Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 89 (2000)

Heft: 2

Artikel: Virtuelle Welten aus dem Hochleistungsrechner : Hilfe für die reale Welt

Autor: Bulirsch, Roland

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-308809

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Virtuelle Welten aus dem Hochleistungsrechner – Hilfe für die reale Welt

Roland BULIRSCH*
Lehrstuhl Numerische Mathematik,
Technische Universität München

Schickard und Legendre

Zukunft hat eine lange Vergangenheit, uralte rabbinische Weisheit.

An den *berühmtesten und vortrefflichsten Herrn Kepler in Linz, clarissime et excellentissime domine Keplere,* steht auf dem Brief aus Tübingen. Ein Gelehrter teilt dem lieben Freund in Linz mit, daß er eine Maschine konstruiert habe, die Zahlen automatisch zusammenrechnet: addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. *Du würdest lachen*, schreibt er – in Latein , wie es sich damals gehörte – *wenn Du erlebtest, wie sie die Stellen, wenn es über Zehner oder Hunderter geht, von selbst erhöht.*

September 1623, die erste funktionierende Rechenmaschine der Welt, gut 370 Jahre ist es her.

Der Tübinger Gelehrte, ein Theologe, Diakon, ist Professor für Hebräisch, die heilige Sprache, für Martin Luther die Sprache aller Sprachen. Der Gelehrte: Wilhelm Schickard; er kennt auch das Arabische, hat Teile des Koran übersetzt und arabische Fachliteratur; er spricht Aramäisch (Chaldäisch), Syrisch. Schickard ist dazu Astronom, entwickelt eine mathematische Theorie zur Mondbahnberechnung, und er ist Landvermesser, mit der Neuvermessung des Herzogtums Württemberg beschäftigt. Schickard ist auch ein talentierter Künstler, fertigt Radierungen, Holzschnitte, Ölbilder. In Wilhelm Schickard waren Naturwissenschaften, Geisteswissenschaften und Kunst verschmolzen, und er war einer der ersten Ingenieure.

Kepler und andere Große haben Schickard hoch geschätzt. Ein ausländischer Kollege rühmt ihn : *Siehe, nicht die Hälfte war mir mitgeteilt worden; du übertriffst an Weisheit und Güte die Kunde, die ich vernommen habe.* Worte aus dem Alten Testament. Die Königin von Saba hat sich so von König Salomo verabschiedet.

* Unter Mitwirkung von Privatdozent Dr.-Ing. Rainer Callies

Bull. Soc. Frib. Sc. Nat. – Vol. 89/2 (2000) p. 96–110

Schickards Rechenmaschine muß damals ein kleines Wunderwerk gewesen sein. Nichts ist davon übrig geblieben. Der Dreißigjährige Krieg hat alles vernichtet, auch das zweite, für Kepler vorgesehene Exemplar der Maschine ist verbrannt. Man hat von Schickard, dem es schlimmer erging als dem Hiob der Bibel, kaum Notiz genommen, nie war Schickard, Genie aus dem schwäbischen Herrenberg, Vorbild gewesen, die allermeisten aus dem akademischen Bereich kennen nicht einmal seinen Namen. Schickard war vergessen.

Vor 40 Jahren, um 1960, ist Schickards Maschinchen nachgebaut worden nach erhaltenen Skizzen und Schickards Anweisungen für den Mechaniker, und daß man überhaupt etwas über die Schickardsche Rechenmaschine erfahren hat, verdankt man der Arbeit der Kepler Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Das Mitglied der Kommission, Dr. Franz Hammer, hat 1935 in St. Petersburg im Nachlaß Keplers die Zeichnung und mehr gefunden, die Schickard an Kepler gesandt hat.

Diese Bayerische Akademie der Wissenschaften hat gerade in ihrem Leibniz-Rechenzentrum in München den größten Rechner Europas installiert. Der Rechner, eine japanische Maschine, ist einer der größten der Welt; nur drei Rechner, als Spezialanfertigungen für das Militär. sind noch größer. Aber auch dieser große Rechner kann im Grunde nur Zahlen addieren, ausgedrückt durch Schaltzustände in den kleinsten Bauteilen der Maschine: entweder es fließt Strom oder nicht, Spannung ist da oder nicht. Eine Addition im Zahlensystem der Maschine: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$.

Ganze Reihen solcher einfachen Additionen sind im Rechner zusammengefaßt zu Bündeln, dann kann man mehr, vielstellige Zahlen addieren; noch mehr wird gebündelt, dann kann man Multiplizieren, Dividieren. Auch die äußerst verwickelten inneren Organisationsabläufe in der Maschine lassen sich auf Additionen zurückführen. Kunst des Programmierens: hochkomplexe Vorgänge der Welt zurückführen auf lange Ketten von elementaren Rechenoperationen. Die neue Maschine kann viel: in jeder Sekunde 1,3 Billionen zehnstellige Zahlen addieren oder multiplizieren. Setzt man für die Addition oder Multiplikation von 2 Zahlen eine Sekunde an, bräuchte man 40 000 Jahre, eine Billion Sekunden. In der Zeit des Neandertalers hätte man anfangen müssen zu rechnen, um das zu erhalten, was die Maschine in einer einzigen Sekunde liefert. Der Rechner versorgt ganz Bayern und darüber hinaus auch Deutschland. Eine schnelle Leitung, 155 Mbit/sec., geht nach Erlangen-Nürnberg, dem zweiten Zentrum Bayerns: 16 bis 19 Bücher à 300 Seiten oder 4 1/2 Bibeln könnten in jeder Sekunde übertragen werden.

Der Großrechner besteht eigentlich aus 900 kleinen Rechnern, die in 8er Gruppen arbeiten. 112 solcher Gruppen gibt es. Jeder dieser 900 kleinen Rechner verarbeitet 1,5 Milliarden Zahlen in der Sekunde. 1,5 Milliarden Sekunden, das sind 50 Jahre.

Aber wer braucht schon 1,3 Billionen Zahlen? Die Zeit von der Erschaffung unserer Welt bis heute würde nicht ausreichen, solche unvorstellbaren Mengen von Zahlen mit Geräten zu messen und in die Maschine einzuspeisen. Aber es ist alles ganz anders. Um die hochkomplexen Vorgänge der Wirklichkeit nachbilden zu können, erzeugt sich die Maschine die Zahlen selbst.

1825 veröffentlicht Legendre, der große Franzose, Ritter der Ehrenlegion, Mitglied der Pariser Akademie, seine Abhandlungen über elliptische Funktionen und Eulersche Integrale. Sie tauchen bei Beschreibungen vieler Naturvorgänge auf: Bei der Bewegung eines Pendels, beim Kreiselkompaß, bei Störungen der Planetenbahnen, bei der Durchbiegung von Bauträgern; man begegnet ihnen jeden Tag, wenn man mit dem Rührer Schlagrahm macht, staubsaugt, oder im Krankenhaus im Kernspintomographen liegt und Kopf und Gehirn nach Tumoren abgetastet werden, die starken Magnetfelder im Tomographen werden durch diese Funktionen beschrieben. Auf Kinderspielplätzen und Trainingsstätten für Boxer kann man diese Funktionen sogar sehen: beim Seilhüpfen nimmt das Seil die Gestalt dieser Funktionen an. Legendre weiß das alles nicht, aber ein genialer mathematischer Instinkt weist ihm den Weg – in Frankreich gibt es in vielen Städten eine Rue Legendre, sogar manche Schnapswirte wissen dort, wer Legendre war. Man frage einmal in Deutschland herum, nach einem großen deutschen Mathematiker.

In Legendres Buch findet sich eine Zahlentafel mit 16 000 Zahlenwerten für diese Integrale. Legendre hatte für die Rechnungen 20 Jahre gebraucht, 20 Jahre mühseligster Arbeit. Diese Zahlentafeln, eine Art Telefonbuch ohne Namen nur mit Nummern, waren früher für Wissenschaft und Technik unendlich wichtig. Die Zahlenbeziehungen der Tafel lassen sich auch in Bilder umsetzen, und das sieht dann so aus.

Wir ahmen Legendre nach und setzen seine Formeln in ein Computerprogramm um, das ist ein in einer formalen Sprache nach strengen Regeln verfaßter Text. Zur Herstellung des Textes ist eine genaue Kenntnis der zugrundeliegenden Mathematik nötig, die Maschine könnte uns da nicht helfen. Der Text enthält den Algorithmus, das ist der Befehlsablauf für die Maschine, wie sie die Integrale berechnen soll. Die Maschine beginnt. Wir müssen nicht lange warten. Nach 37 Tausendstel Sekunden ist sie fertig! Nur das Ausdrucken der mehr als 16.000 Zahlen dauert länger. 20 Jahre Fronarbeit in den winzigen Bruchteil einer Sekunde komprimiert!

Der Computer hat Legendre und überhaupt die ganze Mathematik überflüssig gemacht. Man hört das hierzulande oft. Das Gegenteil ist richtig. Noch nie in ihrer dreitausendjährigen Geschichte war Mathematik und ihre Tochter Informatik so wichtig wie heute. Rückgrat der modernen Technik sind sie.

Hochtechnologie ist im wesentlichen mathematische Technologie, heißt es in Amerika. *Die mathematischen Wissenschaften sind still und leise, von den meisten unbemerkt, zu Schlüsseltechnologien der modernen Internet-Gesellschaft geworden,* stellte man überrascht im Leitartikel einer überregionalen Zeitung fest

Aber rabbinischer Weisheit eingedenk, daß Gegenwart und Zukunft eine lange Vergangenheit haben, tauchen wir noch einmal in vergangene Jahrhunderte ein.

Dürer und die Perspektive

In der Renaissance entdeckte die Kunst die Geometrie; längst verschüttete mathematische Dogmen architektonischer Vollkommenheit wurden damals wieder ausgegraben. Die großen Baumeister der Renaissance waren überzeugt, daß die sichtbare Welt, dort, wo sie sich in geometrisch vollendeter Kirchenarchitektur zeigt, die metaphysische Welt erschließt.

Keiner lese mich, in meinen Werken, der nicht Mathematiker ist. ... Leonardo da Vinci sprach so von sich. Leonardos visionärer Blick erweckt immer wieder Bewunderung. Der andere Große, Raffael, sieht sich mehr als Geometer denn als Maler. In seiner *Schule von Athen* feiert er die Geometrie, zeigt uns Philosophen, Geometer und stellt sich selbst zur Gruppe der Geometer rechts im Bild.

Die Renaissance und das «neue Sehen». Die Wiederentdeckung der mathematischen Perspektive: man schreibt sie Brunnelleschi und Piero della Francesca zu, und Peruginos Bild von 1481 war den Künstlern Vorbild. Unerhörte Vollkommenheit sehen wir in Michelangelos Deckenfresken der Sixtina. Die Dynamik in der Bewegung der Figuren wird auch durch die meisterhaft verwendete, ständig wechselnde Perspektive der Bilder im Fresko erzeugt; die Propheten und Sibyllen steigen beinahe körperlich von der Decke herab. Das alles gemalt auf schwierigstem Hintergrund, einer ungleichmäßig gewölbten Decke, Michelangelo mußte mehr oder weniger verzerrt malen, damit es von unten vollkommen natürlich erscheint. Das Genie wußte neben so vielem auch um alle geometrischen Gesetze. Es schuf in der Sixtina ein menschliches Universum, das bis auf den heutigen Tag tief berührt, ein grandioser menschlicher Kosmos in einer virtuellen Welt. Die Bewältigung schwierigster perspektivischer Darstellungen weist die großen Meister der Renaissance als eminente Wissenschaftler aus. In den Notizen Leonardos, Raffaels, und in den wenigen von Michelangelo – er hat fast alles verbrannt – finden sich immer wieder mathematische Formeln, Berechnungen. Geometrie als Teil ihrer Kunst.

Aber die italienischen Künstler hüteten das Wissen um die neu entdeckte Perspektive als Geheimnis. Aus Venedig schreibt (1506) Albrecht Dürer, Freund Raffaels, dem Willibald Pirckheimer in Nürnberg, ... *werde ich nach Bologna reiten, um der Kunst in geheimer Perspektive willen, die mich einer lehren will. ... Dananch will ich mit dem nächsten Boten kommen.* Geometrie ist für Dürer Offenbarung der Naturgesetze. Einer, der nicht Algebra und Geometrie beherrscht, sowie alles, was man über Astronomie und Naturwissenschaften lernen kann, ist für ihn kein ganzer Maler. Den Johannes Müller aus dem unterfränkischen Königsberg, einen Erneuerer der Mathematik der Renaissance, studiert er sorgfältig. Die Welt kennt ihn als *Regiomontanus*. Columbus und Amerigo Vespucci sollen nach den Sternkarten des Regiomontanus gesegelt sein. Die Schriften eines anderen Großen liest Dürer mit entzückter Verblüffung.

Berühmt war er schon zu Lebzeiten, *Nikolaus von Kues* aus Bernkastell an der Mosel, *Cusanus, Kardinal Nikolaus von St. Peter in den Ketten.* Giordano Bruno, der große Italiener und Rebell – seiner Verbrennung vor 400 Jahren hat man gerade gedacht – rühmt den Cusaner ... *daß er dem Pythagoras nicht gleich sei, sondern ein Größerer. .. ...*, In seiner Schrift *De mathematica perfectione*, von der mathematischen Vollendung, bekennt der Kardinal *Mathematische Einsichten führen uns zum beinahe absolut Göttlichen und Ewigen.* Mit Kurven- und Flächenmessung hat er sich beschäftigt, Cusanus, beinahe die Integralrechnung erfunden, 250 Jahre vor dem großen Leibniz. *Göttlicher Leibniz,* heißt ihn der nüchterne und skeptische Golo Mann. Und wer wollte auch widersprechen.

In Nürnberg packt Albrecht Dürer alle seine Erkenntnisse über das neue Sehen in sein Werk *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt....* Und dem Willibald Pirckheimer schreibt er: *Dieweil aber dies die eigentliche Grundlage aller Malerei ist, habe ich mir vorgenommen ... eine Grundlage zu schaffen ...* um *daraus die rechte Wahrheit* zu *erkennen. ... ... gar leicht verlieren sich die Künste, ... schwer nur ... werden sie wieder erfunden. ... Und habe ich Euch dieses Büchlein aus besonderer Zuneigung und freundlicher Absicht zugeschrieben. ...* Dürer hatte sein Buch mit Herzblut geschrieben, schätzte es höher als seine Kunstwerke.

Die Renaissance war eine große Zeit für die Mathematik auch im Heiligen Römischen Reich Deutscher Nation. In Augsburg erscheinen Bücher über Mathematik; sogar die Fugger interessierten sich dafür, zeichneten als Herausgeber der Werke des Euklid. In der Benediktinerabtei St. Ulrich und Afra verfaßt der gelehrte Mönch Vitus Rechenanleitungen: In seinen deutschen Texten aus dem Jahre 1500 erscheint das lateinische Wort *computus, computj, (computieren)*; 470 Jahre später taucht es in Deutschland wieder auf, jetzt aber mit angelsächsischer Betonung: *Computer.*

Wie perfekt die großen Maler der Renaissance die geometrischen Gesetze der Perspektive beherrschten, sehen wir am Bild *Die Botschafter,* einem Meisterwerk des Augsburger Hans Holbein d. Jüngeren aus seiner Londoner Zeit. Das Bild, den französischen Botschafter Jean de Dinteville und den Bischof von Lavour Georges de Selve zeigend, steckt voller Symbolik: Hier mathematisch-astronomische Instrumente als wesentliche Hilfsmittel zur Erkenntnis der Welt; da Peter Apians deutsches *Lehrbuch einer Arithmetik für Kaufleute*, aus Leipzig; das Bild wurde 1534 in London gemalt. Neben dem französischen Bischof des Johannes Walthers protestantisches Gesangsbuch aus Wittenberg, aufgeschlagen die Seite mit dem deutschen Lied *Komm heiliger Geist.* Das war kein Zufall: der französische Bischof war tief bekümmert über die Glaubensstreitereien in Deutschland – es war die Zeit der Reformation – und er hatte die Deutschen angefleht, sie möchten ihre Differenzen beiseite lassen und heimkehren zu den anderen Christen. Zwischen den beiden Figuren ein längliches Etwas, noch vor zweihundert Jahren hatte man darüber gerätselt. Es ist ein perspektivisch verzerrter Schädel; im Rechner kann man die Verzerrung rückgängig machen, Mathematiker sagen, man wendet auf das Gebilde die inverse Abbildung an. Das Ergebnis sehen Sie hier. Ein perfekt gemalter Schädel, des jungen Holbein vollkommene Kenntnis der Malerei und erstaunliches Wissen um Mathematik offenbarend*.

Kunst der Perspektive offenbart sich auch im Freskenwerk des Cosmas Damian Asam, jenen berühmten Kuppelbildern in bayerischen Kirchen, wie hier in Maria de Victoria in Ingolstadt. Der Maler Asam besaß eine genaue Kenntnis der geometrischen Abbildungsgesetze, er hatte – um 1690 – Andrea Pozzos Lehrbuch über Perspektive genau studiert.

Bis in unsere Tage teilten große Maler Dürers Begeisterung für streng rationale Wissenschaften. Von Salvador Dalís Verehrung Raffaels und Dalís Neigung zur Geometrie weiß man. Man kennt Wassily Kandinskys Ausspruch: ... *Es kann alles als eine mathematische Formel ... dargestellt werden.* Paul Klee war sogar überzeugt, daß es eine mathematische Grundlage aller Daseinsbereiche gibt. Die *Cardinal-Progression* (Folge 1,2,4,8,16,...) hatte es ihm besonders angetan, und er setzte sie in seine Bilder.

Aber was kann uns das alles bedeuten, was kann uns heute Dürer bedeuten, der seit 500 Jahren tot ist? Uns, die wir im Computerzeitalter leben und uns so klug glauben. Jeder Rechner geht bei der perspektivischen Bilderzeugung wie Dürer vor, die Maschine kann es nur schneller als Dürer, unendlich viel schneller. Verwöhnt, verzogen, wie wir sind, sehen wir Erkenntnisse der Wis-

* Siehe: Holbein's Ambassadors i Susan Foister, Ashok Roy and Martin Wyld. The National Gallery, London 1997.

senschaft, Erkenntnisse, um die jahrhundertelang gerungen wurde, als größte Selbstverständlichkeit an. *Schämen sollten sich die Leute,* meinte Albert Einstein zu solcher Haltung.

Bilderzeugung im Rechner

Die neue Archäologie, virtuelle Reisen in die Vergangenheit ist der Titel eines neuen Buches[1]. Man sieht die Überreste antiker Kulturen, vertraute Bilder, und daneben Rekonstruktionen dieser Bauwerke – im Rechner erzeugt. Sehen wir einige an.

Virtuelle Welten[2]. Der Bildgeber, Bilderzeuger ist der Rechner, und mit Hilfe der Mathematik lassen sich Bilder der Wirklichkeit berechnen. Das weiß man seit langem, half freilich wenig, weil mathematische Strukturen kaum sichtbar gemacht werden konnten. Die Natur ist geizig bei der Schaffung von Michelangelos. Heute baut der elektronische Rechenautomat. Aber wie macht er das?

Cluny, das große Kloster in Burgund mit seiner gewaltigen fünfschiffigen Kirche, über 200 Meter lang war sie und 7 große Türme hatte sie, war in der französischen Revolution zerstört worden. Im Rechner wurde die Kirche wieder aufgebaut, Cramer und Koob haben es in einem Buch dokumentiert: Ein Drahtmodell wird erstellt, die Formen zurückgeführt auf regelmäßige Grundkörper der Geometrie und durch Vereinigung und Verschneidung neue Formen gebildet. Einzelne Bauteile werden zu Bauteilgruppen zusammengefaßt, Stützen, Arkaden, Untergarden, Obergarden. Und dann wird «zusammengebaut», nach alten, erhalten gebliebenen Plänen.

Die schnellen Rechenautomaten haben es möglich gemacht, Beziehungen zwischen Zahlen schnell aufzulösen. *Numerische Simulation* nennt es der Fachmann; man versteht darunter die explizite Lösung mathematischer Gleichungen und ihre Umsetzung in Bilder auf Rechnern nach den Gesetzen der Darstellenden Geometrie, von immenser Bedeutung für die moderne Wirtschaft, für Schlüsselindustrien wie den Automobil- und Flugzeugbau, die Raumfahrt, die Elektro- und Chemieindustrie. Fortschritte in der industriellen Produktion und Forschung sind ohne numerische Simulation nicht mehr vorstellbar. Die zur Bildherstellung erforderlichen Rechenleistungen sind sehr groß, erst recht, wenn bewegte Bilder erzeugt werden müssen.

[1] von Maurizio Forte und Alberto Siliotti
[2] Virtuell oder virtual, vom mittellateinischen *virtualis*, der Kraft nach vorhanden, aber noch nicht wirklich.

Einen solchen Prozeß studieren wir jetzt an der optimalen Gestaltung einer Turbinenschaufel.

Transistoren, Chips

Möglich wurden solche ungeheueren Rechenleistungen erst durch die Miniaturisierung der elektrischen Bauteile, insbesondere des Transistors. Begonnen hatte alles im Oktober 1957, die Sowjetunion ihren ersten Kunstmond, den Sputnik, in eine Umlaufbahn um die Erde geschossen. Ein Schock für die Vereinigten Staaten. Ein neues Raumfahrtprogramm wird sofort etabliert, 1958 die NASA gegründet, und für dieses Raumfahrtprogramm braucht man dringend kleine Rechner. Da war der Transistor, 1947 bei Bell entdeckt: zwei Drähte aus Phosphorbronze auf einem Germaniumkristall, damit konnte man schwache elektrische Ströme verstärken. An Transistoren war man erst nicht interessiert, doch jetzt, 1957, in einer Art Staatsnotstand, baute man Transistoren – die waren teuer in der Herstellung – lötete sie in die Schaltkreise ein. Dann hatte man die Idee, alles zusammen auf eine Siliziumplatte zu bringen und aufgedampftes Metall als Leiterbahnen zu verwenden. Chip nannte man das Ding, Mikrochip. Dieser Mikrochip wurde von der NASA in ihre Geminiraketen eingebaut und auch in allen Raumfahrtprogrammen verwendet bis hin zum Apollo Programm. 1968 konnte man schon 64 000 kleine Schaltkreise auf einem Chip unterbringen.

Die Raumfahrt hatte die Rechnerentwicklung, die Miniaturisierung, vorangetrieben.

Im Bild das Schema eines Metall-Oxyd-Silizium Transistors; Silizium, im wesentlichen geschmolzener Sand. Zur Herstellung der Transistoren genügte bald bloße Experimentierkunst, «gefühlsmäßiges» Bauen, nicht mehr. Gerade die Miniaturisierung der Bausteine in den Rechenautomaten zwang zu genauer Vorhersage des elektrischen Verhaltens der Transistoren, noch ehe sie in Fertigung gegangen waren. Man fand heraus, daß das funktionale Verhalten der Transistoren durch die Lösungen eines Systems der Ordnung 6 von partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus beschrieben werden kann. Solche Gleichungen zu lösen war ein schwieriges Problem. An Verfahren zur numerischen Lösung der Halbleitergleichungen hat man intensiv gearbeitet und mit den Lösungen die «‹Halbleiterwirklichkeit›» relativ gut vorhersagen können.

Auf die Mathematik war man auch angewiesen, als viele solcher Transistoren zu ganzen funktionalen Blöcken verknüpft werden sollten, den sogenannten «‹Chips›». Das ist ein Blättchen aus Silizium, auf dem die Transistoren ein-

geätzt sind, ein komplizierter technischer Prozeß. Wie der Block arbeitet und welche Spannungen und Ströme man an den Zuführungsdrähten, den «‹Beinchen›» des Chips, abnehmen kann, läßt sich wieder aus den Lösungen von Differentialgleichungen – jetzt sind es nur gewöhnliche Differentialgleichungen, dafür aber viele, Tausende, Hunderttausende, Millionen! – mit guter Genauigkeit vorhersagen.

Auf einem Speicherchip, einem 4 Megabit Chip, sitzen vier Millionen Transistoren, dicht an dicht gepackt. Ein 16 Megabit Chip enthält etwa 16 Millionen Transistoren auf der Fläche von einem Pfennig. Die ganze Bibel, Altes und Neues Testament zusammen, könnte man leicht auf zwei von ihnen speichern. Freilich ohne schöne Bilder, wie z. B. die von Doré, da gehen vielleicht zwanzig solcher Bilder auf den Chip. Einer der neueren ist der 256 Megabit Chip; er ist gerade im Handel. Man kann einige Sekunden eines 35 mm Kino-Farbfilms darauf speichern. Der neue Chip nähme alle 80 der neuen Bibelbilder des Wiener Malers Ernst Fuchs auf.

Roboter und Fahrzeugbau, Elchtest

Es gibt nicht nur Kunst, es gibt auch Autos. Autos werden heute von Robotern in Roboterstraßen montiert. Wie soll sich ein solcher Roboter bewegen: soll der Roboterarm möglichst schnell von einem Punkt zum anderen fahren, oder soll der Energieverbrauch minimal sein? Eine Frage der Mathematik. Der Roboter wird in mathematische Gleichungen, in Differentialgleichungen «aufgelöst». Und die Aufgabe wird zu einer Aufgabe der optimalen Steuerung. Die mathematische Lösung läßt sich in einen Film[3] umsetzen.

Autos werden zwar von Robotern montiert, aber im Rechner entworfen. Die japanische Kraftfahrzeugindustrie hatte damit schon vor Jahrzehnten Erfolg und Entwicklungszeit, Entwicklungskosten erheblich reduzieren können. Die europäische Fahrzeugindustrie ist später gefolgt. Fahrwerksimulationen bei Kraftfahrzeugen laufen so ab. Ein Kraftfahrzeug wird in einem mathematischen Koordinatengerüst für 56 Variable entworfen. Die Bewegungen von Vorderachse und Hinterachse, der Reifen, des Motorblocks, des Schwerpunktes etc.: für jede dieser Bewegungen steht eine Variable als Funktion der Zeit. 56 zeitvariable Größen am Auto, die über Gesetze der Mechanik in (differentiellen) Beziehungen zueinander stehen. Mit weniger Variablen geht es nicht, mehr wären besser. Eisglätte, Bodenunebenheiten, Federstärken, Lenkungsfehler, Reifengüte, Motorkraft u. a. werden als Parameter eingegeben. Wir sehen uns dazu einen Film[4] an. Das virtuelle Auto wird auf eine Test-

[3] Kurzversion unter http://www-m2.mathematik.tu-muenchen.de/Drittmittel/BMBF/Roboter
[4] Kurzversion unter http://www-m2.mathematik.tu-muenchen.de/~voegel/kfz

strecke geschickt. Ein virtueller Fahrer bedient Lenkrad, Gaspedal, Bremsen und versucht möglichst schnell die Testrunden zu absolvieren. Man sieht das fahrende Auto auf dem Bildschirm, doch dieses Auto ist nur das visuelle Abbild der Lösungen eines Systems von 56 Differentialgleichungen in einem 56-dimensionalen Lösungsraum. Auf Eisplatten kommt dieses virtuelle Auto ins Rutschen, bei falscher Bremsung schleudert es, fliegt aus der Kurve. Das Auto auf dem Bildschirm verhält sich getreu wie ein wirkliches Auto auf einer Testrecke.

Fachjournalisten viel gelesener Zeitschriften und Zeitungen kommentieren das so. «Auto Bild»: ... *Stolz auf superkurze Entwicklungszeiten, wird immer mehr auf die Computersimulation vertraut. Rechenmodelle ersetzen jedoch keine Fahrtests* ... . Die «Neue Zürcher Zeitung»[5]: ... *Der Computer, der Abgott der Jahrtausendwende, hat den Elchtest nicht bestanden, den Zusammenprall mit der realen Welt* ... Aber das ist nicht wahr: Wird nämlich beim virtuellen Auto der Schwerpunkt nach oben verlagert, fällt beim erzwungenen Slalomfahren auch das virtuelle Fahrzeug um, wie in der Wirklichkeit. Die mathematischen Lösungen sehen den Unfall voraus, noch ehe das Fahrzeug gebaut ist. Freilich, von selbst, aus sich heraus, führt kein Rechenprogramm einen «Elchtest» durch.

Metamorphose der Pflanzen im Rechner

Auf die Seiten eines Dreiecks setzen wir kleinere Dreiecke, auf deren Seiten noch kleinere und so fort bis ins Unendliche. Schneeflocken sehen (fast) so aus. Noch ein Kuriosum: In ein Quadrat setzen wir kleinere Quadrate, in diese noch kleinere, bis in alle Ewigkeit. Ergebnis? Ein Streckenzug, der ein Quadrat ganz ausfüllt! Die Gesetze, nach denen beide Kurven erzeugt werden, lassen sich in Form einer genauen Berechnungsvorschrift, eines Algorithmus hinschreiben. Ein Rechenautomat kann in Verbindung mit einem Bildschirm die so erzeugten Kurven sichtbar machen, zwar nicht die Finalkurve, das ist prinzipiell unmöglich, wohl aber die Vorstufen, die der Finalkurve beliebig nahe kommen.

Man kann die einfache Berechnungsvorschrift abändern, etwa so, daß wir von dem Blatt Papier, der Ebene, in den Raum hinausgehen, und man kann bei jedem Verfeinerungsschritt noch eine spiralförmige Drehung der kleinen Kurvenstückchen vornehmen. Man ist nicht gezwungen, die Kurvenstücke alle gleich lang zu machen: man kann das eine kürzer, das andere länger halten, wie es der Zufall eingibt. Alle diese Dinge lassen sich wieder in Form einer informatischen Anweisung, in Form eines sogenannten «string» dar-

[5] Auto Bild 44/1997. NZZ Folio 2/1998

stellen. Der Rechenautomat führt den Algorithmus aus. Und das Resultat auf dem Bildschirm: Es hat Ähnlichkeit mit einer Pflanze. Wir machen das Gesetz komplizierter, färben das entstehende Bild ein und erhalten merkwürdige Gebilde, die mit Pflanzen große Ähnlichkeit haben, und es liegt manchmal nur an unzureichenden Hilfsmitteln, daß sie nicht so vollkommen wie Pflanzen aussehen.

Goethes Metamorphose der Pflanzen, die Ableitung aller Pflanzen aus einer Urpflanze nach dem Gesetz der Zusammenziehung und Ausdehnung, versehen mit einer Spiraltendenz in einem Vertikalsystem.[6] So hat Goethe das Pflanzenreich geschaut und sich dafür den Hohn der Zeitgenossen – auch der Nachwelt – eingehandelt. Es hat Goethe tief getroffen, aber Zeit seines Lebens hielt er selbstbewußt an dieser Idee fest: ... *wie von einer Leidenschaft eingenommen und getrieben, mich ... durch alles übrige Leben hindurch damit beschäftigen mußte.* ... Begeistert hatte er schon 1787 aus Rom an Frau von Stein geschrieben: *Die Urpflanze wird das wunderlichste Geschöpf von der Welt ... Mit ... dem Schlüssel dazu kann man ... noch Pflanzen ins Unendliche erfinden, ... die, wenn sie auch nicht existieren, ... eine innerliche Wahrheit und Notwendigkeit haben.* Daß mathematische Wissenschaften ihm den Schlüssel zu seiner Morphologie der Pflanzen liefern, würde ihn höchst verwundert haben. Der Schlüssel: Rechenprogramme[7], in denen «Zusammenziehung», «Ausdehnung», «Drehung», «Spiraltendenz» und anderes durch geometrische Transformationen algorithmisch mit größter Geschwindigkeit und in großer Mannigfaltigkeit erzeugt werden. Durch Festlegung von Eingangsparametern, Einsetzen von Zahlenkombinationen, erzeugt das Programm Gebilde, die wie natürliche Pflanzen aussehen. Ändert man die Eingangsparameter ab, erhält man neue Pflanzen. Durch Variation dieser Parameter wird eine unübersehbare Fülle botanischer Objekte erzeugt, Pflanzengestalten, eine virtuelle, künstliche Welt aus dem Rechner, «materialisierte» Idee der Urpflanze.

Raumfahrt

Bedeutsame Anwendungen findet die Mathematik in der Raumfahrt. *Königsdisziplin der Ingenieure* nennt sie Ambros Speiser, der große Ingenieur von der ETH Zürich. Nirgendwo werden Ingenieure in ihren Arbeiten so gefordert, wie in der Raumfahrt. Der Zwang zur Perfektion bis in die letzten und

[6] Für Schiller eine «Idee»

[7] siehe z. B. das Pflanzenmodellierprogramm von B. Lintermann und O. Deussen xfrog (http:www.greenworks.de)

unscheinbarsten Einzelheiten erzwingt strenge geistige Disziplin der Konstrukteure und bringt Erkenntnisse, die auch für Dinge außerhalb der Raumfahrt von größtem Wert sind. Es gibt zahllose Beispiele, die Rechnerentwicklung ist nur eines davon; die vielbeschworene Teflonpfanne nicht, Teflon gab es schon vorher.

Einer der NASA-Männer hatte es so gesagt: ... *Die Leute sehen immer nur die großen Raketen. Aber das ist nur ein Teil der Raumfahrt und nicht einmal der größte. Das andere, die überaus komplizierten Steuereinrichtungen, die gewaltige dazu notwendige Elektronik, die Berechnung der Flugbahnen, den riesigen, aber unabdingbaren Leitapparat auf der Erde, das sehen die Leute nicht.* ... Was hat den Amerikanern der Flug zum Mond eingebracht? Die Raumfahrt hat damals verstärkt Grundlagen für eine amerikanische Computerindustrie gelegt; die ist jetzt so mächtig, daß sie uns heute mit ihren Produkten erschlägt. Auch Japan leistet sich seit 1964 ein umfangreiches Programm der unbemannten Raumfahrt. Sowohl in den USA als auch in Japan war die Raumfahrt Antriebsmotor für Computerindustrie und Mikroelektronik. Raumfahrt allein war noch kein Garant für deren Erfolg, aber ohne sie wäre es nicht gegangen. Auch Indien treibt seit Jahrzehnten Weltraumforschung, leistet sich eigene Satelliten; Grundlagen dafür wurden noch unter Pandit Nehru in Bangalore geschaffen. Bangalore ist heute die Computerkapitale Indiens. Unbeeinflußt von aller Tagesmode haben die USA, Japan und Indien, auch Frankreich, ihre Weltraumforschungen über die Jahre durchgezogen.

Vom Start der Raketen bis zur Bildübertragung, also der Übermittlung und der störungsfreien Rekonstruktion der Bilder, die von den Raumsonden zur Erde gefunkt werden, wird in unvorstellbarem Maße von neuen mathematischen Methoden Gebrauch gemacht. Durch ihre Raumfahrt haben die USA und Japan Maßstäbe und Normen bei der Codierung von Bildern und der Bildübertragung gesetzt.

Auch die Ermittlung der Bahn, die Raumsonden fliegen müssen, um mit minimalem Treibstoffverbrauch ihren Zielplaneten zu erreichen, ist eine mathematische Aufgabe, ein Mehrpunkt-Randwertproblem mit freien Rändern.
Zwischen den Planeten Mars und Jupiter liegt der Asteroidengürtel. Hier umkreisen Abertausende von kleinen Planeten – die Asteroiden – die Sonne. Der größte von ihnen besitzt einen Durchmesser von etwa 1 000 km, und bis zum Staubkorn hinunter sind alle Größen vertreten. Diese kleinen Planeten sind mit freiem Auge nicht sichtbar mit Ausnahme des Asteroiden Nr. 4 *Vesta*. Asteroid Nr. 4386 ist nach dem Astrophysiker Prof. Lüst benannt, ehemaliger Präsident der Max-Planck-Gesellschaft und der Alexander von Humboldt-Stiftung. 4386 LÜST liegt etwas außerhalb des Gürtels, seine Bahn ist

stark gegen die Ekliptik geneigt. Die Berechnung der optimalen Flugbahn eines Raumfahrzeugs zu 4386 LÜST – es muß eine zweistufige Sonde sein – ist eine Herausforderung an die Mathematik.[8] Optimal soll die Bahn in dem Sinne sein, daß möglichst wenig Treibstoff verbraucht wird, damit die Sonde viel Nutzlast mitnehmen kann.

Die Ergebnisse der Rechnungen werden in einem Film[9] präsentiert.

Rekonstruktion eines Schädels

Im Jahre 1000 wurde Prinzessin Gisela aus dem alten bayerischen Herzogsgeschlecht der Luitpoldinger, die Schwester Kaiser Heinrich II, zur ersten Königin von Ungarn gekrönt. Ihr Denkmal und das ihres Gemahls Stephans des Heiligen steht in der ungarischen Königsstadt Veszprém. An die Königin erinnert heute in München ein kostbares Kreuz, das sie für ihre Mutter in Bayern gestiftet hat und im Bayerischen Nationalmuseum aufbewahrt wird, und auch das Gisela-Kreuz in der Schatzkammer der Münchner Residenz. In den Wirren der Geschichte wird Gisela später Äbtissin in der Passauer Abtei Niedernmünster, und dort wurde sie auch beigesetzt. Die ehemalige bayerische Prinzessin wurde selig gesprochen. In Ungarn wird die Königin als Nationalheilige verehrt; viele ungarische Pilger suchen ihr Grab in der Passauer Abtei auf. Zur Restaurierung der Gebeine mußte vor kurzem das Grab geöffnet werden. Die ungarische Regierung schickte dazu eigens ihren Botschafter nach Passau, der ersten ungarischen Königin, der seligen Gisela, die Reverenz der Republik Ungarn erweisend.

Die Gebeine waren in schlechtem Zustand. Neue Methoden aus dem Münchener Krankenhaus rechts der Isar sollten helfen, eine Replik des Schädels anzufertigen. Im modernsten Spiraltomographen von Siemens Medizintechnik in Forchheim/Bayern wurde zunächst eine tomographische Aufnahme angefertigt. Aus diesen Daten wurden über komplizierte Prozesse die mathematischen Gleichungen abgeleitet, die die Form des Schädels beschreiben. Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich eine Replik anfertigen, Fachleute können aus der Replik das Antlitz der Königin nachbilden.

[8] Ein freies Randwertproblem mit etwa 70 Differentialgleichungen und weiteren 300 Nebenbedingungen in Form algebraischer und transzendenter Gleichungen. Startgewicht der Sonde 1 1/2 Tonnen, Nutzlast ca. 130 kg.

[9] Kurzversion unter http://www-home.mathematik.tu-muenchen.de/~callies/Filme/Filme.html

Leben der Sonne

Sterne werden wie wir selbst geboren. Im Orionnebel blicken wir in eine der Werkstätten der Schöpfung; dort sind gerade neue Sterne, neue Sonnen, erschaffen worden. Sterne sind aber auch sterblich – wie wir selbst. Große Sterne explodieren am Ende ihres Lebens mit unvorstellbarer Gewalt in gleißender Lichtfülle. Die vom Explosionsherd ausgehenden Schockwellen rasen dann für Jahrtausende durch das Weltall, verdichten dort vorhandene Materie und leiten die Geburt neuer Sterne ein. Auch die Sonne, die Erde, verdanken mit großer Wahrscheinlichkeit ihr Leben der Explosion eines Riesensterns, die vor unendlichen Zeiten stattgefunden hat. – Im Sternbild des Orion sehen wir einen sterbenden Stern, eine sterbende Sonne, die Beteigeuze.

Kein Stern ist uns so wichtig wie die Sonne. *Ihr Anblick gibt den Engeln Stärke* rühmt der Erzengel Raphael in Goethes Faust die Sonne.

Tief im Sonneninnern wird Wasserstoff zu Helium «verbrannt», dabei entsteht Energie in Form kurzwelliger Röntgenstrahlung; auf dem langen, Jahrmillionen dauernden Weg zur Sonnenoberfläche wird sie in Licht und Wärme umgewandelt. In jeder Sekunde lösen sich 4 Millionen Tonnen Materie in Strahlung auf, und in jeder Sekunde wird die Sonne um 4 Millionen Tonnen leichter. Aber die Sonne ist so riesig, selbst nach Milliarden Jahren ist der Verlust für sie ganz klein. Der nach außen wirkende Gasdruck und die nach innen ziehende Gravitationskraft halten die Sonne im stabilen Gleichgewicht. Die Sonne: Ein gigantischer, aus ionisiertem Wasserstoff und Helium bestehender, frei im Raum schwebender und sich selbst regulierender Kernfusionsreaktor, der von seiner eigenen Schwerkraft zusammengehalten wird.

Das Leben eines Sterns läßt sich durch ein System von partiellen Differentialgleichungen beschreiben; und die Lösungen Druck, Temperatur, Leuchtkraft, Masse, chemische Häufigkeiten usw. als Funktionen von Ort und Zeit berechnet, beschreiben das Leben der Sonne. Wir lösen die zugehörigen Differentialgleichungen für die Sonne. Ein hochnichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus, vollständig hingeschrieben füllen sie mehrere Seiten. Es ist ein freies Randwertproblem mit 3 freien (beweglichen) Rändern. Das Leben der Sonne: vom Zünden der Kernfusion vor etwa viereinhalb Milliarden Jahren bis zum Ende der Sonne in etwa siebeneinhalb Milliarden Jahren, im Rechner gesehen. Solche unendlichen Zeiten entziehen sich aller menschlicher Vorstellungskraft. Setzen wir eine Milliarde Jahre einem Kilometer gleich, dann sind es 12 Kilometer von der Geburt unserer Sonne bis zu ihrem Tod. Zwölf Milliarden Jahre, 12 Kilometer. Etwa bei Kilometer 4,5 leben wir; die menschliche Rasse trat ca. 6 Meter vorher, 6 Millionen Jahre zuvor, in Erscheinung; die ganze Kulturge-

schichte der Menschheit reduziert sich auf ein paar Zentimeter, unsere Gegenwart ist unmeßbar dünn, 100 Jahre sind weniger als Papierstärke, ein zehntel Millimeter. Wir wollen annehmen, daß es mit der Menschheit noch eine Million Jahre weitergeht – da sind wir Optimisten –, doch das ist nicht mehr als ein Meter. Leben könnte die Erde noch einen ganzen weiteren Kilometer tragen, eine Milliarde Jahre. Aber die von der Sonne ausgestrahlte Energie nimmt zu, für uns unmerklich, es wird heiß auf der Erde, – verwechseln Sie das nicht mit dem sog. Treibhauseffekt –, die Weltmeere werden verdampfen, alles verbrennt. Die Sonne wird weitere 6 Milliarden Jahre leuchten, 6 Kilometer können wir noch gehen, vor ihrem Ende wird sie sich zu einem rötlich leuchtenden Riesenstern ausdehnen, der, von der Erde aus gesehen, fast den halben Himmel einnehmen und so groß wie die Merkurbahn sein wird. Dann wird die Sonne in rascher Folge ihre Gashülle abstoßen, sich zusammenziehen, sich wieder ausdehnen, erneut Gasmassen abstoßen ..., ein planetarer Gasnebel bildet sich, der im Weltraum entschwindet und einen winzigen, aber sehr schweren, langsam verlöschenden Zwergstern zurückläßt. 1 Kubikzentimeter Materie von ihm wiegt etwa 1/2 Tonne.

Das Leben der Sonne im Film[10]. Der Film komprimiert die 12 Milliarden Lebensjahre der Sonne auf wenige Minuten. Das Leben eines hundertjährigen Menschen dauert gerade 1 Millionstel Sekunde. Wäre die Sonne nur wenig größer, würde sie, die Lösungen der mathematischen Gleichungen zeigen es, so schnell brennen, daß sich gar kein Leben auf einem Planeten entwickeln könnte. Bei nur 20% größerem Durchmesser, nicht viel also, wäre schon nach 1 Milliarde Jahren alles vorbei. Und erst, wenn die Sonne zehnmal so viel Masse hätte, schon nach ein paar Millionen Jahren – Millionen, nicht Milliarden – wäre aller Brennstoff der Sonne verpufft. Wäre die Sonne kleiner, wäre es besser, aber sie würde jetzt nicht heiß genug sein und die Planeten müßten sie dichter umkreisen, wären dann intensiver (Röntgen)Strahlung ausgesetzt und mächtige Gezeiten würden auf den Planeten toben, kein Leben hätte sich entwickeln können.

Wer hätte die Sonne besser bauen können.

Meine Damen und Herren,

Zum hier präsentierten Material aus den unterschiedlichsten Gebieten haben viele Forscher entscheidende Beiträge geleistet, auch meine Mitarbeiter.

Herr Callies und ich haben Sie mitgenommen auf eine virtuelle Reise durch Raum und Zeit. Sie sind geduldig mitgegangen. Wir danken Ihnen.

[10] Kurzversion unter http://www-m2.ma.tum.de/~haberj/Sonne.
In Zusammenarbeit mit dem Max-Planck-Institut für Astrophysik, München.