als das vorangehende, weil die Kombinationen der Zahlen zu einer grösseren Menge emporsteigen. Du bist nämlich verpflichtet, zwei von denen, die ins Amt gewählt werden sollen, zu erraten, um den Sieg davonzutragen. Aber wie viele Zweierkombinationen wird es aus 100 [Elementen] geben?" [Sed quot erunt in uno Centenario Binarii?] — Caramuel kennt die Regel: "Multipliziere die gegebene Zahl mit der Zahl, die unmittelbar darunter liegt, und dividiere das Resultat [...] durch 2." Und mit dieser Rechnung, $(100 \cdot 99) : 2$ erhält er richtig 4950. Wieder betrachtet er verschiedene Varianten, analog zu jenen, die er im ersten Spiel unterschieden hat:

a) Johannes: "Von jenen 100 [...] sollen 2 genommen werden, und ich werde erraten, welche diese beiden sind." Da es 4950 Zweierkombinationen (Binarii) gibt, sind 4949 modi perdendi und ein einziger modus lucrandi vorhanden; spes zu periculum verhalten sich also wie 1 : 4949. Wenn also Johannes eine Goldmünze setzt, so muss er im Falle eines Sieges 4949 Goldmünzen gewinnen, wie Caramuel richtig feststellt.

b) Petrus: "Von jenen 100 sollen 5 gewählt werden, und ich werde raten und 2 von jenen Fünfen nennen. Petrus hat sich in diesem Vertrag einer geringeren Gefahr ausgesetzt, aber um wieviel geringer? [...] weil bei 5 [Elementen] 10 Zweierkombinationen [Binarii] vorhanden sind, wirst du 4940 modi perdendi und 10 lucrandi haben. Wenn du also eine Goldmünze setzest, so hast du das Recht, zu befehlen, dass dein Gegner 494 setzt." Diese Lösung ist richtig; denn unter den 4950 möglichen Zweierkombinationen sind 10 gute.

Anschliessend untersucht er noch die folgenden Situationen:

— "Von den 100 selben Leuten sollen 2 gewählt werden, und ich werde 5 nennen, und unter jenen 5 werde ich zwei ergreifen und treffen."

— "Von 100 sollen in Cosmopolis 5 ins Amt gewählt werden, und ich werde 5 nennen, und unter denen werden 2 sein von den Fünfen, die in Cosmopolis ins Amt gewählt worden sind." Hier steht — im Gegensatz zur analogen Aufgabe im vorangehenden Abschnitt (5.3) nicht "wenigstens zwei", sondern einfach "zwei". — Diese beiden Fälle werden von Caramuel nicht richtig behandelt; wir wollen nicht weiter darauf eingehen.

5.5 Das dritte Spiel — drei Namen sollen vorausgesagt werden

(p. 1008-1010)

Jetzt sollen drei Namen vorausgesagt werden. Zuerst macht Caramuel einige Vorbereitungen kombinatorischer Art. Er zeigt richtig, wie man die Anzahl von Kombinationen der Länge 3, ausgewählt aus 100 Namen, berechnet: $(100 \cdot 99 \cdot 98) : 6 = 161\,700$.

Wir wollen für die Anzahl der Kombinationen der Länge 3 aus 100 Elementen (ohne Wiederholungen) hier das heute oft verwendete Symbol $C(3,\ 100)$ verwenden, also $C(3,\ 100) = 161\ 700$. Allgemein werden wir hier in Zukunft für die Anzahl der Kombinationen der Länge k aus n Elementen (ohne Wiederholungen) jeweils das Symbol $C(k,\ n)$ gebrauchen. Caramuel macht den Leser "nebenher" auch darauf aufmerksam, dass und wieso $C(2,\ 5) = C(3,\ 5)$ ist, und bringt weitere *Tabellen zur Kombinatorik.*

Dann folgen die vier Aufgaben, ganz analog zu den Aufgaben beim zweiten und beim ersten Spiel. Also zunächst:
"Von 100 sollen drei ins Amt gewählt werden, und ich werde raten und alle Gewählten nennen." Das Verhältnis von spes zu periculum wird richtig bestimmt zu 1 : 161 699; wer also eine Goldmünze setzt, darf 161 699 erwarten im Falle eines Sieges.

Doch schon die zweite Aufgabe wird falsch gelöst: "Aus 100 sollen 5 ins Amt gewählt werden, und ich werde 3 erraten von jenen Fünfen. [...], ein um das Zehnfache leichterer Vertrag. Denn in einer 5er-Auswahl [Quinarius] sind 10 3er-Auswahlen [Ternarii] enthalten. Also würde der Wetter sein Geld einer Gefahr aussetzen wie 10 : 161 699, das heisst wie 1 : 16 169,9." Das ist nur zum Teil richtig; denn jetzt verhält sich spes zu periculum wie 10 : (161 700 - 10) = 1 : 16 169. — Die zur dritten und vierten Aufgabe in den bereits behandelten Spielen analogen Aufgaben sind hier ebenfalls falsch gelöst.

5.6 Das vierte Spiel — vier Namen sollen vorausgesagt werden

(p. 1010-1012)

Die erste Aufgabe wird richtig gelöst: "Von 100 sollen 4 genannt werden, und ich werde erraten, wer jene vier sind." Da $C(4,\ 100) = 3\ 921\ 225$ ist stehen sich 1 modus vincendi und 3 921 224 modi perdendi gegenüber; wenn also Johannes eine Goldmünze einsetzt, so hat sein Gegner 3 921 224 Goldmünzen einzusetzen.
Auch die zweite Aufgabe wird richtig gelöst: "Von 100 sollen 5 ins Amt gewählt werden, und ich werde raten und 4 von jenen Fünfen nennen." Weil $C(4,\ 5) = 5$ ist, stehen sich 5 modi vincendi und 3 921 220 modi perdendi gegenüber, was ganz richtig angegeben wird. Bei der Vereinfachung dieses Verhältnisses unterläuft ihm allerdings ein kleiner Fehler: Er gibt 1 : 784 245 an, statt richtig 1 : 784 244.
— Analog zu den bisherigen dritten und vierten Aufgaben formuliert er auch hier wieder zwei Aufgaben; sie sind beide falsch gelöst.

5.7 Das fünfte Spiel — fünf Namen sollen erraten werden

(p. 1012–1014)

Caramuel stellt zunächst fest, dass die Sache nun leichter wird, weil $C(5,\ 5) = 1$ ist, wie wir in heutiger Sprechweise sagen können. Er muss nun zunächst noch $C(5,\ 100)$ berechnen, wozu er die bisher verwendete Regel entsprechend erweitert; er erhält richtig 75 287 520.

Caramuels lateinische Formulierungen sind, wie wir auch schon vermerkt haben, meist

phantasievoll und abwechslungsreich, zudem oft direkt an den Leser gerichtet. Das zeigt z.B. auch wieder die eben erwähnte Regel, in welcher er das Wort "resultierend" jedesmal wieder anders ausdrückt: Multipliziere 100 mit 99, dann den "numerum *resultantem*" mit 98, dann den "numerum *provenientem*" mit 97, darauf den "*emergentem* numerum" mit 96 und dividiere schliesslich den "*egredientem* numerum" durch 120.

Jetzt fallen natürlich alle vier Aufgaben in eine zusammen. Diese eine wird denn auch (fast) richtig gelöst: spes verhält sich zum periculum wie 1 : (75 287 520 - 1). Die Subtraktion von 1, die er oben in ähnlichen Situationen nicht vergessen hat, unterlässt er. Grosszügigkeit, da diese Subtraktion in praxi nichts ändert? Später (p. 1028/29) kommt er auf diese Aufgabe zurück und dort subtrahiert er auch wirklich 1. "Also müsste Franciscinus für eine [eingesetzte Goldmünze] so viele Goldmünzen bezahlen, wenn sich der Mitspieler [concertator] beim Voraussagen dieser 5 [Namen] nicht irrt."

Anschliessend vergleicht Caramuel die von Franciscinus versprochenen Auszahlungen mit denen, die er eigentlich zahlen müsste, und es wird dargelegt, wieviel Franciscinus "heimlich entwendet " [suffuretur]. Unter anderem stellt er auch fest, dass Franciscinus einem, der zufällig [forte] alle fünf Namen richtig voraussagt, die geschuldete Summe unmöglich zahlen könnte, wie es auch fast unvorstellbar ist [impossibile est (saltem moraliter), vgl. dazu (24)], dass jemand die fünf Namen ohne Fehler voraussagt.

Schliesslich bringt Caramuel auch noch eine Überlegung zur *Reihenfolge* der Gewählten. Er stellt fest, dass 5 Namen 120-mal "miteinander kombiniert" werden können [5 possunt combinari vicibus 120]; wir würden sagen, dass 120 die Anzahl der Permutationen von 5 Namen ist. Und weiter sagt er, dass nun nur eine *einzige* Möglichkeit besteht, dass "Ziel und Wahrheit getroffen werden" [scopum et veritatem attingi], und die Zahl der modi errandi 9 034 502 400 beträgt. Diese Zahl ist in der Tat gleich $5! \cdot C(5,\ 100)$; Wieder hätte er noch 1 subtrahieren müssen, wenn er wirklich nur die Anzahl der modi errandi — und nicht die gesamte Zahl der möglichen Fälle — angeben wollte. Er schreibt diese Zahl auch noch in Worten: novies mille et trigintaquattuor milliones quingenta et duo milia et quadringenta. "Also, wer eine Goldmünze setzt, wird auf Grund der Gerechtigkeit über 9 034 Millionen gewinnen müssen." — Franciscinus bietet aber in diesem Falle nur 20 000 Goldmünzen an: "Also entwendet er heimlich mit einer Goldmünze [durch den Einsatz einer Goldmünze] unermessliche Schätze" [thesauros immensos suffuratur].

In weiteren Ausführungen beschränkt Caramuel seine Untersuchungen auf das erste und zweite Spiel, also auf das Erraten von einem oder von zwei Namen (p. 1023), "weil wir gezeigt haben, dass das dritte, vierte und fünfte sozusagen unmöglich sind" [quia ostendimus tertium, quartum et quintum esse de re moraliter impossibili]. (24)

Wir wollen hier jedoch nur noch auf seine Untersuchungen eingehen, in denen er sich die Frage stellt, *wie viele Zettel auszufüllen* sind, um in jedem einzelnen Spiel *ohne Gefahr* zu sein [quot schedas debeas sumere, ut sis in certamine unoquoque securus].

5.8 Die "sichere Wette"

(p. 1024–1029)

Die Voraussetzungen sind also: 100 sind wählbar, 5 davon werden durch das Los ausgewählt [delectum dabit sors]; wer mitspielt, schreibt auf je einen Zettel jeweils 5 Namen auf von denen, die zur Verlosung kommen; wenn er einen Namen richtig voraussagt, so erhält er 1 Escudo [scutum], für zwei Namen 10 Escudos, für drei Namen 300, für vier Namen 1500, für alle fünf Namen 10 000 Escudo. "Aber wie viele Zettel werde ich nehmen müssen, um sicher zu sein und um gewiss zu sein, mich nicht zu irren?"

Wenn man sich *wenigstens einen* Namen richtig voraussagen möchte, so kann man nach Caramuel 20 Zettel kaufen und die 100 in Frage kommenden Namen zu je fünf jeweils auf einen Zettel schreiben.

Die Frage wird aber mathematisch interessanter, wenn man sicher sein möchte, *wenigstens zwei* Namen der fünf ausgelosten Namen richtig vorausgesagt zu haben. *Wie viele Zettel mit je fünf Namen* wird man jetzt benötigen?

Didaktisch geschickt beginnt er mit kleineren Zahlen: Er baut zunächst eine *Figura fundamentalis* auf, um zu zeigen, wie sich die Anzahlen der Kombinationen der Länge 2 entwickeln, wenn man von zwei Personen zu drei, dann zu vier usw. bis schliesslich zu dreizehn übergeht und überlegt an Hand dieser Figura fundamentalis, wie viele Fünferzettel ausgefüllt werden müssen, damit man jede Kombination aus zwei Elementen abgedeckt hat. Daraus entwickelt er dann eine ausführliche Tabula: zu 5, 9, 13, 17, [...], 97, 101, 105 Personen (aus denen jeweils fünf ausgelost werden sollen) kann man nun in einer Kolonne ablesen, wie viele Zettel zu je fünf Namen man zu beziehen und auszufüllen hat, um alle Kombinationen von zwei Namen aus diesen 5 bzw. 9 bzw. ... bzw. 105 Namen abzudecken. Wir geben von den 6 Kolonnen seiner Tabelle die Kolonne mit der Anzahl p der Personen und die Kolonne mit der Anzahl n der Zettel in Zeilenform ein Stück weit wieder:

p:	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61
n:	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435

Die Zahlen der ersten Zeile bilden offensichtlich eine arithmetische Folge erster Ordnung, jene der zweiten Zeile aber eine arithmetische Folge zweiter Ordnung. Davon schreibt Caramuel allerdings nichts. Im übrigen erklärt er wohl die *Konstruktion* seiner ausführlichen Tabula sehr genau; deshalb benötigt er auch 6 Kolonnen. Eine *Begründung* aber für die beschriebene Konstruktionsweise muss sich der Leser von Caramuel jedoch selber suchen. Wir setzen im folgenden voraus, dass dem Leser von Caramuels MATHEMATICA BICEPS, in der sich ja diese Ausführungen finden, bekannt ist, wie man die Anzahl der Kombinationen der Länge 2 aus n Elementen berechnen kann; tatsächlich sind ja solche Berechnungen in den vorangehenden Abschnitten mehrmals vorgekommen Dann *könnte* man zum Beispiel so überlegen, um zu Caramuels Resultaten zu kommen:

(I) Wenn statt der 100 Namen nur 5 Namen im Spiel sind, so sind 10 Kombinationen aus je zwei Namen ("Zweierkombinationen") denkbar; sie sind alle ab-

gedeckt durch einen Zettel mit den Namen dieser fünf, Personen, also durch 1 "Fünferzettel".

(II) Nun kommen 4 neue Namen dazu. Bei $5+4=9$ Namen sind 36 Zweierkombinationen denkbar. Um sie alle abzudecken, sind insgesamt 6 Fünferzettel notwendig: zunächst der bereits genannte eine Zettel aus (I); dan fünf neue, die jeweils einen der fünf Namen aus (I) und dazu die vier neuen Namen enthalten.

(III) Wieder kommen 4 neue Namen dazu. Bei $9+4=13$ Namen sind 78 Zweierkombinationen denkbar. Um sie alle abzudecken, sind 15 Fünferzettel notwendig: zunächst die bereits genannten 6 Zettel aus (II); dann neun neue, die jeweils einen der neun Namen aus (II) und dazu die vier neuen Namen enthalten.

(IV) Wieder kommen 4 neue Namen dazu. Bei $13+4=17$ Namen sind 136 Zweierkombinationen denkbar. Um sie alle abzudecken, sind 28 Fünferzettel notwendig: zunächst die bereits genannten 15 Zettel aus (III); dann 13 neue, die jeweils einen der dreizehn Namen aus (III) und dazu die vier neuen Namen enthalten. Usw.

Wir sehen, dass wir die Zahlen unserer obigen zwei Zeilen erhalten. Da wir bei der Anzahl der Personen immer um 4 weitergehen, entsteht bei den Personenzahlen, wie bereits bemerkt, eine arithmetische Folge erster Ordnung; da die Anzahlen der benötigten Fünferzettel jeweils gerade um die vorangehende Personenzahl zunehmen, bilden diese eine arithmetische Folge zweiter Ordnung.

Diese Feststellungen verleiten den *heutigen* Leser selbstverständlich dazu, eine Formel zu suchen, die gestattet, aus der Anzahl p der Personen die Anzahl n der benötigten Fünferzettel direkt zu berechnen. Dieses Polynom zweiten Grades in p lässt sich leicht finden:

Für $p \geq 5$ und $p \equiv 1 \bmod 4$ — also für $p = 5, 9, 13, 17, \ldots, 101, \ldots$ ist

$$n = (1/8) \cdot (p^2 - 4p + 3).$$

Dass die Konstruktion der Tabelle so elegant durchgeführt werden kann, liegt natürlich daran, dass die Zahl der Personen, von 5 ausgehend, immer um 4 zunimmt: sicher eine originelle, gute Idee von Caramuel!

Wie soll nun interpoliert werden, wenn man z.B. $p = 47$ hat? Man geht aus vom nächst kleineren Wert in der Tabelle: zu $p = 45$ gehört $n = 231$.
Es ist nun $45 = 4 \cdot 11 + 1$; das sind 11 "Viererkombinationen" plus ein "Einzelname". $47 = 45 + 2$ enthält 2 neue Namen. Jeder dieser zwei neuen Namen wird mit jeder der 11 "Viererkombinationenen" auf je einen Zettel geschrieben, was 22 neue Zettel ergibt. Jetzt muss noch ein Zettel geschrieben werden, der die beiden neuen Namen und dazu den "Einzelnamen" und noch zwei beliebige der übrigen Namen enthält. Somit benötigt man total $231 + 22 + 1 = 254$ Fünferzettel.

Und wenn jetzt $p = 100$ ist? Zu $p = 97$ gehört 1128; es ist $97 = 4 \cdot 24 + 1$; das sind 24 "Viererkombinationen" plus ein "Einzelname".
$100 = 97 + 3$ enthält 3 neue Namen. Jeder dieser drei neuen Namen wird mit jeder der 24 "Viererkombinationen" auf je einen Zettel geschrieben, was 72 neue Zettel ergibt.

Jetzt muss noch ein Zettel geschrieben werden, der die drei neuen Namen und dazu den Einzelnamen und einen beliebigen der übrigen Namen enthält. Somit benötigt man $1128 + 72 + 1 = 1201$ Fünferzettel.

Caramuel schliesst diesen Abschnitt mit den Worten: "Also, wenn die Voraussetzung gültig ist, die ich [...] vorgestellt habe (natürlich die, dass die Voraussage von 3, 4 oder 5 Konsuln sozusagen unmöglich sei und infolgedessen der ganze Escudo für die Voraussage von 2 gegeben wird), dann würde derjenige, der 1201 Zettel nähme (und der jene Zettel gegen ebenso viele Escudos erhalten hätte), gewiss sein, dass er auf jenen Zetteln jene 10 Zweierkombinationen erfassen würde, die sich aus den Namen der Gewählten ergeben (vielleicht [forte] würde er auch auf einem Zettel 3 oder 4 oder 5 Konsuln treffen — aber dieses *vielleicht* ist eine ganz abgelegene Möglichkeit und Hoffnung" [sed illud *forte* est in remotissima potentia et spe]).

Vielleicht als eine Ergänzung zu den vorherigen Überlegungen geht Caramuel im folgenden nochmals auf einige kombinatorische Fragen ein und berechnet die Anzahl der Kombinationen und Variationen der Länge 2, 3, 4 und 5, die sich bilden lassen, wenn die Auswahl aus 100 Elementen getroffen werden kann: er sucht "in Centenario" die Anzahl der Binarii, Ternarii, Quaternarii et Quinarii hinsichtlich "substantia" (was zu unseren Kombinationen führt) und hinsichtlich "positione", indem er noch mit der Anzahl der "positiones" multipliziert (was zu unseren Variationen führt). Den Fachausdruck "Permutation" verwendet er nicht: Er sagt einfach, dass es bei zwei Dingen 2 positiones gibt, bei drei Dingen 6, bei vier Dingen 24, bei fünf Dingen 120 [duarum rerum positiones sunt 2, trium sunt 6, qattuor 24, quinque autem rerum sunt 120]. (25)

Er hält dann unter anderem nochmals fest, dass, wenn einer einen Fünferzettel nimmt und ausfüllt und einen Dukaten einsetzt, sein Gegner Franciscinus 75 287 519 Dukaten einsetzen müsste, damit es sich um ein gerechtes Spiel [ludus aequalis] handeln würde. Hier hat er die Subtraktion von 1 nicht vergessen, um die Anzahl der modi errandi zu erhalten; denn es ist ja $75\ 287\ 519 = 75\ 287\ 520 - 1 = C(5,\ 100) - 1$. — Und wenn der Wetter nicht nur die 5 Namen der 5 Konsuln voraussagen möchte, sondern auch noch die Reihenfolge der Auslosungen dieser fünf Namen und wiederum einen Dukaten setzen würde, so müsste Franciscinus also 9 034 502 399 Dukaten setzen (vgl. 5.7). — Das Lotteriespiel in seinen verschiedenen Formen hat übrigens zu einer grossen Zahl von wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen geführt; darüber orientieren z.B. E. Czuber, 1899, p. 40ff. und D.R. Bellhouse, 1991.

Den Abschluss der ARITHMOMANTICA bilden Ausführungen über weitere Ratespiele, so über Ratespiele in Salamanca bei der Besetzung eines Lehrstuhls an der Universität (!) oder darüber, wie man eine Zahl, die jemand gedacht hat, durch geschickte Fragen "erraten" kann.

6. Zur "Fachsprache" von Caramuel

Eine eigentliche, einigermassen *feststehende* Fachsprache für die Kombinatorik und für die Wahrscheinlichkeitsrechnung konnte sich selbstverständlich erst mit der Zeit entwickeln. Zur Zeit von Caramuel war sie für die Kombinatorik zum Teil vorhanden (vgl. R. Haller, 1995), für die Wahrscheinlichkeitsrechnung indessen noch nicht. Im

folgenden wollen wir einige Ausdrücke auflisten, die Caramuel als termini technici verwendet. Sicher hat er sie nicht alle "erfinden" müssen. Leider können wir hier nicht auch noch der Frage nachgehen, wo überall er Anregungen zur Verwendung dieser Ausdrücke gefunden haben könnte. — Seine im allgemeinen sehr abwechslungsreiche Sprache, auf die wir ja mehrmals hingewiesen haben, hat ihn übrigens auch gelegentlich dazu geführt, denselben Begriff an späterer Stelle wieder anders zu bezeichnen.

Zufall, zufällig
— forte: zufällig
— ludus qui sola a fortuna dependet: Zufallsspiel
— sortes: Lotterie

Unparteilichkeit, Gerechtigkeit im Spiel
— aequalitas: Gleichheit der Bedingungen, Unparteilichkeit, Gerechtigkeit
— ludus aequalis: "gleiches Spiel", gerechtes Spiel

Knöchel, Würfel, Spiele
— talus, talus vetus, taxillus, $\acute{\alpha}\sigma\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\alpha\lambda o\varsigma$, taba [spanisch]: Astragalos, Knöchel
— talus, talus cubicus, talus communis, tessera, $\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, $\kappa\acute{\upsilon}\beta\iota o\nu$: Würfel
— alea, ludus aleae, lusus aleae, $\kappa\upsilon\beta\varepsilon\acute{\iota}\alpha$: Würfelspiel
— ultra decem, $META\ \Delta EKA\Delta A$. Passa-diez [spanisch; heute: pasa-diez]: das Würfelspiel "Passe-dix"
— ludus pilae: Ballspiel [bei Jakob Bernoulli: Jeu de Paume (J. Bernoulli, 1975, p. 260; J. Bernoulli, 1899, II, p. 108)]
— divinatio a fortuna: Raten auf gut Glück

Einsatz
— pecunia, pecunia deposita; nummi depositi: Einsatz; Total der Einsätze

Erwartung, günstige Fälle, ungünstige Fälle
— spes, exspectatio: "Hoffnung", "Erwartung", Gesamtheit (Anzahl) der günstigen Fälle
- modi lucrandi, modi vincendi, iactus fausti, modi satisfaciendi: günstige Fälle [casus foecundi (fecundi) seu fertiles bei Jakob Bernoulli (J. Bernoulli, 1975, p. 257)]
— periculum: "Gefahr", Gesamtheit (Anzahl) der ungünstigen Fälle
— pericula, modi perdendi, modi errandi: ungünstige Fälle [casus steriles bei Jakob Bernoulli (cf. J. Bernoulli l.c.)]

gleichwahrscheinlich
— aequalitas spei et periculi: "Gleichheit von Hoffnung und Gefahr", Gleichwahrscheinlichkeit, gleichwahrscheinlich
— victoria est aeque dubia: "gleichermassen zweifelhaft", gleichwahrscheinlich

wahrscheinlicher
— verosimilius: wahrscheinlicher

An Sicherheit grenzend, fast sicher, fast gewiss
— certitudo moralis: "moralische Gwissheit", praktisch sicher, an Sicherheit grenzende Vermutung. [Nach Jakob Bernoulli ist etwas moralisch gewiss; "dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt" (J. Bernoulli, 1975, p. 240;

J. Bernoulli, 1899, II, p. 73); vgl. (18)]
— certitudo realis: (wirkliche) Gewissheit

Kombinatorik
— combinatio: Zusammenstellung (compositio) von zwei oder mehr Elementen; sie werden substantia und positione unterschieden und ergeben so combinationes materiales (unsere Kombinationen) und combinationes locales (unsere Variationen).
— Binarii, Ternarii, Quaternarii, Quinarii: Kombinationen bzw. Variationen der Länge 2, 3, 4, 5 (aus fünf Elementen: in Quinario; aus sechs Elementen: in Senario; aus 100 Elementen: in Centenario).
— positiones: bei zwei Dingen gibt es 2 positiones; bei drei Dingen 6, bei vier 24 usw.; Caramuel verwendet das Fachwort "Permuation" noch nicht. Er spricht einfach von "positiones".

(Zur Entwicklung der Fachsprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung cf. K.-R. Biermann, 1965, R. Ineichen, 1996, p. 11; zur Entwicklung der Fachsprache der Kombinatorik cf. R. Haller, 1995.)

7. Probabilismus und probabilitas

Wie wir gesehen haben, hat Caramuel in den Beispielen, die er uns in den Teilen KYBEIA und ARITHMOMANTICA im zweiten Band seiner MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA präsentiert, *modi lucrandi* und *modi perdendi* — also günstige und ungünstige Fälle — ausgezählt oder berechnet, somit eigentlich *Chancenverhältnisse* bestimmt. Damit hat er dann die Einsätze für gerechtes Spiel bestimmt. Der Ausdruck "Wahrscheinlichkeit" (probabilitas) kommt dabei nicht vor; *probabilis* war ja bis in die frühe Neuzeit hinein unter anderem vor allem *Attribut einer Meinung, einer opinio*, die mit guten Gründen als *glaubwürdig* betrachtet werden konnte; daneben hatte dieses Adjektiv allerdings auch noch andere Bedeutungen (vgl. z.B. Th. Deman, 1933). Die Überlegungen jedoch, die Caramuel bei der Behandlung seiner Beispiele macht, gehören natürlich in jenen Teil der Mathematik, der *heute* als *Wahrscheinlichkeitsrechnung* bezeichnet wird. — Zu dieser "Mathematisierung des Wahrscheinlichen" kam es — wie wir in der Einleitung im Anschluss an I. Schneider (1976a) dargelegt haben — erst durch das Zusammentreffen von zwei voneinander unabhängigen Entwicklungen. Die eine dieser Entwicklungen besteht in der
— "Wandlung des Bedeutungsinhaltes von *probabilitas* zu einem quantifizierbaren Begriff", und die andere besteht darin,
— dass "das Konzept des Zufalls im Rahmen der Glücksspiele in einer Chancenverhältnisrechnung mathematisiert wurde" (I. Schneider, 1976a).

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie Jakob Bernoulli konzipiert und in seiner ARS CONJECTANDI dargestellt hat, ist erst "mit der Ablösung von Chancenverhältnissen und Erwartungswert als zentralen Begriffen in der Glücksspielrechnung durch den Begriff der Wahrscheinlichkeit" entstanden (I. Schneider, 1988, p. 47). Diese Ablösung tritt bereits in Jakob Bernoullis Werk in Erscheinung. In der Arbeit von Abraham de Moivre von 1712 kommt sie dann schon im Titel zu Ausdruck, wo ausdrücklich "von der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse in Spielen, die vom Zufall abhängen" die

Rede ist: DE MENSURA SORTIS, SEU, DE PROBABILITATE EVENTUUM IN LUDIS A CASU FORTUITO PENDENTIBUS.

Nun ist Caramuel, wie wir ebenfalls bereits festgestellt haben im ethisch-moralischen Bereich ein markanter Vertreter des *Probabilismus*, ein ausgesprochener *Probabilist*, der zudem seine Meinung in dieser Angelegenheit auch in verschiedenen Publikationen sehr deutlich dargelegt hat. — Der Probabilist aber "vertritt die Meingung, dass man aus guten Gründen der Freiheit Vorzug vor dem Gesetz geben darf, vorausgesetzt, dass eine wirklich wahrscheinliche Meinung (*opinio probabilis*) für die freie Selbstbestimmung (*pro libertate*) vorhanden ist", wie man z.B. dem NEUEN LEXIKON DER CHRISTLICHEN MORAL (H. Rotter, G. Virt, 1990, p. 520) entnehmen kann (vgl. auch Anm. 3). Jetzt liegt selbstverständlich die Frage nahe, ob man bei Caramuel allenfalls vom Zusammentreffen der oben genannten beiden Entwicklungen oder von der Quantifizierung von "probabilitas" etwas spüren könne. Dieser Frage soll in zwei theologischen Werken Caramuels noch ganz kurz nachgegangen werden. — Es scheint uns, dass für den genannten Zweck die beiden folgenden Werke eingesehen werden müssen:

— Caramuels APOLOGEMA PRO ANTIQUISSIMA ET UNIVERSALISSIMA DOCTRINA DE PROBABILITATE, publiziert 1663 (1664 durch die Sacra Indicis Congregatio als "damnatus ac prohibitus" erklärt), im wesentlichen eine Kampfschrift, wie schon aus dem Untertitel hervorgeht, und

— seine THEOLOGIA MORALIS FUNDAMENTALIS, die in der 2. Auflage 1775/76 erschienen ist. (26)

Es ist nun hier nicht der Ort, ausführlich auf den Inhalt dieser Werke einzugehen — dazu würde dem Schreibenden nicht nur der Raum, sondern vor allem auch die Kompetenz fehlen. — Zunächst stellen wir fest, dass uns in beiden Werken *keine Quantifizierung von probabilitas* begegnet. Aber es wird in beiden Werken sehr ausführlich der *Begriff der Wahrscheinlichkeit* behandelt, und es wird eine *Graduierung der Wahrscheinlichkeit*, allerdings nur in qualitativer Art, vorgenommen:
— Im APOLOGEMA wird definiert: *Opinio probabilis* abstractim sumpta dicitur, quae pro se habet rationes fortes, nullam autem demonstrativam; quae contra se habet rationes fortes, nullam autem demonstrativam (p. 33). — Anschliessend werden die einzelnen Teile der Definition sorgfältig erläutert, und es wird der Begriff nach verschiedenen Seiten abgegrenzt. — Als *Grade der Wahrscheinlichkeit* werden unterschieden (p. 36): Vocantur *aeque probabiles Propositiones*, quae habent rationes aeque graves; *probabiliores*, quae graviores; *minus probabiles*, quae minus graves.
— In der THEOLOGIA MORALIS FUNDAMENTALIS wird die *opinio probabilis* so erklärt: Opinio, cuius nec veritas nec falsitas demonstratur, si sit valde verae-similis, nominatur probabilis, et quidem probabilitas nascitur ex gravi motivo, quo quis ad assentiendum inducitur. Et est duplex: Rationalis authenticaque; illa consistit in ratione, haec in auctorum numero (p. 150). — Weiter werden dieselben Grade unterschieden wie im APOLOGOMENA.

Dazu ist noch anzumerken: Der heutige Wahrscheinlichkeitsbegriff der Stochastik ist "janusköpfig" — "janus-faced" — wie I. Hacking (1975) schreibt. Er hat zunächst

eine *epistemische* Seite; man spricht dann kurz von *epistemischer Wahrscheinlichkeit* (auch von subjektiver oder persönlicher Wahrscheinlichkeit): Durch sie wird der *Grad des Vertrauens in eine Aussage*, die *Glaubwürdigkeit* einer Aussage, die *Zuverlässigkeit* einer Vorhersage oder auch die *Bereitschaft zu wetten* ausgedrückt. Bei der Beschreibung von Glücksspielen, allgemeiner bei der Behandlung von Zufallsexperimenten oder auch bei zufälligen Ziehungen aus Populationen kommt hingegen vor allem die *statistische* oder *aleatorische* Seite zum Ausdruck; man spricht dann von *aleatorischer Wahrscheinlichkeit* (auch von objektiver oder statistischer Wahrscheinlichkeit). Der oben dargelegte Wahrscheinlichkeitsbegriff in den erwähnten theologischen Werken von Caramuel ist offensichtlich der epistemische. Auch in der Antike und im Mittelalter stand diese epistemische Seite der Wahrscheinlichkeit stark im Vordergrund (vgl. z.B. R. Ineichen, 1996). Aber es sind beide Interpretationen von Wahrscheinlichkeit mit der modernen, axiomatisch aufgebauten Wahrscheinlichkeitstheorie verträglich; in beiden Fällen werden die Wahrscheinlichkeiten heute auch numerisch ausgedrückt, also quantifiziert. (27). — Frühe Schritte zur Quantifizierung des Vertrauens in eine Aussage, der Glaubwürdigkeit einer Aussage, werden z.B. in LA LOGIQUE OU L'ART DE PENSER ("Logik von Port Royal") getan (A. Arnauld, P. Nicole, 1662 bzw. 1965; I. Schneider, 1988, p. 52ff.). Im vierten Teil der ARS CONJECTANDI von Jakob Bernoulli sind schliesslich zwei Kapitel der Frage gewidmet, wie die *Gewichte von Beweisgründen* [pondera argumentorum] beurteilt werden können und wie dann daraus *"der Grad der Gewissheit oder die Wahrscheinlichkeit"*, welche dieser Beweisgrund liefert [gradum certitudinis seu probabilitatem, quam generat hoc argumentum], berechnet werden kann. Und diese Berechnung geschieht dann so, "wie die Hoffnungen der Teilnehmer an einem Glücksspiele gefunden zu werden pflegen" (J. Bernoulli, 1899, II, p. 82).

Solche Schritte von der aleatorischen Wahrscheinlichkeit zur epistemischen, wie wir sie bei Jakob Bernoulli finden, werden von Caramuel im allgemeinen noch nicht gemacht. Immerhin, bei der Behandlung von Fragen des Lottos stellt Caramuel einleitend doch sehr deutlich fest, dass es sich hier um eine *Quaestio Arithmetico-Theologica* handelt, dass es — unter anderem — darum gehe, "im Theologischen die mathematische Klarheit" zu finden: ist dies nicht ein Schritt, der auf eine ähnliche Stufe gehört, wie jener, den wir oben von der "Logik von Port Royal" erwähnt haben?

8. Rückblick und Zusammenfassung

Wir haben gesehen, wie Caramuel in seiner KYBEIA und in seiner ARITHMOMANTICA für verschiedene Spiele, die nur vom Zufall abhängen, zunächst die *modi lucrandi* und die *modi perdendi* — also die günstigen und die ungünstigen Fälle, wie man später sagen wird — auszählt oder mit Hilfe der Kombinatorik berechnet. Damit bestimmt er dann die *Einsätze*, die zu leisten sind, wenn im betrachteten Spiel die "Unparteilichkeit" [aequalitas] gewahrt werden soll. Er betreibt also eine reine *Glücksspiel*rechnung, bei welcher er Chancenverhältnisse und damit Einsätze berechnet, jedoch noch nicht von *Wahrscheinlichkeit* [probabilitas] spricht. — Den probabilitates geht er hingegen in seinen Abhandlungen nach, in welchen er seine moralisch-ethischen Überlegungen zum Probabilismus darlegt.

In der KYBEIA behandelt er *richtig*
— den einmaligen Wurf mit einem Würfel und den einmaligen Wurf mit zwei Würfeln; in einem Ausblick zeigt er, dass er wohl auch das Problem mit drei Würfeln richtig erfasst hat;
— verschiedene Probleme über die Verteilung des gesamten Einsatzes, wenn ein Spiel abgebrochen werden muss, bevor einer der *zwei* Spieler den Sieg errungen hat (Teilungsproblem, problème des partis, problem of points), und zwar für folgende Situationen: (1; 2), wenn also dem einen der Spieler noch ein Teilsieg fehlt, dem andern aber noch zwei Teilsiege; weiter für die Siutationen (1; 3), (1; 4), (2; 3) und (2; 4);
— Die Berechnung der Einsätze, wenn bei einer Wiederholung des Zufallsexperimentes der eine der beiden Spieler zweimal, dreimal, ..., allgemein n–mal (!) gewinnen sollte, bevor der andere einmal gewinnt;
— Probleme bei mehrfachen Würfelversuchen (z.B. "in drei Würfen mindestens einmal eine 5"), Erläuterung einer allgemeinen Regel dazu und Erstellen einer logarithmisch berechneten Tabelle;
— den Unterschied zwischen "unabhängigen" und "abhängigen" Ereignissen, den er an einfachen Beispielen illustriert (allerdings ohne diese beiden Begriffe ausdrücklich zu verwenden);
— das Spiel Passe-dix.

In der ARITHMOMANTICA behandelt er *richtig*
— eine ganze Anzahl von Fragestellungen kombinatorischer Art beim Genueser Lotto, bei welchem aus 100 Senatoren 5 Konsuln ausgelost und Wetten auf die Namen der Ausgelosten abgeschlossen werden, bzw. beim Zahlenlotto, das daraus hervorgegangen ist;
— das Problem der "sicheren Wette", wenn man bei diesem Lotto n Zettel mit jeweils fünf Namen verwendet und damit jene Zweierkombinationen erfassen möchte, die sich aus den Namen der Gewählten ergeben;
— die Einsätze, die zu leisten wären, wenn man nicht nur die Namen der fünf Ausgelosten vorhersagen will, sondern auch die Reihenfolge, in der sie ausgelost werden.

Falsch behandelt er in diesen beiden Abhandlungen
— vor allem die Teilungsprobleme, die sich bei *drei* Spielern stellen können;
— ein Teilungsproblem, das sich stellen könnte, wenn ein Spiel gar nicht begonnen werden kann, nachdem man bereits festgelegt hat, wer den Vortritt haben würde;
— verschiedene etwas kompliziertere Fragestellungen kombinatorischer Art beim Genueser Lotto, vor allem Probleme, die man heute mit der hypergeometrischen Verteilung angehen würde.
— Fehlerhaft ist auch der Vergleich seiner eigenen Arbeit mit jener von Huygens.

Bei seinen Würfelproblemen und bei den Teilungsproblemen haben wir darauf hingewiesen, dass diese sich in der Regel mit denselben Zahlen auch in der Abhandlung DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEA von Christiaan Huygens finden, die dieser 1656 geschrieben hat. Diese Abhandlung ist 1657 lateinisch erschienen, eingefügt in die EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM LIBRI QUINQUE von Frans van Schooten; die Ausgabe in Niederländisch ist 1660 publiziert worden. Es stellt sich jetzt natürlich die Frage: Hat Caramuel einfach Huygens kopiert? Die Frage in *dieser* Form muss wohl *verneint*

werden, und zwar aus folgenden Gründen:
— Zunächst schreibt Caramuel selbst, dass er die Abhandlung von Huygens (die er allerdings dem dänischen Astronomen Longomontanus zuschreibt) erst kennen gelernt habe, als er die KYBEIA dem "angesehenen Herrn N., einem sehr gebildeten Mann", vorstellte.
— Weiter fügt er den ganzen Text von Huygens am Schlusse seiner KYBEIA an, wozu er ja wirklich keinen Grund gehabt hätte, wenn er sich schon vorher ständig an diesen Text gehalten hätte. Einleitend lobt übrigens Caramuel den Verfasser des Textes, also Huygens (bzw. Longomontanus) sehr. Im Anschluss an die Wiedergabe des Textes von Huygens nimmt er aber dann — etwas zu selbstsicher — kritisch dazu Stellung; diese kritischen Äusserungen sind indessen durchaus fehl am Platze.
— Dann ist auch zu beachten, dass er z.B. in der Darstellung seiner Kombinatorik Sebastian Izquierdo und Christophorus Clavius ohne weiteres zitiert; auch in anderen Kapiteln seiner MATHESIS BICEPS zitiert er öfters mit grösster Selbstverständlichkeit andere Autoren. Wieso hätte er dann Huygens bzw. Longomontanus nicht im eigentlichen Text der KYBEIA zitieren sollen?
— Weiter ist zu sagen, dass er in jenen Aufgaben, die sich mit denselben Zahlen auch bei Huygens finden, *anders formuliert und anders argumentiert*: Seine Sprache ist meistens sehr anschaulich, farbig, sehr abwechslungsreich; zudem richtet er sich oft direkt an den Leser. Seine Argumentationen werden nicht in der systematischen und deduktiven Art von Huygens präsentiert. Er geht nicht von sorgfältig formulierten Lehrsätzen aus, wie dies Huygens tut, der ja von drei Lehrsätzen ausgeht, die er seinen Beispielen voranstellt (vgl. dazu Anm. 10 und I. Schneider, 1996). Caramuel argumentiert im allgemeinen nicht "more geometrico", wie dies der Mathematiker in der Regel zu machen pflegt und wie dies eben Huygens tut, sondern viel eher fast allein mit dem "gesunden Menschenverstand", oft didaktisch sehr geschickt und sehr um Verständlichkeit bemüht. Man muss aber auch darauf hinweisen, dass seine Darlegungen nicht immer sehr sorgfältig sind, gelegenlich unnötige Wiederholungen enthalten, zudem — wie wir bereits gesagt haben — manchmal auch fehlerhaft sind; weiter, dass sie schliesslich dann und wann einer Straffung und einer Befreiung von unnötigem Beiwerk, einer eigentlichen Überarbeitung bedürften. — Huygens ist der grosse Mathematiker und als Physiker und Astronom einer der bedeutendsten Naturforscher des 17. Jahrhunderts — Caramuel ist ein Mann von enzyklopädischem Wissen, ein Polyhistor, der ungeheuer viel und vielerlei geschrieben hat und in seinen Büchern die verschiedensten Sachgebiete darstellt, darunter in seiner zweibändigen MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA die Mathematik, in deren Rahmen er ein umfangreiches Kapitel den Würfelproblemen und dem Genueser Lotto widmet. Er hat aber auch einiges noch nicht voll Ausgereiftes publiziert. — "Pauca sed matura", die Inschrift auf dem Siegel von Carl Friedrich Gauss (1777–1855), einem der grössten Mathematiker aller Zeiten, war sicher *nicht* die Devise von Caramuel!
— Endlich darf man ebenfalls noch erwähnen, dass Caramuels Präsentation der Glücksspielrechnung wohl — nach Huygens bzw. Frans van Schooten — einen der ersten Versuche — oder überhaupt den ersten Versuch — darstellt, dieses Gebiet in ein Lehrbuch einzubauen, zudem in ein sehr umfassendes Lehrbuch, das man eher als Enzyklopädie der Mathematik bezeichnen müsste, dazu an jenem Platz, wo die Glücksspielrechnung und später die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung während

vielen Jahrzehnten hingehört haben, nämlich in die COMBINATORIA.

Die *Übereinstimmung mit der Abhandlung von Huygens bei der Aufgabenstellung und bei den Zahlenangaben* in den erwähnten Würfel- und Teilungsproblemen ist jedoch so gross, dass diese Aufgaben bekannt gewesen sein müssen, dass Caramuel eine Quelle gehabt haben muss, die zum mindesten die Aufgabenstellungen enthielt. Solche Quellen — manchmal vielleicht unvollständig und eventuell auch sehr unvollkommen — müssen wohl existiert haben; auch der Text von "Longomontanus", den Caramuel seiner KYBEIA anfügte, war ja eine solche Kopie, allerdings eine vollständige, mit Ausnahme der Angabe des richtigen Autors. Zudem hat man damals im Kreise von mathematisch interessierten Gelehrten über solche Probleme gesprochen und Briefe geschrieben — auf einem solchen Wege ist ja zu seiner Zeit auch Huygens mit diesen Aufgabenstellungen bekannt geworden (vgl. Huygens' Brief an Frans van Schooten vom 27. 4. 1657 in: Chr. Huygens, 1920; ferner A.W.F. Edwards, 1982 und I. Schneider, 1996).

Es ist aber auch darauf hinzuweisen, dass bei Caramuel manches zu finden ist, was nicht in der Abhandlung von Huygens enthalten ist: Etwa die einleitenden Ausführungen über die aequalitas eines Spiels, die eine oder andere Erweiterung bei Beispielen, die in der Abhandlung von Huygens ohne diese Erweiterung enthalten sind (wir haben darauf im Abschnitt 4 an einigen Stellen hingewiesen), "abhängige Ereignisse" und "unabhängige Ereignisse", die Ausführungen über das Spiel Passe-dix, dann die ganze ARITHMOMANTICA, die bei der Behandlung des Genueser Lottos doch viele hübsche Anwendungen der elementaren Kombinatorik bringt.

D.F. Diéguez (1919), A. Pérez de Laborda (1982) und andere Autoren weisen auf die Berühmtheit hin, die Caramuel gerade auch durch seine MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA, in der sich ja die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA vorfinden, unter den Gelehrten seiner Zeit erhalten hat: "La diffusione della MATHESIS BICEPS riportava il nome di Caramuel in primo piano nella repubblica dei dotti" (D. Pastine, 1975, p. 141); — "Con su publicación, el nombre de Caramuel brilla de nuevo en la república de los sabios europeos" (J. Velarde Lombraña, 1989, p. 326).

Man hat aber auch schon sehr früh auf Fehler in Caramuels Darstellung hingewiesen. So schreibt Johann I Bernoulli (1667–1748), der Bruder von Jakob Bernoulli, in einem Brief an Gottfried Wilhelm Leibniz, in welchem unter anderem vom Würfelspiel die Rede ist: "Ich wundere mich, dass Du nichts von Caramuel sagst, der diesen Stoff *ausführlich und gelehrt* [copiose et erudite] behandelt hat [...]". Er stellt dann aber auch fest, dass er darin manchen Fehler entdeckt habe (G.W. Leibniz, 1971, p. 715). — Leibniz hat übrigens das mathematische Werk von Caramuel sehr wohl zur Kenntnis genommen und zitiert ihn (vgl. J. Velarde Lombraña l.c.). — Nikolaus I Bernoulli (1687–1759) aber, ein Neffe von Johann und Jakob, verwirft in einem Brief an Pierre Rémond de Montmort (1678–1719) die KYBEIA ganz, und zwar mit sehr harten Worten; sie ist für ihn nur "eine Ansammlung von Fehlern" – un amas de paralogismes! (P.R. Montmort, 1713, p. 387). "In this case this is an injustice to Caramuel", kommentiert E. Knobloch (1979). Auch in seiner DISSERTATIO DE USU ARTIS CONJECTANDI IN JURE (1709) weist Nikolaus Bernoulli wieder auf Caramuel und seine fehlerhaften Ausführungen über das Genueser Lotto hin; er geht aber nicht

weiter darauf ein.

Doch bereits I. Todhunter stellt in seiner sorgfältigen und sehr ausführlichen Gschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung von 1865 fest, dass Nikolaus Bernoulli übertrieben hat. Todhunter weist zwar auf die Fehler hin, aber er hält auch fest, was in der KYBEIA richtig dargestellt ist (I. Todhunter, 1865, p. 44ff.). Allerdings schreibt Todhunter gar nichts von Caramuels Untersuchungen zum Genueser Lotto. Ist dies wohl der Grund, dass diese auch später so selten erwähnt werden? Erst D.R. Bellhouse (1991) kommt dann in seiner Geschichte des Genueser Lottos auch wieder auf Caramuels Abhandlung zurück. H. Wieleitner (1911, p. 74), ein anderer Mathematikhistoriker, weist auf die "scharfsinnige Art" hin, mit der Caramuel "Spiel- und Wettfragen behandelte, um juristisch-theologische Streitfragen über Berechtigung der Wette, Ersatzpflicht usw. zu entscheiden".

Im Werk DIE CISTERCIENSER — GESCHICHTE, GEIST, KUNST (A. Schneider e.a., 1974) ist Caramuel mit vielen anderen unter jenen eingereiht, die "als philosophisch-theologische Schriftsteller" hervorragen (p. 150); von seinem mathematischen Werk ist nicht die Rede. In sehr verdienstvoller Weise hat dann aber P. Hermann Josef Roth OCist. (1980) im Band DIE ZISTERZIENSER — ORDENSLEBEN ZWISCHEN IDEAL UND WIRKLICHKEIT darauf hingewiesen, dass Juan Caramuel y Lobkowitz, sein längst verstorbener Mitbruder aus der Zeit des Barocks, "einer der originellsten Zisterzienser seiner Zeit", sich eingehend mit der Mathematik befasst hat und auch deshalb gebührend beachtet werden sollte. – Mit unserer Darstellung haben wir versucht, aus seinem mathematischen Werk jene Teile vorzustellen und zu kommentieren, die die *Glücksspielrechnung* — etwas ungenau gesagt, die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* — betreffen. — Für eine Würdigung der ganzen MATHESIS BICEPS VETUS ET NOVA verweisen wir nochmals auf die ausführliche und sehr eingehende Arbeit von A. Pérez de Laborda (1982) und auf die Dissertation von S. Garma (1978).

Anmerkungen

(0) Zunächst möchte ich nach verschiedenen Seiten hin meinen *besten Dank* aussprechen: An P. Alberich Martin Altermatt OCist., Hauterive/Eschenbach, der mich vor einigen Jahren auf das mathematische Werk seines Mitbruders aus der Zeit des Barocks, des Zisterziensers Juan Caramuel y Lobkowitz, hingewiesen hat und durch sein Interesse und seine Ermunterung zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen hat; Prof. C.H. Lohr SJ, Freiburg im Breisgau und Prof. H. Riedwyl, Bern, für ihre Hinweise auf weitere Literatur; Frau Ines Haselbach-Lutz, Frau Nelly Aschinger-Cortés und Prof. G. Aschinger, Freiburg (Schweiz), für ihre Hilfe beim Lesen von spanisch geschriebenen Abhandlungen der Sekundärliteratur; dann ganz besonders dem Altphilologen lic. phil. Mario Somazzi, Bern, der mit mir zusammen fast den gesamten lateinisch geschriebenen Text der KYBEIA und der ARITHMOMANTICA gelesen und dabei laufend übersetzt hat, für sein Interesse, seine überaus sachkundige Hilfe und für die Korrektur einer ersten Reinschrift; schliesslich Frau Louise Wolf-Bächi, Sekretärin am Mathematischen Institut unserer Universität, für die sorgfältige Herstellung der endgültigen Reinschrift, sowie dem Hochschulrat und dem Rektorat der Universität Freiburg (Schweiz), die durch ihre Beiträge einen Teil der Vorarbeiten finanziert haben. — Bevor diese Arbeit in Druck gehen konnte, habe ich eine kurze Zusammenfassung von einigen wesentlichen Zügen von Caramuels Glücksspielrechnung publiziert (R. Ineichen 1999).

(1) Der Satz "Ut in Theologicis..." steht in der MATHEMATICA BICEPS, Bd. II, p. 996.

(2) Caramuel berechnet in der Tat nirgends eine "Wahrscheinlichkeit" im heutigen Sinne, sondern

immer nur die Anzahlen der Gewinn- und der Verlustmöglichkeiten und damit dann die Höhe der Einsätze oder das Verhältnis der Einsätze. Es *könnte* deshalb zu Missverständnissen führen, wenn in diesem Zusammenhang einfach von "probabilidad" (z.B. J. Velarde Lombraña, 1989, p. 158ff.) oder von "cálculo de probabilidades" (z.B. A. Pérez de Laborda, 1990) gesprochen wird. Es geht um "applicazioni della combinatoria alla teoria dei giochi d'azzardo" (D. Pastine, 1975, p. 141), um "teoria de los juegos de azar" (A. Pérez de Laborda l.c.), also eben um Glücksspielrechnung. Doch natürlich gehört diese Glücksspielrechnung heute zu jenem Teil der Mathematik, den man als Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bezeichnen pflegt.

(3) Der *Probabilismus* gibt — nach dem LEXIKON FÜR THEOLOGIE UND KIRCHE (1963) — *eine* Antwort auf die folgende Frage: "Welche sittliche Norm ist zu befolgen, wenn das Bestehen eines Moralgesetzes einem ernsthaften Zweifel unterliegt, der nicht direkt behoben werden kann? Ist die für die Freiheit sprechende Meinung wirklich wahrscheinlich, d.h. liegen triftige positive Gründe für sie vor, dann sieht der *Probabilismus* keine Verpflichtung, selbst wenn die gegenteilige Auffassung wahrscheinlicher ist [...]." (A.M. Mruk, 1963)

Der *Jansenismus* ist eine auf Cornelius Jansen (1585–1683) zurückgehende religiös-sittliche Reformbewegung, vor allem im katholischen Frankreich des 17./18. Jhs., die unter anderem die Befolgung strenger Moralgesetze vertrat. — Caramuels Gegnerschaft zum Jansenismus und sein ganz ausgesprochener Probabilismus wird auch hervorgehoben von L. Ceyssens (1961), der seine Ausführungen über ihn einleitet mit "Antijanséniste et surtout laxiste d'envergure [...]", weiter z.B. auch von C.H. Lohr (1994).

(4) Der DICTIONNAIRE DES AUTEURS CISTERCIENS (1975) spricht — wie auch verschiedene andere Werke — von einem "père originaire de Bohème" und einer "mère qu'on croit frisonne". — D. Pastine (1975, p. 30) hingegen nennt als Vater "un gentiluomo lussemburghese" und als Mutter Catalina di Frisia, "boema, imparentata con la famiglia principesca dei Lobkowitz", ähnlich z.B. auch E. Knobloch (1979).
Die BIBLIOTHECA SCRIPTORUM SACRI ORDINIS CISTERCIENSIS (1644) nennt zwei astronomische Arbeiten von Caramuel, die er schon in seiner *Jugendzeit* verfasst hat: Iuvenis adhuc TABULAS MOTUUM CAELESTIUM et EPHEMERIDES composuit.

(5) Dass Caramuel neben seinen vielen anderen Interessen auch noch grosses Interesse für die Mathematik bekundet hat, mag zunächst überraschen. Man darf indessen folgendes nicht ausser Acht lassen: "Die mit der Renaissance eingeleitete geistige Neuorientierung veränderte auch die Einstellung der Klosterbewohner zu den Naturwissenschaften." Von grosser Bedeutung ist, "dass nun die Realfächer auch für die Mönche akzeptabel wurden, ja für die gelehrten Stiftsherren sogar gleichberechtigt neben die klassischen Disziplinen traten [...]" (H.J. Roth, 1980, p. 173).

(6) Zur Illustration dieser kurzen Hinweise noch die folgenden Zitate: "Er [Descartes] glaubte in der Übertragung einer aus der Mathematik hergeleiteten Klarheit und Evidenz den Geheimschlüssel zur Weisheit Gottes und der Menschen gefunden zu haben, wenn er auch vorsichtig genug war, die mathematischen Erkenntnisse letztlich noch auf Gott zurückzuführen" (E. Fueter, 1938, p. 511).
Und der Schweizer Naturforscher und Universalgelehrte Johann Jakob Scheuchzer (1672–1733) sagt in einem Vortrag "Über den Nutzen der Mathematik für die Theologie": "Deshalb darf man wohl sagen, dass nach Gottes Gnaden und religiösen Übungen vor allem mathematische Studien die Wurzeln der grössten Laster abzuschneiden vermögen und den Menschen vorbereiten, die Wahrheiten der christlichen Religion aufzunehmen und zu verstehen" (zit. nach H. Hubschmid, 1950, p. 40).

(7) An weiteren Publikationen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die nach der Abhandlung von Huygens, aber vor der 1713 postum erfolgten Publikation der ARS CONJECTANDI von Jakob Bernoulli erschienen sind, sind zu nennen: eine fragmentarische Darstellung von Baruch de Spinoza (1687, vgl. dazu J. Dutka, 1953), weiter der Essay von P.R. de Montmort von 1708, dann die Schrift von von Nikolaus Bernoulli von 1709 und schliesslich die Abhandlung von A. de Moivre von 1712. — W. Hauser (1997) geht in seinen Untersuchungen ganz besonders den verschiedenen statistischen und glücksspieltheoretischen Vorstellungen nach, die

schliesslich zu zwei Entwicklungssträngen geführt haben, "die die Wahrscheinlichkeitsrechnung konstituieren".

(8) Zur Frage der Spielverbote im Mittelalter und zum Teil noch in der frühen Neuzeit vgl. z.B. E. Coumet (1970), der den Hauptgrund dafür kurz so umschreibt: ils [les jeux de sort, die Glücksspiele] sont mauvais par nature, car il "profanent le sort". — Und Saint François de Sales (1567–1622) etwa stellt in seiner INTRODUCTION A LA VIE DEVOTE (1619) unter anderem fest, dass ein Gewinn doch der Preis des Fleisses sein sollte, aber beim Glücksspiel sei er "le prix du sort, qui ne mérite nul prix puisqu'il ne dépend nullement de nous" (partie III, Chap. XXXII).

(9) Girolamo Cardano (1501–1576) verwendet in seinem LIBER DE LUDO ALEAE (um 1564, gedruckt 1663) ebenfalls den Ausdruck *aequalitas*: "*aequalitas* = *Gleichheit* wird von Cardano immer wieder als Fachterminus dafür verwendet, dass die Möglichkeit für das Eintreten eines Ereignisses [...] genau so hoch bewertet wird, wie die Möglichkeit für das komplementäre Ereignis" (I. Schneider, 1988, p. 21).

(10) In jedem der drei Lehrsätze berechnet Huygens eigentlich das, was wir heute *Erwartungswert* nennen. Er benützt dafür meistens die Umschreibung "Das ist mir soviel wert" — "Het is my soo veel weerdt". R. Haussner spricht in seiner Übersetzung jeweils vom "Wert meiner Hoffnung" (J. Bernoulli, 1899, Bd. I).
I. Schneider (1996) kommt in einer sehr interessanten kritischen Untersuchung der Beweise, die Huygens in seiner Abhandlung für die drei Lehrsätze gibt, zum Schluss: "In the light of existing interpretations it is especially interesting that the proofs of the two most important propositions in Huygens' 'theory' are wrong. This has never been noticed before. The failure of Huygens' proofs justifies the assumption that the genesis of Huygens' 'theory' of games of chance is independent of the conceptions behind these proofs. [...]" (p. 171/172).
— Heute geht man meistens vom Begriff der Wahrscheinlichkeit aus und definiert dann den Erwartungswert mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit. Diesen Weg konnte Huygens noch nicht gehen.

(11) Spiele mit den Knöcheln haben sich als Kinderspiele in gewissen Gegenden z.B. von Südeuropa, Frankreich und Italien und im Tessin bis ins 20. Jh. hinein erhalten. — Auch in der GESCHICHTSKLITTERUNG von Johannes Fischart (1590) wird das Knöchelspiel noch erwähnt (vgl. Ausgabe von U. Nyssen, 1963 bzw. 1964 im Text p. 248, im Glossar p. 131).
Zu Cardano: "Cardano was the first mathematician to calculate a theoretical probability correctly", schreibt F.N. David (1962, p. 60). In der Tat berechnet Cardano in seinem LIBER DE LUDO ALEAE (um 1564, gedruckt 1663) an einigen Stellen eine *Wahrscheinlichkeit* nach der klassischen Berechnungsart, d.h. als Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl der gleichmöglichen Fälle — allerdings *ohne* von "Wahrscheinlichkeit" und von "günstigen" und "gleichmöglichen" Fällen zu sprechen.

(12) Es mag erstaunen, dass Caramuel hier das *Ballspiel* heranzieht, das für uns doch primär ein Geschicklichkeitsspiel ist, besser vielleicht ein "gemischtes" Spiel mit einer Komponente "Geschicklichkeit" und einer Komponente "Glück". Dazu ist zu sagen: Eines der ganz frühen Teilungsprobleme, das sehr berühmt geworden ist, nämlich jenes von Luca Pacioli (1445–1517) in der SUMMA DE ARITHMETICA GEOMETRIA PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA (1494) wird ebenfalls als Ballspiel formuliert: "Una brigata gioca a palla [...]" (deutscher Text bei I. Schneider, 1988, p. 11). Auch Jakob Bernoulli hat seiner ARS CONJECTANDI in französischer Sprache einen BRIEF AN EINEN FREUND ÜBER DAS BALLSPIEL beigefügt (J. Bernoulli, 1899, Bd. II, p. 108ff.; 1975, p. 260ff.). Er behandelt darin ausführlich zunächst den Fall von zwei gleich gewandten Spielern, dann den Fall, wo sie nicht die gleiche Gewandtheit haben ("quand ils sont d'inégale force"). — "Das PAUME [Jeu de Paume] genannte Ballspiel ist seit dem 13. Jahrhundert bekannt und erfreute sich in den folgenden Jahrhunderten bis zur französischen Revolution grosser Beliebtheit, hauptsächlich in vornehmen Kreisen. [...] Der Name des Spiels rührt davon her, dass der Ball ursprünglich mit der flachen Hand (palma) geschlagen wurde; erst vom 15. Jh. an bediente man sich dazu des Schlägers (racket, raquette)" (R. Haussner in J. Bernoulli, 1899, Bd II, p. 160/161).

(13) Pierre de Carcavi, geb. um 1600 in Lyon, gest. 1684 in Paris; "C. war ein Kommunikationsmittelpunkt seiner Zeit, befreundet mit Fermat, C. Huygens, B. Pascal, korrespondierte mit R. Descartes. Durch seinen Briefwechsel sorgte C. für die Verbreitung Fermatscher Arbeiten und Ideen, hauptsächlich von dessen Eliminierungsmethode und der Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung" (H.J. Ilgauds, 1990).

(14) Wohl zwischen 1588 und 1611 hat Jost Bürgi (1552–1611) aus Lichtensteig (CH) seine Tafeln berechnet, die dann 1620 als ARITHMETISCHE UND GEOMETRISCHE PROGRESSTABULEN [...] erschienen sind. Er hat noch nicht von *Logarithmen* gsprochen, sondern von "roten Zahlen" (das wären die Logarithmen) und von "schwarzen Zahlen" (den Numeri). — 1614 hat der in Schottland geborene John Napier (1550–1617) seine MIRIFICI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO publiziert. — Die ersten Tafeln mit Logarithmen zur Basis 10, also mit dekadischen Logarithmen, sind vom Engländer Henry Briggs (1561–1630) in den Jahren 1617 und 1624 veröffentlicht worden, dann auch, zusammen mit trigonometrischen Tafeln, 1628 und 1633 von Adriaan Vlacq (VLACCUS; 1600?–1667), der gelegentlich auch von Caramuel zitiert wird. (Vgl. dazu W. Kaunzner, 1994.)

(15) G. Bohlmann (1869–1928) hat ein "System von Annahmen und Sätzen", das auch die heute im allgemeinen übliche Definition der (stochastischen) Unabhängigkeit durch die Produktformel umfasst, im Jahre 1901 in einem Enzyklopädieartikel zusammengestellt. — P. Finsler (1894–1970) weist 1947 darauf hin, dass man "nicht einen fehlenden Beweis durch eine Definition ersetzen" kann. Er will aber auch nicht einfach die Produktformel als weiteres Axiom nehmen, sondern hat nach einer einfachen und anschaulichen Beziehung gesucht, die er dann in einem Axiom ausdrückt, das er zu den seit der Publikation von A.N. Kolmogorow (1933) üblichen Axiomen hinzufügt (P. Finsler, 1947).

(16) Christianus Severinus Longomontanus: Der auch unter dem Namen *Longomontanus* bekannte Christian Severin (geb. 1562 in Longberg auf Jütland, gest. 1647), ein dänischer Astronom, war 1588–1597 Mitarbeiter des Astronomen Tycho Brahe (1564–1601) und wurde 1607 Professor für Astronomie und Mathematik an der Universität Kopenhagen. Er vollendete und betreute das Werk von Tycho im umfangreichen Werk ASTRONOMIA DANICA, das er 1622 publizierte (V.E. Thoren, 1929).

(17) Bei der Propositio IV sind irrtümlicherweise die Aufgabenstellung [sumpto...] und die Einleitung zur Lösung [ut igitur...] vertauscht.

(18) Caramuel schreibt hier unter anderem, dass man mit einer *moralis certitudo* — [mit moralischer Gewissheit] erwarten darf, beim Werfen von 100 Würfeln [mindestens] zwei Sechser zu erhalten, dass man aber auch bei 1000 Würfeln keine *certitudo realis* [wirkliche Gewissheit] habe.
Certitudo moralis hat also hier wohl die Bedeutung von "praktisch sicher", "an Sicherheit grenzende Vermutung" u. Ä. — Jakob Bernoulli definiert in der ARS CONJECTANDI von 1713, dass etwas *moralisch gewiss* ist, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt [Moraliter certum est, cuius probabilitas fere aequatur integrae certitudini, sic ut defectus sentiri non possit] (J. Bernoulli, 1975, p. 240). — L. Daston (1989) weist darauf hin, dass man im 17. Jh. nicht mehr von *certitude* (Singular!), sondern von den *certitudes* (Plural!) sprach und dabei unterschied zwischen der *certitude mathématique*, die auf einem Beweis beruht, der *certitude physique*, beruhend auf der Evidenz der sinnlichen Wahrnehmung, und der *certitude morale*, die auf der Aussage eines Zeugen oder auf einer Vermutung beruht. Sie schreibt dazu: "La description précise de ces niveaux a légèrement varié d'un auteur à l'autre, mais l'idée d'une échelle ordonnée, et la conviction que la plupart des choses n'admettent de certitude que morale (c'est-à-dire, le niveau le plus bas) sont presque restées des clichés depuis Hugo Grotius (DE VERITATE RELIGIONIS CHRISTINAE, 1624) jusqu'à John Locke (ESSAY CONCERNING HUMAN UNDERSTANDING, 1690), et après. — Dans ce contexte la signification du mot 'probabilité' a changé, du sens qu'il avait au Moyen Age (avis certifié par une autorité) au sens nouveau (degré d'assentiment proportionnel à l'évidence des choses et des témoins)." Vgl. auch Anm. 24.

(19) Caramuel beschliesst seine Ausführungen mit einigen Bemerkungen zu den fünf Problemata, mit denen Huygens seine Abhandlung beendet, ohne deren Lösungen anzugeben. Caramuel meint, zwei davon hätten überhaupt keine Lösung (was jedoch nicht zutrifft), und verweist im übrigen für die Lösungen auf seine eigenen Ausführungen in Articulus III (p. 980–983): sed omnia possunt ex his, quae resolvimus Articulo III, decidi. Doch hier täuscht sich Caramuel doch sehr im Schwierigkeitsgrad der von Huygens gestellten Problemata! Um dies einzusehen, braucht man bloss die ausführlichen Lösungen und gar nicht immer so einfachen Überlegungen nachzuvollziehen, die Jakob Bernoulli im ersten Teil seiner ARS CONJECTANDI anstellt, wo er ja diese Problemata behandelt.

(20) Frénicle de Bessy, Bernard, geb. um 1605 Paris, gest. 1675 Paris. Seine Bedeutung als Mathematiker liegt vor allem auf dem Gebiet der Zahlentheorie. Er arbeitete auch im Gebiet der Kombinatorik (ABRÈGE DES COMBINAISONS, postum 1693) und publizierte ferner über ein interessantes Spezialgebiet, nämlich über die Konstruktion magischer Quadrate. (H.J. Ilgauds, 1990; E. Knobloch, 1994.)

(21) Girolamo Cardano gibt im 14. Kapitel seines LIBER DE LUDO ALEAE (um 1564, gedruckt 1663) die Wettregel so an: Una est ergo ratio generalis, ut consideremus totum circuitum, et ictus illos, quot modis contingere possunt, eorumque numerum, et ad residuum circuitus, eum numerum comparentur [comparemus?], et iuxta proportionem erit commutatio pignorum, ut aequali conditione certent. — Also etwa: "So gibt es eine *allgemeine Regel*, dass wir nämlich die Gesamtheit der Möglichkeiten betrachten und die Zahl jener Würfe, die zeigt, auf wie viele Weisen sie [die günstigen Resultate] zustande kommen können, und diese Zahl [dann] vergleichen mit dem Rest der Gesamtheit der Möglichkeiten, und *gemäss diesem Verhältnis soll der Einsatz der Pfänder* sein, damit sie [die Spieler] unter den gleichen Bedingungen kämpfen." (R. Ineichen, 1991.)

(22) Clavius, eigentlich *Schlüssel*, Christoph: geb. 1573 Bamberg, gest. 1612 Rom. Jesuit, Professor am Jesuitenkollegium in Rom. Förderte anfangs G. Galilei, war führend an der Gregorianischen Kalenderreform von 1582 beteiligt und publizierte 1574 seine zweibändige Euklidausgabe, die rund 200 Jahre massgeblich blieb und viele Auflagen erlebte (P. Schreiber, 1990).

(23) Die richtigen Lösungen würde man heute mit der Formel für die hypergeometrische Verteilung finden:
— Im Falle, wo von 100 *einer* gewählt wird und man fünf Namen nennen kann, wird man zweckmässig das folgende Urnenschema wählen: Eine Urne mit 100 Kugeln (entsprechend den 100 Namen), darunter genau *eine* rote (entsprechend dem *einen* Namen, der ausgewählt wird). Man führt fünf Ziehungen aus, ohne die gezogene Kugel wieder zurückzulegen. Die gesamte Zahl der möglichen Ziehungen ist die Anzahl der Kombinationen der Länge 5 aus 100 Elementen; wir bezeichnen diese Zahl mit $C(5,\ 100)$. Von diesen sind $C(4,\ 99)$ solche, die die rote Kugel enthalten. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist demnach $C(4,\ 99) : C(5,\ 100)$, also 0.05; oder, um mit Caramuel zu sprechen, der ja noch keine Wahrscheinlichkeiten berechnet, Hoffung und Gefahr verhalten sich wie 5 : 95, d.h. wieder wie 1 : 19.
— Im Falle, wo von 100 *fünf* gewählt werden und man fünf Namen nennen kann, wird man eine Urne mit 100 Kugeln nehmen, darunter genau *fünf* rote. Wieder führt man fünf Ziehungen aus, ohne die gezogene Kugel jeweils zurückzulegen. Von den fünf gezogenen Kugeln soll wenigstens eine rot sein. Nun hat man die Formel für die hypergeometrische Verteilung mehrmals anzuwenden. Wir verzichten hier auf die Darstellung der Rechnung.

(24) Moraliter impossibilis: praktisch unmöglich, sozusagen unmöglich, fast unmöglich. — Jakob Bernoulli definiert in seiner ARS CONJECTANDI, die ja auch gegen Ende des 17. Jhs. entstanden ist: "Moralisch unmöglich [moraliter impossibile] dagegen ist es, was nur so viel Wahscheinlichkeit besitzt, als dem moralisch Gewissen an der vollen Gewissheit mangelt." (J. Bernoulli, 1899, Nr. 108, p. 73, vgl. auch Anm. 18.)

(25) Zur Geschichte der Fachausdrücke der Kombinatorik vgl. R. Haller, 1995.

(26) Über den Probabilismus von Caramuel orientieren selbstverständlich alle in den letzten Jahrzehnten erschienenen und hier zitierten grösseren Arbeiten über Caramuel, so D. Pastine, 1975,

L. Bernardini de Soto, 1977, J. Velarde Lombraña, 1989. Zusätzlich weisen wir hin auf J.R. Armogathe, PROBABILISME ET LIBRE ARBITRE — LA THÉOLOGIE MORALE DE CARAMUEL Y LOBKOWITZ, in L. Pissavino, 1990, p. 35–40.

(27) Die aleatorische Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, d.h. die Interpretation von "Wahrscheinlichkeit" durch den Quotienten aus der Zahl der günstigen Fälle und der Gesamtzahl der gleichmöglichen Fälle, wie dies oft bei Glücksspielen möglich ist, oder durch die relative Häufigkeit aus einer genügend langen Serie von Versuchen, steht in vielen Lehrbüchern derart im Vordergrund, dass der epistemische Aspekt kaum zur Geltung kommt. Dabei kann man ja auf diesen epistemischen Aspekt im Grunde genommen gar nicht ganz verzichten. Auch für "epistemische Wahrscheinlichkeiten" kann man numerische Werte gewinnen: Man misst den Grad der Überzeugung, der Glaubwürdigkeit, mit Hilfe des Begriffes der *Wette*. Je fester eine Person vom Eintreffen (vom Zutreffen) von A überzeugt ist, desto grösser ist ihr Einsatz E in einer Wette, wo sie insgesamt G erhält, wenn A eintritt (wenn A zutrifft). Der *Wettquotient* E/G wird — unter gewissen zusätzlichen Bedingungen — als *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreffen bzw. Zutreffen von A betrachtet. — Übrigens schreibt bereits Immanuel Kant (1724–1804) in seiner KRITIK DER REINEN VERNUNFT, im Abschnitt "Vom Meinen, Wissen, Glauben": "Der gewöhnliche Probierstein, ob etwas blosse Überredung oder wenigstens subjektive Überzeugung, d.h. festes Glauben, sei, was jemand behauptet, ist das Wetten."

Verwendete Literatur

Nachschlagewerke

Bibliotheca Scriptorum Sacri Ordinis Cisterciensis. Opere et studio Caroli de Visch. Duaci MDCXLIX: Officina Ioannis Serrvrier.

— *Auctarium D. Caroli de Visch ad Bibliothecam Scriptorum S.O. Cisterciensis.* Editum a Fr. Joseph M. Canivez O.C.R. Brigantii 1927: Typis J.N. Teutsch.

Catholicisme hier — aujourd'hui — demain. Encyclopédie en sept volumes, dirigée par G. Jacquemet, t. 2. Paris 1949: Letouzey et Ané.

Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Ed. by I. Grattan-Guiness. 2 Bde. London and New York 1992: Routledge.

Dictionnaire des auteurs cisterciens. Sous la direction de E. Brouette, A. Dimier, E. Manning. Rochefort 1975: Abbaye Notre-Dame de St. Rémy.

DSB — Dictionary of Scientific Biography. Ed. Ch. Gillipsie. New York 1970/80: Scribner's Sons.

Lexikon bedeutender Mathematiker. Hrsg. S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote. Leipzig 1990: Bibliograph. Institut.

Lexikon für Theologie und Kirche. Hrsg. J. Höfer und K. Rahner. Bd. 8 bzw. Bd. 2. Freiburg 1963 bzw. 1994. Herder.

Neues Lexikon der christlichen Moral. Hrsg. H. Rotter und G. Virt. Innsbruck-Wien 1990: Tyrolia-Verlag.

Wetzer und Welte's Kirchenlexikon. Freiburg 1883: Herder.

Benützte Werke von Juan Caramuel y Lobkowitz

Mathesis audax. Lovanii MDCXLIV: A. Bouvet.

Mathesis biceps — vetus et nova. Campaniae MDCLXX: Officina episcopalis.

Apologema pro antiquissima et universalissima doctrina de probabilitate. Lugduni MDCLXIII: L. Anisson.

Theologiae moralis fundamentalis liber primus. Lugduni MDCLXXVI: Officina Anissonia.

Sekundärliteratur

Alfonso el Sabio (1283 bzw. 1941): Libros de Acedrex, Dado e Tablas — Das Schachzabelbuch König Alfons des Weisen. A. Steiger, Ed. Zürich-Erlenbach: Rentsch.

Arnauld, A., Nicole, P. (1662 bzw. 1965): La Logique ou l'Art de penser. Edition critique par P. Clair et F. Gibral. Paris: Presses universitaires de France.

Bellhouse, D.R. (1991): The Genoese Lottery. Statistical Science 6, 2, 141–148.

Bernardini Soto, L. (1977): Recenti tentativi di rivalutazione del probabilismo catolico del seicento. Sapienza — Rivista internazionale di Filosofia e di Teologia XXX, 197–214.

Bernoulli, J. (1713 bzw. 1899): Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Übersetzt von R. Haussner. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107 und 108. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Bernoulli, J. (1713 bzw. 1975): Ars conjectandi. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden. Basel: Birkhäuser.

Bernoulli, N. (1709 bzw. 1975): De Usu Artis Conjectandi in Jure. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden. Basel: Birkhäuser.

Biermann, K.-R. (1965): Aus der Entstehung der Fachsprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Forschungen und Fortschritte 39, 5; 142–144.

Bohlmann, G. (1901): Lebensversicherungs-Mathematik. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, Teil 2, Artikel I D 4b. Leipzig 1898–1904: Teubner.

Brouillard, R. (1949): Caramuel y Lobkowitz. In: Catholicisme hier — aujourd'hui — demain, t. 2, 528.

Cantor, M. (1898): Politische Arithmetik oder Arithmetik des täglichen Lebens. Leipzig: Teubner.

Cantor, M. (1913): Geschichte der Mathematik, Bd. 2. Leibzig: Teubner.

Cardano, G. (1564 bzw. 1663): Liber de ludo aleae. In: Hieronymi Cardani Opera omnia, t. 1. Lugduni MDCLXIII: Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marconi Antonii Ravaud. Reprint 1966: Stuttgart: Frommann. — Englische Übersetzung in *Ore, O.* (1953): Cardano, The Gambling Scholar. Princeton N.J.: Princeton University Press.

Ceyssens, L. (1961): Autour de Caramuel. Bulletin de l'Institut Historique Belge de Rome. Fsc. XXXIII, 329–410.

Coumet, E. (1970): La théorie du hasard est-elle née par hasard? Annales ESC 1970, 574–598.

Czuber, E. (1899): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Leipzig: Teubner.

Czuber, E. (1914): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bd. 1. Leipzig: Teubner.

Daston, L. (1988): Classical Probability in the Enlightenment. Princeton J.N.: Princeton University Press.

Daston, L. (1989): L'interprétation classique du calcul des probabilités. Annales ESC 1989, 715–731.

David, F.N. (1962): Games, Gods and Gambling. London. Griffin.

Deman, Th. (1933): Probabilis. Revue des Sciences philosophiques et théologiques 22, 260–290.

Diéguez, D.F. (1919): Juan Caramuel. Revista matemática hispano-americana 1, 121–127 und 178–189.

Dutka, J. (1953): Spinoza and the theory of probability. Scripta Mathematica XIX, 24–33.

Edwards, A.W.F. (1982): Pascal and the problems of points. International Statistical Review 50, 259–266.

de Fermat, P. (1654 bzw. 1894): Oeuvres de Fermat. Publiées par les soins de Paul Tannery, t. 2. Paris: Gauthier-Villars.

Finsler, P. (1947): Über die mathematische Wahrscheinlichkeit. Elemente der Mathematik 2, 108–114.

Fischart, J. (1590 bzw. 1963/64): Geschichtsklitterung (Gargantua). Text der Ausgabe von 1590. Mit einem Glossar herausgegeben von *U. Nyssen.* Düssseldorf: Karl Rauch.

Fueter, E. (1938): Das Jahrhundert der Mathematik (1650-1750). Comité international des Sciences historiques; VIIIe Congrès international des Sciences historiques Zürich 1938; Résumés II, 510–513. Paris: Presses universitaires de France.

Gardeil, A. (1911): La certitude probable. Revue des Sciences philosophiques et théologiques 21, 35–53.

Garma, S. (1978): Las Aportaciones de Juan Caramuel al nacimiento de la matematica moderna. Tesis doctoral, Valencia.

Givsan, H. (1990): Wozu Historie? — Fragen zur Geschichtsschreibung der Wissenschaften. In: *Spalt D.* (Hrsg.): Rechnen mit dem Unendlichen. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.

Hacking, I. (1975): The emergence of Probability. London: Cambridge Univesity Press.

Haller, R. (1995): Permutation, Kombination, Variation — zur Herkunft der Termini und Formeln. Didaktik der Mathematik 1995, 310–319.

Hauser, W. (1997): Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung — Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace. Boethius — Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften Bd. 37. Stuttgart: Franz Steiner.

Hubschmid, H. (1950): Gott, Mensch und Welt in der schweizerischen Aufklärung. Diss. Bern. Affoltern a.A.: Weiss.

Huygens, Chr. (1657): De ratiociniis in ludo aleae. In: *Frans van Schooten*, Exercitationum mathematicarum libri quinque, Liber V. Leiden: Ex officina Johannis Elsevirii. — Der lateinische Text findet sich auch in: *J. Bernoulli* (1975), Ars conjectandi; deutsche Übersetzung in *J. Bernoulli* (1899). – Die holländische Fassung, Van Rekeningh in Spelen van Geluck, stammt von 1656 (erschienen 1660); sie ist mit der französischen Übersetzung enthalten in *Oeuvres complètes de Chr. Huygens*, t. XIV, La Haye 1920, Nijhoff.

Ilgauds, H.J. (1990): Carcavi, Pierre de, 1600-1684. In: Lexikon bedeutender Mathematiker, 89.

Ilgauds, H.J. (1990): Frénicle de Bessy, Bernard, 1605–1675. In: Lexikon bedeutender Mathematiker, 157.

Ineichen, R. (1987): Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik. Elemente der Mathematik 42, 69–75.

Ineichen, R. (1988): Dante-Kommentare und die Vorgeschichte der Stochastik. Historia Mathematica 15, 264–269.

Ineichen, R. (1991): Über das Würfelproblem von de Méré. Didaktik der Mathematik 1991, 1–14.

Ineichen, R. (1993): Zur Mathematik in den Werken von Albertus Magnus — Versuch einer Zusammenfassung. Freiburger Zeitschrift für Philosophie und Theologie 40, 55–87.

Ineichen, R. (1996): Würfel und Wahrscheinlichkeit — Stochastisches Denken in der Antike. Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Ineichen, R. (1998): Abhängige und unabhängige Ereignisse. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; Annotationes historicae 3/98, 69–70.

Ineichen, R. (1999): Juan Caramuels Behandlung der Würfelspiele und des Zahlenlottos. NTM — Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 7.

Kaulen, F. (1883): Caramuel y Lobkowitz, Johannes. In: Wetzler und Welte's Kirchenlexikon, Bd. 2, 1933–1936.

Kaunzner, W. (1992): Logarithms. In: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Bd. 1, 210–228.

Knobloch, E. (1979: Musurgia universalis: Unknown combinatorial studies in the age of baroque absolutism. Hist. Sci. XVII, 258–275.

Knobloch, E. (1994): Combinatorial probability. In: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Bd. 2, 1286–1292.

Kohli, K., van der Waerden, B.L. (1975): Bewertung von Leibrenten. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden. Basel: Birkhäuser.

Leibniz, G.W. (1703): Explication de l'Arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 et 1 [...]. Mémorial de l'Académie des Sciences 1703. In: *Leibniz, G.W.*, Mathematische Schriften. Hrsg. von C.I. Gerhardt. Bd. VII, Halle 1863. Reprint: New York 1971: Olms.

Leibniz, G.W. (1714 zw. 1887): Die philosophischen Schriften. Hrsg. von C.I. Gerhardt; Bd. 3. Berlin: Widmann. Reprint: Hildesheim- New York 1978: Olms.

Leibniz, G.W. (1971): Mathematische Schriften. Hrsg. von C.I. Gerhardt; Bd. III/2, Halle 1856. Reprint: Hildesheim-New York 1971: Olms.

Lhôte, J.-M. (1994): Histoire des jeux de société. Paris: Flammarion.

Lohr, C.H. (1994): Caramuel y Lobkowitz, Juan. In: Lexikon für Theologie und Kirche, Bd. 2, 941.

de Moivre, A. (1712): De Mensura Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus. Phil. Trans. 27, 213–264. Reprint: New York 1963: Johnson Reprint Corporation.

de Montmort, P.R. (1708 bzw. 1713): Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard. Paris: Quillau. Reprint: New York 1980: Chelsea.

Mruk, A.M. (1963): Probabilismus. In: Lexikon für Theologie und Kirche, Bd. 8, 777–778.

Müller, I. (1971): Geschichte der Abtei Disentis. Einsiedeln. Benziger.

Pascal, B. (1654 bzw. 1665, 1954): Oeuvres complètes. Texte établi, présenté et annoté par J. Chevalier. Paris: Gallimard.

Pastine, D. (1975): Juan Caramuel — Probabilismo ed Enciclopedia. Firenze: la nuova Italia Editrice.

Pérez de Laborda, A. (1990): Caramuel y el cálculo matemático. In: *Pissavino, L.* (1990), 67–89.

Pissavino, L. (1990) (Ed.): Le meraviglie del probabile. Juan Caramuel 1606–1682; atti del convegno internazionale di studi (1982). Vigevano: Comune di Vigevano.

Roth, H.J. (1980): Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Medizin bei den Zisterziensern. In: Die Zisterzienser — Ordensleben zwischen Ideal und Wirklichkeit. Bonn: Rheinland-Verlag in Komm. bei Rudolf Habelt Verlag; 171–177.

Saint François de Sales (1619 bzw. 1911): Introduction à la vie dévote. Nouvelle édition d'après celle de 1619. Annecy: J. Abry.

Schneider, A. e.a. (Hrsg.) (1974): Die Cistercienser — Geschichte, Geist, Kunst. Köln: Wienand Verlag.

Schneider, I. (1976a): The Introduction of probability in Mathematics. Historia Mathematica 3, 135–140.

Schneider, I. (1976b): Wahrscheinlichkeit und Zufall bei Kepler. Philosophia naturalis 16, 40–63.

Schneider, I. (1988): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Schneider, I. (1996): Christiaan Huygens' non-probalistic approach to a calculus of games of chance. De zeventiende eeuw 12, 171–185.

Schreiber, P. (1990): Clavius, Christoph, 1537–1612. In: Lexikon bedeutender Mathematiker, 107.

Semrau, F. (1910): Würfel und Würfelspiel im alten Frankreich. Beiheft zur Zeitschrift für Romanische Philologie 23. Halle a.d.S.

Spinoza, Baruch de (1687 bzw. 1920/1982): Reeckening van Kanssen. s'Gravenhage: van Dyck. — Französische Übersetzung in *Huygens, Chr.*, Oeuvres complètes, t. 14, p. 29–31. La Haye 1920: Nijhoff. — Deutsche Übersetzung in: *H.-Chr. Lucas, M.J. Petry* (Hrsg.) Algebraische Berechnung des Regenbogens; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Hamburg 1982: Felix Meiner.

Tauber, W. (1987): Das Würfelspiel im Mittelalter und in der frühen Neuzeit. Bern: Peter Lang.

Thoren, V.E. (1929): Severin, Christian, 1562–1647. In: DSB XII, 332.

Todhunter, I. (1865): A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace. Cambridge: Macmillan. Reprint New York 1949: Chelsea Publishing Company.

Velarde Lombraña, J. (1989): Juan Caramuel, Vida y Obra. Oviedo: Pentala Ediciones.

Wieleitner, H. (1911): Geschichte der Mathematik. II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jhs. 1. Hälfte: Arihmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: Göschen.

de Witt, J. (1671): Waerdye van Lyf-Renten. s'Gravenhage: Jacobus Scheltus. In: Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3. Bearbeitet von B.L. van der Waerden. Basel 1975: Birkhäuser.

Wussing, H. (1985): Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). In: *Wussing, H., Arnold, W.* (1985): Biographien bedeutender Mathematiker. Köln: Aulis Verlag Deubner, 206–226.