Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 109 (2020)

Artikel: Die Stimmung von Musikinstrumenten : von pythagoreisch, mitteltönig, wohltemperiert bis gleichstufig

Autor: Völkle, Hansruedi

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-905932

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Stimmung von Musikinstrumenten: von pythagoreisch, mitteltönig, wohltemperiert bis gleichstufig

HANSRUEDI VÖLKLE

(Titularprofessor i.R. am Physikdepartement der Universität Freiburg)

Zusammenfassung: *Die Stimmung von Musikinstrumenten und die heute gebräuchlichen Tonleitern und Tonarten sind das Resultat einer jahrhundertelangen Entwicklung. Die Suche nach Lösungen für den nicht geschlossenen Quintenzirkel führte von der pythagoreischen – auf reinen Quinten basierenden – Stimmung, über die mitteltönige mit acht reinen Terzen, den verschiedenen wohltemperierten, bis zur heute gebräuchlichen, gleichstufig temperierten Stimmung. Bei der letzteren sind die einzelnen Intervalle, also alle Ganz- oder Halbtonschritte, gleichgross, die einzelnen Tonarten unterscheiden sich nicht mehr voneinander, wodurch der individuelle Tonartencharakter verloren geht. Jeder dieser Lösungen bleibt jedoch Kompromiss mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen. Der Text fasst die wichtigsten Schritte dieser Entwicklung zusammen.*

Abstract*: The tuning of musical instruments and the scales and keys used today are the result of centuries of development. The search for solutions for the non-closed circle of fifths led from the Pythagorean tuning – based on pure fifths – through the meantone tuning with eight perfect thirds, to different well-tempered tunings and finally to the equally tempered one that is common today. With the latter, the individual intervals, i. e. all tones or semitones are of the same size, and so the different keys no longer differ from one another, which means that the individual key characteristic is lost. However, each of these solutions remains a compromise and has its one advantages and disadvantages. The article summarizes the most important steps in this evolution.*

Résumé : *L'accordage des instruments de musique, ainsi que les gammes et tonalités utilisées aujourd'hui sont le résultat de plusieurs siècles de développement. La recherche de solutions pour le cercle non fermé des quintes a conduit de l'accord pythagoricien – basé sur des quintes pures – en passant par le tempérament mésotonique – avec huit tierces pures – aux différentes variantes de l'accord bien tempérés et finalement au tempérament égal qui est courant aujourd'hui. Avec ce dernier, les intervalles chromatiques individuels sont tous de même taille, les douze tonalités ne diffèrent plus les unes des autres, on perd donc les caractéristiques individuelles des tonalités. Cependant, chacune de ces solutions reste un compromis avec des avantages et inconvénients. Le texte résume les étapes les plus importantes de ce développement.*

1. Die Entstehung der Tonleitern des abendländischen Tonsystems

Die schwarzen und weissen Tasten des Klaviers zeigen ein Muster 2-3-2-3, dessen Periodizität durch die Oktav bestimmt wird (Abb. 1). Diese ist der erste harmonische Oberton eines Klanges. Ihre Frequenz ist doppelt so gross wie jene des Grundtones. Bei heutigen Tasteninstrumenten ist die Oktav in zwölf gleichgrosse Intervalle (Halbtöne) aufgeteilt, die Frequenz eines Tones ergibt sich aus derjenigen des nächsttieferen durch Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1.059'463 = 100$ Cent. Für die diatonische Tonleiter werden sieben Töne benötigt, für C-Dur beispielsweise nur die weissen Tasten. Unsere Tonleitern bestehen aus fünf Ganzton- und zwei Halbtonschritten. Deren Position innerhalb der Oktave bestimmt das Tongeschlecht Dur oder Moll. Anfänglich wurde mit dem Ton A begonnen, dann folgten B (heute H), C, D, E, F, G. Die diatonische Dur-Tonleiter ergibt sich folgendermassen: A→B*(H)*→C→D→E→F→G→a.

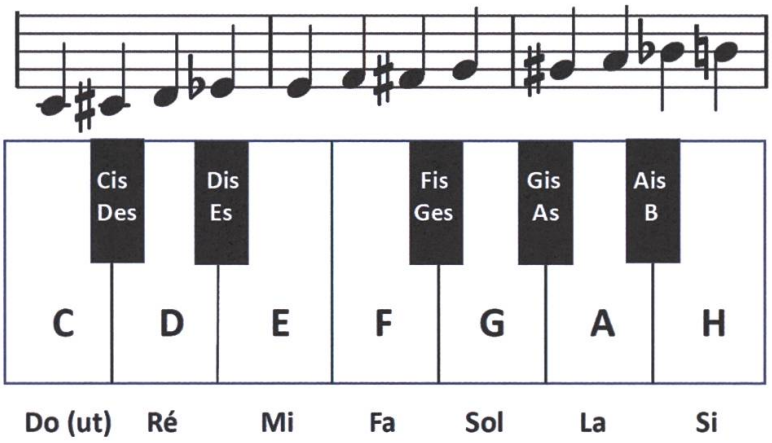


***Abb. 1**: Die Tasten einer Oktave auf dem Klavier*

2. Die Tongeschlechter Dur und Moll

Das Tongeschlecht, Dur oder Moll (*majeur* oder *mineur* in Französisch bzw. *major* oder *minor* in Englisch), wird durch die Position des ersten Halbtonschrittes bestimmt. In Dur kommt dieser nach der dritten Stufe *(in C-Dur nach dem E)*, in Moll nach der zweiten *(in c-Moll nach dem D)*. Damit bestimmen die grosse beziehungsweise die kleine Terz das Tongeschlecht. Noch in der Bach-Zeit sprach man daher von *Tertiam majorem* oder *Tertiam minorem* für Dur beziehungsweise für Moll. Der zweite Halbtonschritt befindet sich bei Dur zwischen der sechsten und siebten Stufe, beim *natürlichen* Moll zwischen der fünften und sechsten (a-Moll = A, H, c, d, e, f, g, a). Bei der *harmonischen* Moll-Tonleiter ist zusätzlich die siebte Stufe (Septime, bei a-Moll: gis) um einen Halbton erhöht, bei der *melodischen* – allerdings nur beim Aufstieg – die sechste Stufe (Sext, bei a-

Moll: fis), während sie beim Abstieg der natürlichen Moll-Tonleiter folgt (f). Auf dem Tasteninstrument können Dur- oder Moll-Tonleitern, ausgehend von jeder der zwölf Tasten der chromatischen Tonskala, erstellt werden. Die Anordnung der schwarzen und weissen Tasten hat schliesslich auch den Vorteil, dass sie dem Klavierspieler die Orientierung erleichtert und ihm ermöglicht mit einer Hand eine Oktave zu greifen.

***Tab. 1**: Ursprung und Bezeichnung der Töne (Johannes-Hymnus des Paulus Diaconus, ca.725 - 799)*

Herkunft	Notation		
	Deutsch	Französisch	Englisch
Ut queant laxis	C	Ut (Do)	C
resonare fibris	D	Ré	D
mira gestorum	E	Mi	E
famuli tuorum	F	Fa	F
solve polluti	G	Sol	G
labii reatum	A	La	A
Sancte **I**ohannes	H (B)	Si	B

3. Die Kirchentonarten als Ursprung unseres Tonsystems

Unser europäisches Tonsystem geht auf die griechische Pentatonik zurück. Deren fünf Stufen basieren auf fünf gestaffelten, reinen Quinten C→G→D→A→E, woraus sich die Tonleiter C→D→E→G→A ergibt. Diese Skala hatte zwei 1½-Tonschritte E→G und A→c. Durch Hinzufügen von F *(eine Quinte abwärts von C)* und H *(eine Quinte aufwärts von E, früher B genannt)* wurden diese Intervalle in je einen Ganz- und einen Halbtonschritt aufgeteilt und ergaben zusammen die diatonische C-Dur-Tonleiter.

***Tab. 2**: Die Kirchentonarten aus denen die Dur- (ionische) und Moll-Tonleiter (äolische) hervorging*[1]

Namen der *authentischen* Kirchentonarten	½-Ton-Schritte	Inter-vall	Namen der *plagalen* Kirchentonarten	½-Ton-Schritte	Inter-vall
Dorisch *(≈ d-Moll, aber ohne b)*	2122212	$d - d^1$	Hypo-Dorisch	2122122	A – a
Phrygisch *(≈ e-Moll, aber ohne fis)*	1222122	$e - e^1$	Hypo-Phrygisch	1221222	H – h
Lydisch *(≈ F-Dur, aber ohne b)*	2221221	$f - f^1$	Hypo-Lydisch	2212221	$c - c^1$
Mixolydisch *(≈ G-Dur, aber ohne fis)*	2212212	$g - g^1$	Hypo-Mixolydisch	2122212	$d - d^1$
Äolisch *(= a-Moll)*	2122122	$a - a^1$	Hypo-Äolisch	1222122	$e - e^1$
Lokrisch *(hyperäolisch)*	1221222	$h - h^1$	Hypo-Lokrisch	2221221	$f - f^1$
Ionisch *(= C-Dur)*	2212221	$c^1 - c^2$	Hypo-Ionisch	2212212	$g - g^1$

[1] Im Mittelalter galt dorisch als phlegmatisch, phrygisch als cholerisch, lydisch als sanguinisch und mixolydisch als melancholisch.

Unsere heutigen Tonleitern sind aus den acht – später vierzehn – mittelalterlichen Kirchentonarten hervorgegangen: Für die *authentischen*: Dorisch, phrygisch, lydisch, mixolydisch, äolisch (später zusätzlich noch lokrisch, auch hyperäolisch) und ionisch, für die *plagalen*: Hypo-dorisch, hypo-phrygisch, etc. Die sechs authentischen Kirchentöne basieren auf den Ausgangspunkten d, e, f, g, a und c^1 und die sechs plagalen Kirchentöne, jeweils eine Quart tiefer, auf A, H, c, d, e und g. Zur Vervollständigung wurde später noch der lokrische Modus, ausgehend von h bei den authentischen, beziehungsweise Hypo-Lokrisch ausgehend von f, bei den plagalen Modi hinzugefügt.

Dieses als *Systema teleion* im alten Griechenland entstandene Tonsystem wird Euklid von Alexandria zugeschrieben und durch Archytas von Tarent erweitert. Der Ursprung sind zwei, im Gegensatz zum Mittelalter absteigende, Tetrachorde (Quarten): $a^1 \rightarrow g^1 \rightarrow f^1 \rightarrow e^1$ und $e^1 \rightarrow d^1 \rightarrow c^1 \rightarrow h$, bestehend aus je zwei Ganztönen und einem Halbton. Der Ton e als Synaphe verbindet die beiden Tetrachorde, während a^1 die Oktave von a ist. Diese Tonleiter, die für das Singen und Musizieren am besten geeignet ist, wurde als dorische bezeichnet. Im mittelalterlichen System der Kirchentonarten entspricht sie jedoch dem phrygischen, ausgehend von e, Ursache für diese «Verwechslung» ist vermutlich ein Übersetzungsfehler. Die Namen der Tonarten wurden von den antiken Stämmen der Dorer, Phrygier und Lyder hergeleitet. Sie sind allerdings nicht zu verwechseln mit den griechischen Bezeichnungen der Kirchtonarten des Mittelalters, von denen sie lediglich die Namen gemeinsam haben.

Absolut gesehen bleiben die Halbtonschritte der Kirchtonarten – nicht jedoch relativ zum sich ändernden Ausgangston einer Tonleiter – immer an denselben Stellen E→F und H→c. Jede Tonart hat aufgrund der unterschiedlichen Position der Halbtonschritte (siehe Tabelle 2) einen eigenen Charakter und auch eine bestimmte Anwendung. Unser C-Dur entspricht bei den authentischen dem dreizehnten Kirchenton (ionisch), a-Moll, als Parallel-Molltonart zu C-Dur, dem neunten Kirchenton (äolisch). Die von D ausgehende Skala, mit den Halbtonintervallen nach der zweiten und der sechsten Stufe ist die feierlich-ernste dorische Tonart wie sie Johann Sebastian Bach in der sogenannten dorischen Toccata und Fuge in d-Moll für Orgel (BWV 538) verwendete.

4. Die Zerlegung eines Klangs in Teiltöne

Damit ist aber noch nicht erklärt woher – physikalisch-mathematisch – die heute geläufigen Ganz- und Halbtonintervalle kommen. Jede, auch kurzzeitig, periodische Schwingung lässt sich nach dem Satz von Joseph Fourier (französischer Mathematiker, 1768 – 1830) mathematisch in eine Reihe von Cosinus- und Sinusschwingungen zerlegen:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k sin(kt)\}$$

Sind die Frequenzen der Teil- oder Partialtöne (Obertöne) ganzzahlige Vielfache (k=1, 2, 3, etc.) des Ausgangston (Grundton), spricht man von harmonischen Obertönen und es entsteht ein Klang, andernfalls hören wir nur ein Geräusch. Damit die Summe dieser einzelnen Tönen als ein einziger Klang wahrgenommen wird, müssen diese auch syn-chron schwingen, d.h. der zweite Knoten (Nulldurchgang) des ersten Obertones, der dritte des zweiten, der vierte des dritten etc. müssen mit dem ersten des Grundtones zeit-lich zusammenfallen. Damit kann ein Klang in der technischen Akustik als ein perio-discher Schalldruckverlauf mit der Periodendauer T bezeichnet (harmonische) Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis zur Grundfrequenz stehen.

Im menschlichen Ohr wird dieser Klang wieder in die einzelnen Frequenzen zerlegt. Die Schallwellen gelangen über den Gehörgang zum Trommelfell und bringen dieses zum Schwingen. Der eigentliche Hörapparat heisst *Cochlea*, oder Schnecke, und befindet sich gut geschützt im Innenohr. Er verfügt über rund 20'000 Haarzellen, die von den eintreffenden Schallwellen je nach Tonhöhe zum Schwingen gebracht werden, und ermöglichen somit die Fourier-Zerlegung in die einzelnen Frequenzen. Dabei bestimmt die Intensität des Schalles die Anzahl Impulse pro Sekunde, die von den Haarzellen an das Gehirn weitergeleitet werden. Im Gehirn werden dann die einzelnen Impulse wieder zu einer ganzheitlichen Hörwahrnehmung als Klang zusammengesetzt.

5. Wie entstehen die einzelnen Intervalle der Tonleiter?

Die einzelnen Intervalle der Tonleiter werden aus den harmonischen Teiltönen hergeleitet. Ausgehend von C ergeben sich die Obertöne wie sie auf Tabelle 3 bis zur 16. Stufe aufgelistet sind. In der Tabelle wird jeweils das Schwingungsverhältnis zum Grundton sowie zur nächsttieferen Oktav angegeben. Eine graphische Darstellung der Intervalle zeigt Abb. 2. Quarte und Quinte ergänzen sich zur Oktave, ebenso die kleine (bzw. grosse) Terz zur grossen (bzw. kleine) Sext, sowie kl. Terz und kl. Sekunde zur Quarte.

Ekmelische (εκ μελος) Töne oder Intervalle liegen ausserhalb unseres Tonsystems, und werden als «falsch» empfunden; beispielsweise der siebte Teilton b^1 *(die Naturseptime mit 968.826, um 31.174 Cent unter der gleichstufig temperierten Septime)* oder der elfte Teilton fis^2, *(das Alphorn-fis oder Alphorn-Fa, das mit 551.318 Cent zwischen f^2 mit 500 Cent und fis^2 mit 600 Cent liegt)*. Der Name Alphorn-Fa kommt daher, dass Horninstrumente ohne Ventile auf Naturtöne begrenzt sind. Obwohl solche Töne zum Teil bewusst in der Musik eingesetzt werden, hat der Schweizerische Jodlerverband das Alphorn-Fa zum *Tonus non gratus* erklärt.

***Tab. 3**: Intervallschritte der reinen Tonleiter, ausgehend von C im Vergleich zur Gleichstufigkeit*

Teilton	Reine Intervalle	Verhältnis zum Grundton Basis ist C		gleichstufig temperiert	
				Faktor	Δ_{Cent}
1: C	Prime (Grundton)	C:C = 1:1	1	1.000'000	0
2: c	Oktave	c:C = 2:1	2	2.000'000	0
3: g	Quinte	g:C = 3:1; g:c = 3:2	1.5	1.498'307	+1.955'001
4: c^1	zweite Oktave	c^1:C = 4:1	2	2.000'000	0
5: e^1	grosse Terz	e^1:C = 5:1; e1:c1 = 5:4	1.25	1.259'921	-13.686'286
6: g^1	zweite Quinte	g^1:C = 6:1; g1:c1 = 3:2	1.5	1.498'307	+1.955'001
7: b^1 Naturseptime*)	(kleine Septime)	b^1:C= 7:4	1.75	1.781'797	-31.174'093
8: c^2	dritte Oktave	c^2:C = 8:1	2	2.000'000	0
9: d^2	grosse Sekunde	d^2:C = 9:1; d^2:c^2 = 9:8	1.125	1.122'462	+3.910'000
10: e^2	kleine Sekunde	e^2:C = 10:1; e^2:d^2 = 10:9	1.111	1.122462	-17.596'288
11: f^2 Alphorn-Fa*)	Quarte	f^2:C = 11:1; f^2:c^2 = 11:8	1.375	1.414'214	-48.682'057
12: g^2	dritte Quinte	g^2:C = 12:1; g^2:c^2 = 3:2	1.5	1.498'307	+1.955'001
13: as^2	kleine Sext	as^2:C = 13:1; as^2:c^2 = 13:8	1.625	1.587'401	+40.527'661
14: b^2 Naturseptime	kleine Septime	b^2:C = 14:1; b^2:c^2 = 7:4	1.75	1.781'797	-31.174'093
15: h^2	grosse Septime	h^2:C = 15:1; h^2:c^2 = 15:8	1.875	1.887'749	-11.731'285
16: c^3	vierte Oktave	c^3:C = 16:1; c^3:c^2 = 2:1	2	2.000'000	0
Es fehlen nun noch die folgenden Intervalle:					
Quarte: [Quarte+Quinte = Oktave: (4/3)(3/2)=2]		F:C = 4:3	1.333	1.334'840	-1.955'001
kleine Terz: [kl. Terz + gr. Terz=Quinte: (6/5)(5/4)=3/2]		Es:C = 6:5	1.2	1.189'207	+15.641'287
grosse Sext: [gr. Sext + kl. Terz = Oktave: (5/3)(6/5)=2]		A:C = 5:3	1.666	1.681'793	-15.641'287
kleine Sext: [kl. Sext + gr. Terz = Oktave: (8/5)(5/4)=2]		As:C = 8:5	1.6	1.587'401	+13.686'286
Halbton		c^3:h^2 =16:15	1.0666	1.059'463	+11.731'285

*) *ekmelische* Töne sind solche, die zu weit von den gebräuchlichen Tönen entfernt sind, sodass sie vom menschlichen Ohr nicht mehr «zurechtgehört» werden können und somit als falsch empfunden werden.

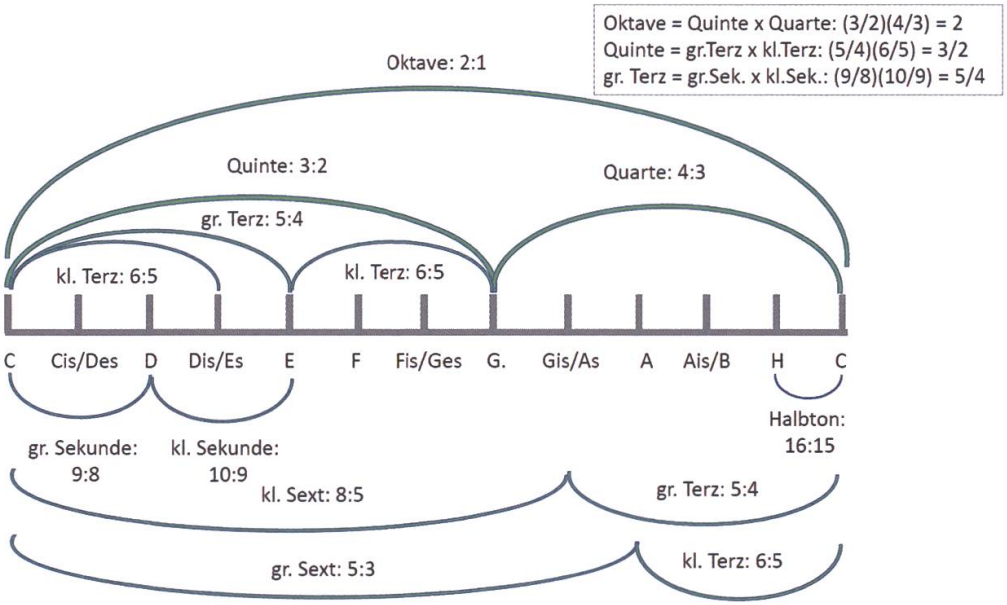


***Abb. 2**: Graphische Darstellung der Schwingungsverhältnisse von harmonischen Intervallen*

6. Die auf dem Logarithmus basierende Cent-Skala

Die logarithmische Cent-Skala teilt die Tonleiter der gleichstufig temperierten Stimmung in 1200 Cent ein, bestehend aus zwölf gleichgrossen Halbtonschritten à je 100 Cent. Normiert ist die Skala meist beim Kammerton a^1 = 440 Hz *(Heinrich Hertz, deutscher Physiker, 1857-1894)*; der mit 0 Cent zum Ausgangspunkt wird. Dann ist, aufsteigend, a^2 = 880 Hz = +1200 Cent, absteigend a^0 = 220 Hz = –1200 Cent, A = 110 Hz = –2400 Cent, A_1 = 55 Hz = –3600 Cent, etc. Die übliche Basis der Tonleiter c^1 erhält man durch $f(c^1) = 440/(2^{9/12})$ = 261.625'565 Hz. Bei der Normierung auf a^1 = 440 Hz erhält man für einen Ton der Frequenz f [Hz] den Cent-Wert mit dem folgenden Formalismus:

$$f\,[\text{Cent}] = 1200 \times \log_2 (f/440) = 1200\,[\,\log_{10} (f/440) / \log_{10} (2)\,] = \log_{10} (f/440) \times 3986.313'714$$

$$= [\,\log_{10} (f) - \log_{10} (440)\,] \times 3986.313'714 = [\,\log_{10} (f) - 2.643'453\,] \times 3986.313'714$$

Für das Frequenzverhältnis $F = f_1/f_2 = 1200\,[\,\log_{10} (F) / \log_{10} (2)\,] = \log_{10} (F) \times 3'986.313'714$

Dabei ist $1/\log_{10}(2) = 3.321'928'095$. Regel für den Basiswechsel: $\log_2(X) = \log_{10}(X) / \log_{10}(2)$

Die Umkehrung der Formel lautet dann: $f\,[\text{Hz}] = 440 \times 10^{(f[\text{Cent}] / 3986.313'714)}$

Tabelle 4: *Die wichtigsten Intervalle*

Intervall	Verhältnis	rein	temperiert
Reine Quinte	3/2 = 1.5	701.955'000 Cent	700 Cent
Reine, grosse Terz	5/4 = 1.25	386.313'714 Cent	400 Cent
Reine kleine Terz	6/5 = 1.2	315.641'287 Cent	300 Cent
Oktave	2/1 = 2	1200.000'000 Cent	1200 Cent

7. Das Problem des nicht-geschlossenen Quintenzirkels

Mit der pythagoreischen, nach dem griechischen Philosophen und Mathematiker Pythagoras (geb. 582 v. Chr.) benannten und auf den harmonischen Obertönen basierenden, Tonleiter könnte man glauben, alles sei in Harmonie und Minne. Es bleibt jedoch das Problem, dass der Quintenzirkel mathematisch nicht aufgeht: Setzt man auf dem Klavier zwölf Quinten hintereinander (siehe auch Abb. 3, links),

aufsteigend: $C \rightarrow G \rightarrow d^0 \rightarrow a^0 \rightarrow e^1 \rightarrow h^1 \rightarrow fis^2 \rightarrow cis^3 \rightarrow gis^3 \rightarrow dis^4 \rightarrow ais^4 \rightarrow f^5 \rightarrow c^6$

absteigend: $c^6 \rightarrow f^5 \rightarrow b^4 \rightarrow es^4 \rightarrow as^3 \rightarrow des^3 \rightarrow ges^2 \rightarrow h^1 \rightarrow e^1 \rightarrow a^0 \rightarrow d^0 \rightarrow G \rightarrow C$

so kommt man auf c^6, sieben Oktaven über dem Ausgangspunkt C. Sieben Oktaven geben ein Schwingungsverhältnis c^6:C von 2^7 = 128:1. Zwölf reine Quinten ergeben jedoch ein Schwingungsverhältnis von $(3/2)^{12}$ = 129.746'338. Zwölf pythagoreische, reine

Quinte sind somit um 129.746'338 / 128 = 1.013'643, also rund 74:73 zu gross. Der Unterschied zwischen Fis, sechs reinen Quinten nach oben von C aus, und Ges, sechs reine Quinten nach unten von C aus – abzüglich der entsprechenden Oktaven – wird als das **pythagoreische Komma** mit 23.460 Cent bezeichnet. Nebst diesem Problem bietet der Quintenzirkel jedoch den Vorteil, dass er zur diatonischen Tonleiter führt, sowie auch zu den verschiedenen Tonarten mit den Tongeschlechtern Dur und Moll.

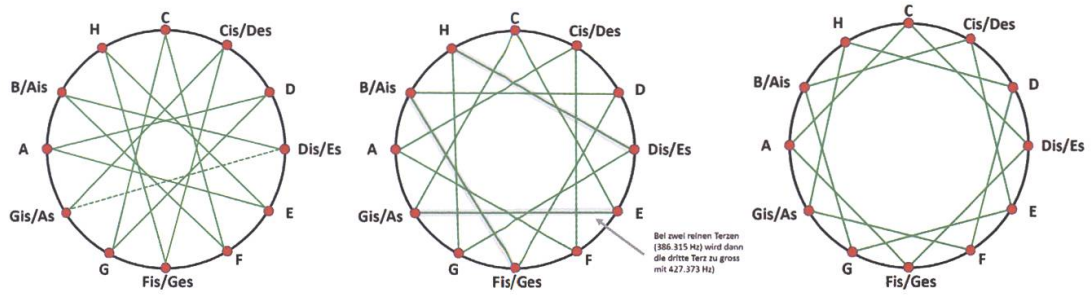


Abb. 3: Von links nach rechts: Quintenzirkel, grosse Terzen-Dreiecke und kleinen Terzen-Vierecke

8. Auch mit den Terzen geht das System nicht auf!

Setzen wir vier Quinten hintereinander C→G→d→a→e^1 kommen wir auf die grosse Terz C→ $e^1 = (3/2)^4$ mit 81:16, bzw. c^1→e^1 = 81:64. Die reine Terz beträgt jedoch 5:4 = 80:64. Somit ist die pythagoreische Terz um 81:80 zu hoch gegenüber der reinen Terz. Dieser Unterschied von 1.012'500 = 21.506 Cent wird das **syntonische Komma** genannt. Es entspricht auch dem Unterschied zwischen den beiden Ganztonintervallen gemäss Tab. 3 von 9:8 und 10:9 mit (9/8) : (10/9) = (9/8) x (9/10) = 81:80. Das gleiche Problem ergibt sich, wenn man die vier möglichen Dreiecke der grossen Terzen C→E→Gis→c, D→Fis→Ais→d, F→A→cis→f und G→H→dis→g bildet (Abb. 3, Mitte), die am Schluss wieder auf die Oktave führen sollten. Hier ergibt $(5/4)^3$ = 1.953'125, also –41.059 Cent gegenüber der Oktave, mit einem Verhältnis von c:C = 2:1. Ähnlich ist es bei den drei möglichen Vierecken kleiner Terzen (Abb. 3, rechts).

Diese vier fundamentalen «Problemintervalle» sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Die roten Zahlen in der Kolonne ganz rechts sind die Centwerte, um welche die Oktaven beziehungsweise die Quinten, grossen und kleinen Terzen für die gleichstufig temperierte Stimmung angepasst werden müssen damit das System aufgeht. Bei der pythagoreischen Stimmung mit reinen Quinten ist diese Differenz auf die Wolfsquint kumuliert. Diese ergibt sich aus 7 Oktaven minus 11 reinen Quinte: $2^7 - 1.955^{11}$ = 8400 – 7721.505 Cent = 678.495 Cent. Sie ist um 23.460 Cent kleiner ist als die reine Quinte von 701.955 Cent. Bei der mitteltönigen Stimmung sind jeweils pro Terzen-Dreieck zwei Terzen rein und die Dritte muss dann die Differenz aufnehmen. Somit werden bei der gleichstufigen

Stimmung alle Quinten um 1.955 Cent leicht kleiner, die grossen Terzen um 13.686 Cent deutlich grösser und die kleinen Terzen um 15.641 Cent deutlich kleiner als die entsprechenden natürlichen Intervalle. Auf der Abb. 3 ist die Wolfsquint als unterbrochene Linie dargestellt, die «falschen» grossen Terzen als dickere Linien.

Tab. 5: *Die vier «problematischen» Intervalle*

Intervall	**Resultat**	**Name**	**Abweichung zu rein**		
			Faktor	Cent	pro Int.
12 Quinten > 7 Oktaven	$(3/2)^{12} > 2^7$	pythagoreisches Komma 74/73	1.013'643'265	–23.460	**–1.955**
4 Quinten–2 Okt. > Terz	$(3/2)^4 > 5/4$	syntonisches Komma: 81/80	1.012'500'000	–21.506	**–5.377**
3 grosse Terzen < Okt.	$(5/4)^3 < 2$	kleine Diesis: 125/128	0.976'562'500	+41.059	**+13.686**
4 kleine Terzen > 1 Okt.	$(6/5)^4 > 2$	grosse Diesis: 648/625	1.036'800'000	–62.565	**–15.641**

9. Die Suche nach Lösungen für das Tonsystem

Dieses, rein mathematisch, unlösbare Problem beschäftigt die Musikwissenschaftler und Instrumentenbauer (aber auch Mathematiker und Physiker) seit Jahrhunderten und ist auch heute nur mit Kompromissen lösbar. Solange die Musik ausschliesslich homophon, also im Nacheinander und nicht im Miteinander der Töne bestand, in erster Linie vokal war und keine Tasteninstrumente erforderte, konnte man mit der pythagoreischen Stimmung leben. Im Mittelalter (ab etwa 1300) kam die Mehrstimmigkeit (Polyphonie) auf, wobei zuerst eine zweite Stimme im Quinten- oder Quartenabstand – unter der Hauptstimme (*Cantus Firmus*) beim *Organum* (ab 13. Jh.) bzw. über derselben beim *Discantus* – hinzutrat. Beide Stimmen vereinen sich am Anfang und Ende des Stückes wieder zum Unisono. Beim Fauxbourdon (15. Jh.) tritt meist zur Hauptstimme (Sopran) eine zweite (Contratenor, eine Quarte tiefer) und eine dritte (Tenor, eine Sext tiefer) Stimme hinzu. Dies ist bereits eine Vorstufe zur echten Zwei- bzw. Dreistimmigkeit mit dem Kontrapunkt[2].

Für die Instrumente mit chromatischer Klaviatur (Orgel, Clavichord, Cembalo, Spinett etc. ab etwa dem 14. Jh.) sowie bei Saiteninstrumenten mit Bünden (für die Halbtöne) musste also eine Lösung gefunden werden. Eine Klaviatur, bei der auch die schwarzen Obertasten in zwei aufgespalten würden, zur Unterscheidung enharmonischer Töne wie beispielsweise Dis und Es oder Gis und As, wäre aus spieltechnischen Gründen nicht sinnvoll. Eine Lösung, um alle Tonarten spielbar zu machen, besteht darin, entweder die Quinten ein wenig zu verkleinern (⇒ mitteltönig), damit vier Quinten zur – mehr oder weniger – reinen Terz führen oder andererseits den Fehler des Quintenzirkel ungleichmässig (⇒ wohltemperiert) oder gleichmässig (⇒ gleichstufig) auf alle zwölf Quinten zu verteilen, hier aber mit deutlich vergrösserten Terzen (Abb. 4 und Tabelle 6).

[2] *Contrapunctus non est nisi punctum contra punctum ponere, vel notam contra notam ponere vel facere, et est fundamentum discantus.*

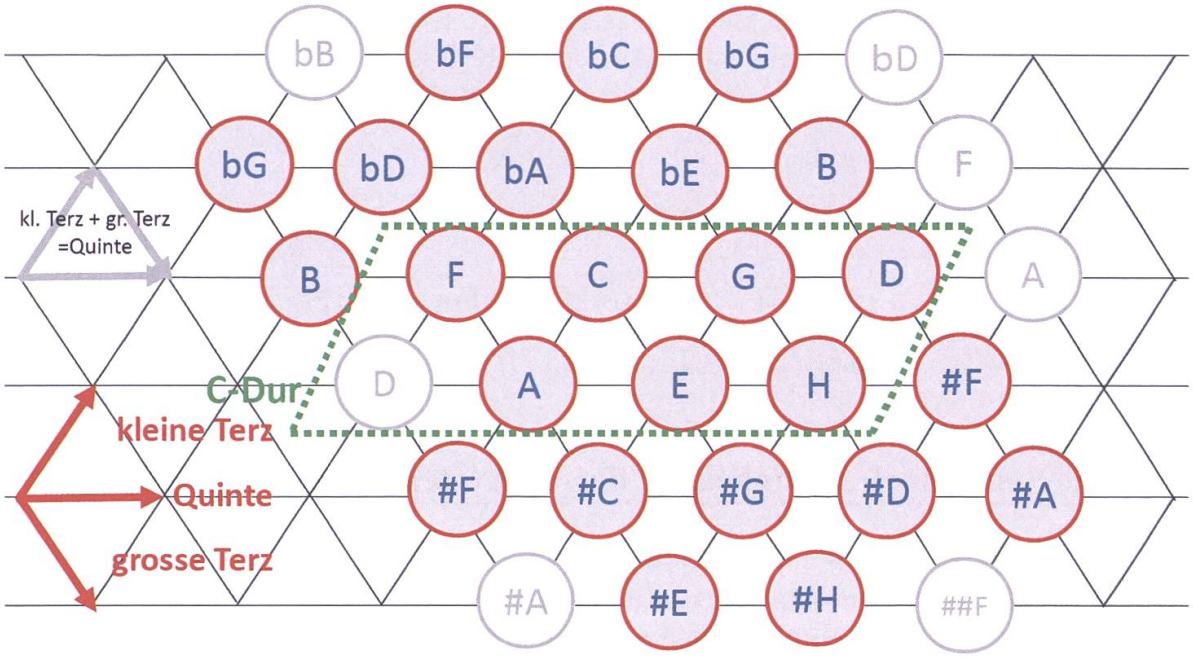


Abb. 4: Diagramm des abendländischen Tonsystems basierend auf den natürlichen Intervallen

Tab. 6: *Stimmungen und ihre Epoche*

Stimmung	**ungefähre Zeitspanne**
Pythagoreische Stimmung	bis ca. Ende 15 Jh.
Mitteltönige Stimmungen	1525 - 1820
Modifizierte, mitteltönige Stimmungen	1740 - 1830
Wohltemperierte Stimmungen	1675 - 1820
Viktorianische, wohltemperierte Stimmungen	1820 - 1930
Quasigleichmässig temperierte Stimmungen	1820 - 1920
Gleichstufig temperierte Stimmung	1910 - heute
Rekonstruierte «Bach-Stimmungen»	ab ca. 1976

10. Die Schwebungen von temperierten Quinten und Terzen

Massgeblich für die Beurteilung der verschiedenen Stimmungen ist das Verständnis von Dissonanz und Konsonanz. Bei zwei nahe bei einander liegenden Tönen wird eine Schwebung wahrgenommen, deren Pulsationsfrequenz der Differenz der Frequenzen der beiden Töne entspricht – die Intensität schwankt dann mit der Schwebungsfrequenz – während sich die Tonhöhe aus dem Mittelwert der Frequenzen der beiden überlagerten Töne ergibt. Steigt der Frequenzunterschied, dann vermag das Ohr den immer schneller werdenden Lautstärkeschwankungen nicht mehr zu folgen und es wird ein Ton mit rauer

Klangfärbung wahrgenommen, bei noch höheren Schwebungsfrequenzen zwei Einzeltöne. Ab einer Schwebungsfrequenz (untere Hörschwelle bei etwa 20 Hz) entsteht ein Differenzton, gegeben durch die Differenz der beiden Frequenzen. Die Wahrnehmung als Dissonanz oder als Schwebung hängt jedoch wesentlich von der Tonhöhe, aber auch vom Obertonreichtum, eines Klanges ab, also von der Klangfarbe.

Schwebungen entstehen vor allem zwischen den verschiedenen Partialtönen der beiden Töne. Als Beispiel betrachten wir die temperierte Quinte C→G. Der erste Oberton von G ist g^0 mit einem Schwingungsverhältnis zum gleichstufig temperierten C (mit 65.406'391 Hz, auf der Basis a^1 = 440 Hz) von 2 x $2^{7/12}$ = 2.996'614, während g^0 gleichzeitig der zweite Oberton von C ist, mit einem Schwingungsverhältnis zum C von 2 x 3/2 = 3. Zwischen diesen beiden g^0's besteht ein Schwingungsverhältnis von 1.001'130 entsprechend 1.955 Cent. Die Pulsationsfrequenz der Schwebung beträgt dann 0.22 pro Sekunde. Dasselbe eine Oktav höher gibt eine doppelt so schnelle Schwebung. Je schneller die Schwebung umso weniger wird sie als störend empfunden (Abb. 5, Tab. 7).

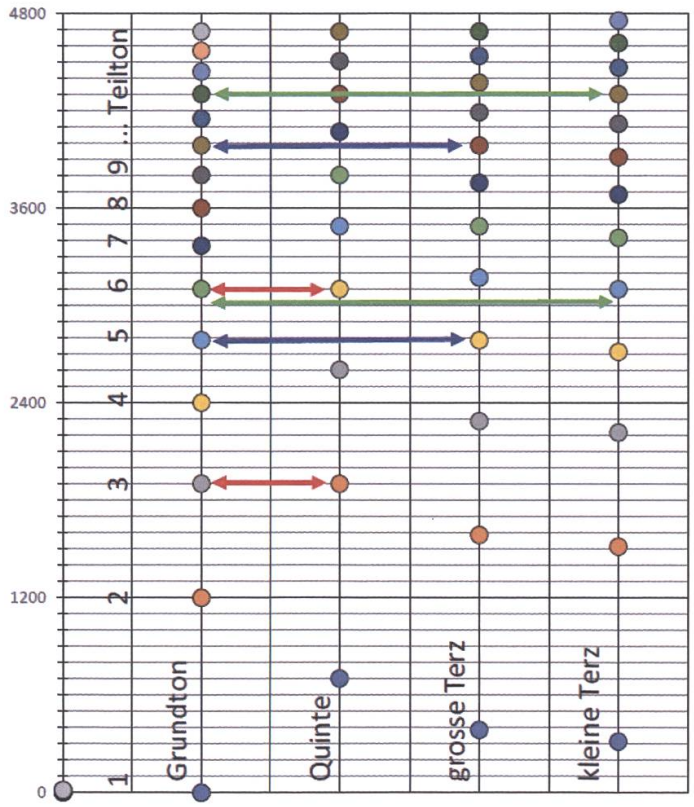


***Abb. 5**: Schwebungen: Die Pfeile zeigen die Schwebungen der Obertöne des Grundtones mit jenen der temperierten Quinte (rot), der grossen Terz (blau) oder der kleinen Terz (grün). (Grund für diese Schwebungen ist die Tatsache, dass die Quinte resp. die grosse oder kleine Terz gleichstufig temperiert ist und deshalb deren Obertöne nicht exakt mit den Obertönen des Grundtons übereinstimmen.)*

Tab.7: Berechnung der Schwebungen bei der gleichstufig temperierten Stimmung

Gleichstufige temperierte Stimmung *(alle Intervalle gleich gross: Halbton = $2^{1/12}$ = 1.059'463 = 100 Cent)* Basis a^1 = 440 Hz und c^1 = 261.625'565; c = 130.812'783; Grundton C = 65.406'391			
Intervall	Schwebungen zwischen:	Schweb.-Frequenz	Schwebung
C + G (Quinte)	1 O. + reine Q. ↔ temp. Q. + 1 O.	$F_C(3 - 2 \times 2^{7/12})$	0.22 Hz
	2 O. + reine Q. ↔ temp. Q. + 2 O.	$F_C(6 - 4 \times 2^{7/12})$	0.44 Hz
C + F (Quarte)	2 O. ↔ temp. Quarte + Q. + 1 O.	$F_C(4 - 3 \times 2^{5/12})$	-0.30 Hz
	3 O. ↔ temp. Quarte + Q. + 2 O.	$F_C(8 - 6 \times 2^{5/12})$	-0.60 Hz
C + E (gr. Terz)	2 O. + reine gr. T. ↔ temp. gr. T. + 2 O.	$F_C(5 - 4 \times 2^{4/12})$	-2.6 Hz
	3 O. + reine gr. T. ↔ temp. gr. T. + 3 O.	$F_C(10 - 8 \times 2^{4/12})$	-5.2 Hz
C + Es (kl. Terz)	2 O. + reine Q. ↔ temp. kl. T. + 2O. + reine gr. T.	$F_C(6 - 5 \times 2^{3/12})$	3.5 Hz
	3 O. + reine Q. ↔ temp. kl. T. + 3 O. + reine gr. T.	$F_C(12 - 10 \times 2^{3/12})$	7.0 Hz

Das Empfinden Wohlklang oder Missklang ist einerseits durch objektive, physikalische Kriterien der Schwebung gegeben, andererseits aber auch subjektiv, sowie zeit- und kulturabhängig. Was zu Mozarts Zeiten als Misston empfunden wurde, war in der späteren Romantik durchaus akzeptabel, und erst recht dann im 20. Jahrhundert. Dabei ist der Übergang Dissonanz zu Konsonanz fliessend. Die Dissonanz hat in der Musik eine wichtige Funktion, da sie ein Element der Spannung ist, die aber noch bis ins 19. Jh. meist auf die Auflösung in einem Wohlklang strebte. Mit Arnold Schönberg (1874-1951) wurde anfangs des 20. Jh. der Boden der Dur-Mol-Tonalität endgültig verlassen; er spricht in diesem Zusammenhang denn auch von der «Emanzipation der Dissonanz».

11. Gleichstufig oder gleichschwebend?

Die ersten Schritte weg von der pythagoreischen Stimmung hin zur Mitteltönigkeit wagten u.a. Arnold Schlick (1460-1521) und Gioseffo Zarlino (1517-1590), zu einer Zeit, als die reine Terz als ein das Tongeschlecht bestimmendes Intervall erkannt wurde. Die Quinten werden um ¼ syntonisches Komma vermindert, der Quintenzirkel geht aber damit noch nicht auf und es musste die mitteltönige Wolfsquinte in Kauf genommen werden. Andreas Werckmeister (1645-1706) entwickelte später wohltemperierte Systeme, bei denen das pythagoreische Komma auf mehrere Quinten verteil wird und so alle Tonarten brauchbar werden. Zuerst erfolge diese Aufteilung nicht gleichmässig, damit die meistgebrauchen Tonarten – soweit dies möglich war – weitgehend reine Quinten und Terzen behalten, jene mit vielen Vorzeichen entsprechend unreinere. Erst später kam man dann zur gleichstufig temperierten Stimmung, bei der alle Tonarten gleichbehandelt wurden. Wird das pythagoreische Komma gleichmässig auf alle zwölf Quinten verteilt, ergibt sich die **gleichmässig** oder **gleichstufig** temperierte Stimmung (Englisch: *Circular* oder *Equal Temperament*), im andern Fall spricht man von **wohltemperierter** Stimmung (*Well Tempered Tunig*), im Spezialfall, wenn alle zwölf Quinten gleichschnell schweben, von **gleichschwebend** temperierter Stimmung.

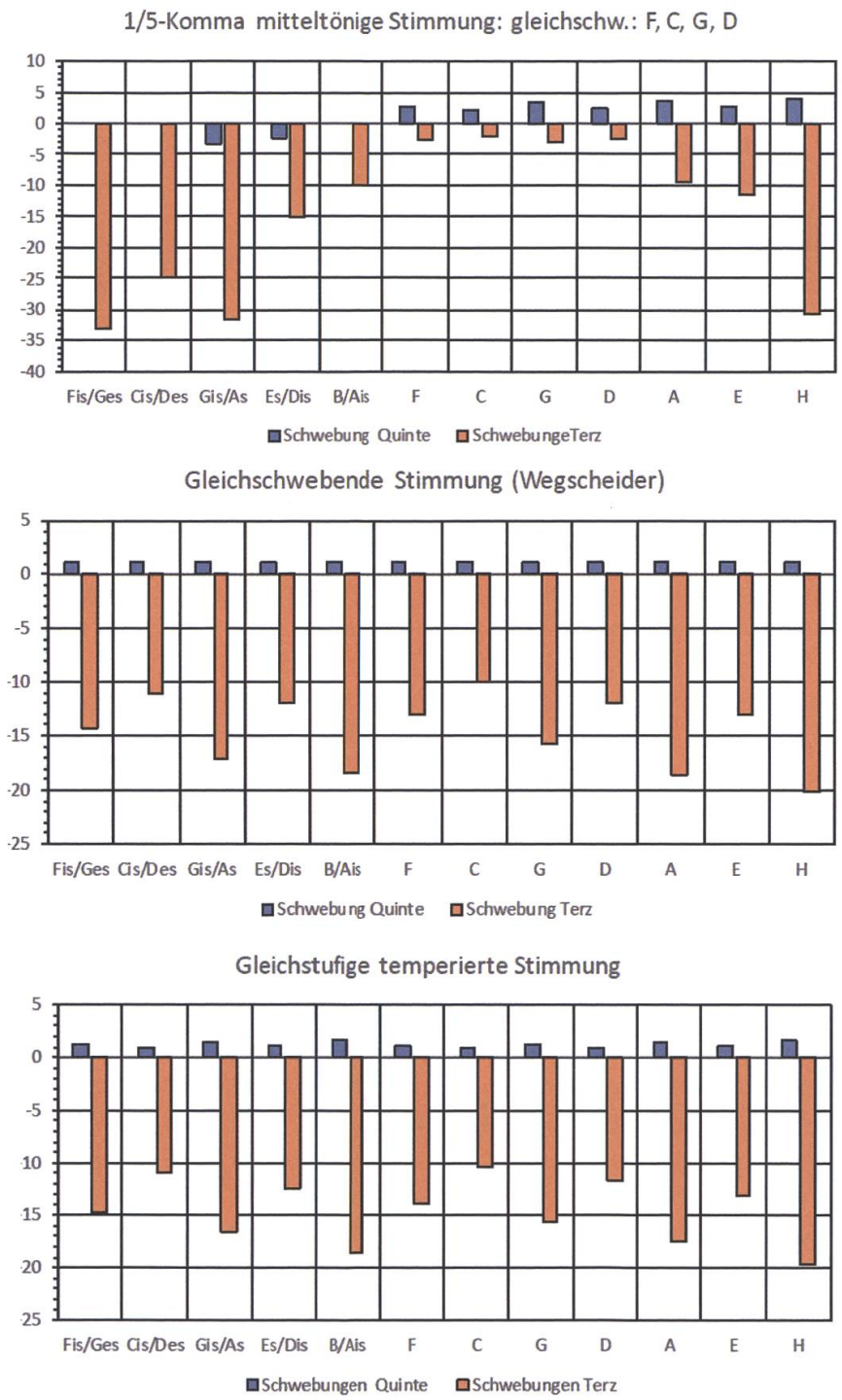


***Abb. 6**: **Oben:** gleichschwebend temperierte Stimmung (1/5-Komma mitteltönig), bei der einige Quinten (F, C, G und D) gleichschnell schweben wie die entsprechenden Terzen. **Mitte:** gleichschwebend temperierte Stimmung, bei der alle Quinten gleichschnell schweben. **Unten:** die gleichstufig temperierte Stimmung: die Schwebungsfrequenzen der Quinten und Terzen steigen mit der Tonhöhe leicht an.*

Tabelle 8: *Einige Namen zur mitteltönigen und zu den wohltemperierten Stimmungen*

Pythagoras von Samos	ca. 580 v.Ch. - ca. 495 v. Ch.	pythagoreische Stimmungen
Arnold Schlick	ca. 1460 - nach 1521	mitteltönige Stimmung
Gioseffo Zarlino	1517 - 1590	
Andreas Werckmeister	1645 - 1706	wohltemperierte Stimmungen
Johann Georg Neidhardt	1680 - 1739	
Jean-Philippe Rameau	1683 - 1764	
Francesco Antonio Vallotti	1697 - 1780	
Georg Andreas Sorge	1703 - 1778	
Johann Philipp Kirnberger	1721 - 1783	
Thomas Young	1773 - 1829	

Oft wird von gleichschwebend gesprochen, wenn eigentlich die gleichstufig temperierte Stimmung gemeint ist. Der Unterschied ist allerdings, wie auf den Beispielen von Abb. 6 ersichtlich, nicht gross. Bei der gleichstufig temperierten Stimmung steigt die Schwebungsfrequenz nämlich mit der Tonhöhe; so pulsiert beispielsweise die gleichstufig temperierte Quint F→c etwas schneller als C→G. Die Schwebungsfrequenz zwischen dem dritten Teilton des Grundtones (G) und dem zweiten Teilton der Quinte beträgt

$$3 \text{ x Grundton} - 2 \text{ x Quinte} = G\,(3 - 2 \text{ x } 2^{7/12}) = 0.003'858 \text{ x } G \text{ [Hz]}$$

und ist somit eine Funktion des Grundtones G. Entsprechendes gilt für die Terz, bei der der fünfte Teilton des Grundtones (G) mit dem vierten Teilton der Terz schwebt:

$$5 \text{ x Grundton} - 4 \text{ x Terz} = G\,(5 - 4 \text{ x } 2^{4/12}) = -\,0.039'684 \text{ x } G \text{ [Hz]}$$

Bei reinen Intervallen, also wenn bei diesen Formeln für die Quinte 3/2 beziehungsweise 5/4 für die Terz eingesetzt wird, verschwindet die Schwebung.

Mit gleichschwebend sind Stimmungsvarianten gemeint, bei denen die Quinten so unterschiedlich vermindert werden, sodass diese alle gleichschnell schweben oder – eine andere Variante – dass einige der Quinten gleichschnell unterschweben, wie die entsprechenden Terzen überschweben (Abb. 6). Bei den wohltemperierten Stimmungen mit einigen reinen und einigen unterschiedlich verminderten Quinten bleibt die Tonartencharakteristik erhalten. Das Wort «wohl» erhält hier, in der Sichtweise der Barockepoche, eine Bewertung, bei der ästhetische Kriterien und subjektives Empfinden mitspielen und mehr Bedeutung erhalten, als die rein mathematischen Kriterien unserer heutigen, mehr naturwissenschaftlich geprägten Zeit. Ein Beispiel für eine solche Stimmung wäre die 1/5-Komma mitteltönige Stimmung, wie sie, nach Georg Andreas Sorge (1703-1778), Gottfried Silbermann (1683-1753) bei seiner berühmten Orgel in Freiberg/Sachsen angewendet haben soll: Die 7 aufeinanderfolgende Quinten F→C→G→D→A→E→H werden um 1/5 des pythagoreischen Kommas vermindert, zwei Quinten (As und Es) um 1/5 des pythagoreischen Kommas vergrössert und die übrigen drei

Quinten (Fis, Cis und B) bleiben rein. Dadurch erreicht man, dass die Terz C→E gleichschnell überschwebt wie die Quinte C→G unterschwebt. Abb. 6 zeigt den Vergleich zwischen dieser letztgenannten, sowie der gleichschwebenden und der gleichstufig temperierten Stimmung. Bei einer anderen mitteltönigen Variante, der Sorge-Silbermann-Stimmung, werden elf Quinten um 1/6 pythagoreisches Komma (3.91 Cent) vermindert und die letzte (eine Wolfsquinte von 721.5 Cent) um 5/6 Komma (19.55 Cent) erweitert.

12. Die pythagoreische Stimmung

Es wird vermutet, dass Pythagoras von Samos (um 580 bis 495 v. Chr.) diese, heute nach ihm benannte Stimmung, als erster beschrieb. Bis ins Früh- und Hochmittelalter fügte man neun reine Quinten hintereinander von B→F→C→G→D→A→E→H →Fis. Die Töne B und Fis sollten dabei den damals als dissonant empfundenen pythagoreischer Tritonus[3] ($1.5^6 : 8 = 611.730$ Cent) vermeiden. Die Erweiterung auf zwölf Töne ergibt folgendes, zwei reine Quinten abwärts vom B über Es führen zum As und zwei reine Quinten aufsteigend von Fis über Cis zum Gis. Auf dem Klavier ist Gis und As auf derselben Taste, aber hier ergibt sich ein Unterschied von 23.460 Cent, das pythagoreische Komma, und damit auch eine unschöne Quinte, entweder Gis→Es oder Cis→As, die man als pythagoreische Wolfsquinte bezeichnet. Abgesehen vom grossen Nachteil der Wolfsquinte – was für die Musik des Mittelalters noch nicht problematisch war – gelten die elf reinen Quinten als Stärke der pythagoreischen Stimmung. (s. Abb. 7).

Tabelle 9: *Pythagoreische, reine Stimmung, ausgehend von A (bei a^1 = 440 Hz; c^1 = 260.741 Hz)*

Ton	Richtung	Frequenz	Formel	Frequenz-Verh. zu C	Cent
C	↓	260.740'740	$(2/3)^3 + 1O$	1.000'000	0.000
Cis/Des	↑	278.437'050	$(3/2)^4 - 3O$	1.067'871	113.685
D	↓	293.333'333	$(2/3)^1$	1.125'000	203.910
Dis/Es	↓	309.026'060	$(3/2)^6 + 3O$	1.185'185	294.135
E	↑	330.000'000	$(3/2)^1 - 1O$	1.265'625	407.820
F	↓	347.654'320	$(2/3)^4 + 2O$	1.333'333	498.045
Fis/Ges	↑	371.250'000	$(3/2)^3 - 2O$	1.423'828	611.730
G	↓	391.111'111	$(2/3)^2 + 1O$	1.500'000	701.955
Gis	↑	417.656'250	$(3/2)^5 - 3O$	1.601'807	815.640
As	↓	412.034'750	$(2/3)^7 + 4O$	1.580'247	792.180
A	Start	440.000'000	1	1.687'500	905.865
Ais/B	↓	463.539'090	$(2/3)^5 + 3O$	1.777'777	996.090
H	↑	495.000'000	$(3/2)^2 - 1O$	1.898'475	1109.775
c	↓	521.148'148	$(2/3)^3 + 2O$	2.000'000	1200.000

[3] Der Tritonus *(Mitte der Oktave, gleichstufig $2^{1/2}$ = 600 Cent)* ist als *Diabolus in Musica* ein Intervall mit grosser Spannung *(düster, schmerzlich, unheimlich, dämonisch)* das stark nach Auflösung strebt.

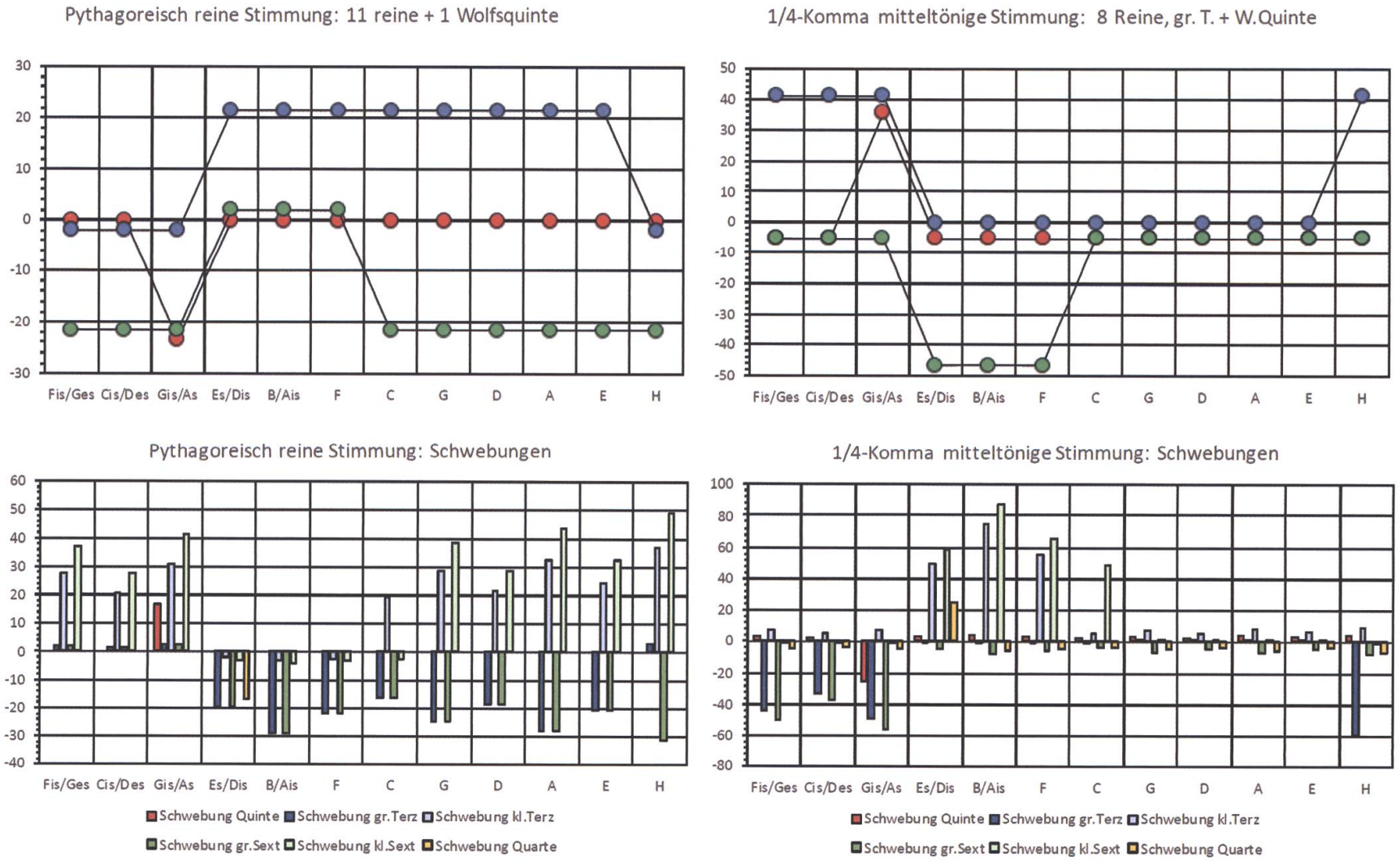


***Abb.** 7: Pythagoreische (mit 11 reine Quinten) und ¼-Komma mitteltönige (mit acht reinen Terzen) Stimmung. **Oben**: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), grosse Terz (blau), kleine Terz (grün). **Unten**: Schwebungen für sechs Intervalle (Berechnung siehe Text)*

13. Die ¼-Komma mitteltönige Stimmung

Der Lösung des nicht aufgehenden Quintenzirkels der pythagoreischen Stimmung kam um 1500 Arnold Schlick (1440-1521) näher. Er liess die Quinten *«etwas in die niedere schweben, soweit das Ohr leiden mag»*. Dadurch erreichte er, dass vier Quinten wieder auf eine reine Terz führen. Die mitteltönige Quinte ergibt $5^{1/4}$ = 1.495'349, entsprechend 696.578 Cent, und ist gegenüber der reinen Quint mit 1.5 (701.955 Cent) um ein Viertel syntonisches Komma tiefer. Die Abweichung zur reinen Quint beträgt 5.376 Cent, das ist ein Viertel von 21.506. In der englischsprachigen Literatur wird diese Stimmung daher *Quarter-Comma Meantone Tuning* genannt (s. Abb. 7 und 7a).

Zweimal vier mitteltönige Quinten nach oben (minus 4 Oktaven) führen zum Gis und vier solche nach unten (plus 3 Oktaven) zum As. Ebenso führen zwei aufsteigenden Terzen zum Gis (C-E-Gis) $(5/4)^2$ = 25/16 = 1.5625, während eine absteigende Terz (plus eine Oktave) führt zum As führt und 4/5 x 2 = 8/5 = 1.6 ergibt. Man muss also zwischen Gis und As wählen. Arnold Schlick wählte das Gis und so entstand zwischen Gis und Es ein unangenehmes Intervall, die mitteltönige Wolfsquinte mit einem Schwingungsverhältnis von 1.53124 gegenüber 1.5 bei der reinen Quint, der Unterschied beträgt 35.686 Cent. Die drei Terzen-Dreiecke (Abb. 3 und 7a) C→E→As, F→A→Cis, B→D→Fis und Es→G→H sind gleichschenklig, d.h. die ersten beiden Terzen sind rein mit F=1.25 (386.313 Cent), die dritte mit F=1.28 (427.372 Cent) um 41.059 Cent zu gross. Bei den kleinen Terzen sind es neun mit 310.265 Cent und drei mit 269.205 Cent (die reine, kleine Terz wäre 315.561 Cent, die gleichstufige 300 Cent).

***Tabelle 10**: Berechnung der ¼-Komma mitteltönigen Stimmung (a^1 = 440 Hz; c^1 = 263.181 Hz)*

	Anzahl MT-Quinten	Anzahl Oktaven	Formel	Formel	Frequenz-Verhältnis	Cent
C	0	0	q^0/O^0	1	1.000'000	0.000
Cis/Des	7	-4	q^7/O^4	$5^{7/4} / 2^4 = (5/16)\ 5^{3/4}$	1.044'907	76.049
D	2	-1	q^2/O^1	$5^{2/4} / 2^1 = (1/2)\ 5^{1/2}$	1.118'034	193.157
Dis/Es	-3	+2	O^2/q^3	$2^2 / 5^{3/4} = (4/5)\ 5^{1/4}$	1.196'279	310.265
E	4	-2	q^4/O^2	$5^{4/4} / 2^2 = (5/4)$	1.250'000	386.314
F	-1	+1	O^1/q^1	$2^1 / 5^{1/4} = (2/5)\ 5^{3/4}$	1.337'481	503.422
Fis/Ges	6	-3	q^6/O^3	$5^{6/4} / 2^3 = (5/8)\ 5^{1/2}$	1.397'542	579.470
G	1	0	q^1/O^0	$5^{1/4} / 2^0 = 5^{1/4}$	1.495'349	696.579
Gis/As	8	-4	q^8/O^4	$5^{8/4} / 2^4 = (25/16)$	1.562'500	772.627
A	3	-1	q^3/O^1	$5^{3/4} / 2 = (1/2)\ 5^{3/4}$	1.671'851	889.736
Ais/B	-2	+2	O^2/q^2	$2^2 / 5^{2/4} = (4/5)\ 5^{1/2}$	1.788'854	1006.843
H	5	-1	q^5/O^1	$5^{5/4} / 2 = (5/4)\ 5^{1/4}$	1.869'186	1082.892
C	0	-6	O^1	2	2.000'000	1200.000

Man erhält so eine Stimmung, die über acht reine Terzen verfügt, während die Terzen Gis→c, Cis→F, Fis→B und H→dis etwas zu gross sind, sowie elf fast reine Sexten und elf fast reine Quinten, ausser der erwähnten Wolfsquinte Gis-es, auf die der ganze Fehler

des Quintenzirkels kumuliert wird. Die Dur-Tonarten mit wenig Vorzeichen wie C, D(2#), E(4#), Es(3b), F(1b), G(1#), A(3#) und B(2b) tönen rein, diejenigen auf Des(5b), Ges(6b), As(4b) und H(7b oder 5#) dagegen eher unrein, insbesondere das Gis-Dur mit der Wolfsquinte. Die Parallel-moll-Tonarten liegen jeweils eine kleine Terz tiefer: Die reinen sind a, h(2#), cis(4#), c(3b), d(1b), e(1#), fis(3#) und g(2b), die unreinen f(4b), b(5b), es(6b) und as(7b oder 5#).

Es wird also für diese ¼-Komma-mitteltönige Stimmung von der reinen Terz mit 5/4=1.25 (entsprechend 386.313 Cent) ausgegangen. Diese ergibt sich aus vier Quinten minus zwei Oktaven. Die reine Terz über zwei Oktaven muss somit auf vier Quinten verteilt werden. Das ergibt für die mitteltönige Quinte q:

$$q = [(5/4)2^2]^{1/4} = 5^{1/4} = 1.495'349 \text{ (entsprechend 696.579 Cent)}$$

statt bei der reinen Quinte von 3/2 = 1.5 (entsprechend 701.955 Cent)

Der Ganzton als Mitte der reinen Terz von $(5/4)^{1/2} = ½\ 5^{1/2} = 1.118'034$ beträgt 193.157 Cent. Dies ergibt sich auch aus dem Mittel der kleinen (10/9) und grossen (9/8) Sekunde, also $[(10/9) \times (9/8)]^{1/2} = (5/4)^{1/2}$. Hieraus ergibt sich auch der Name «Mitteltönige Stimmung».

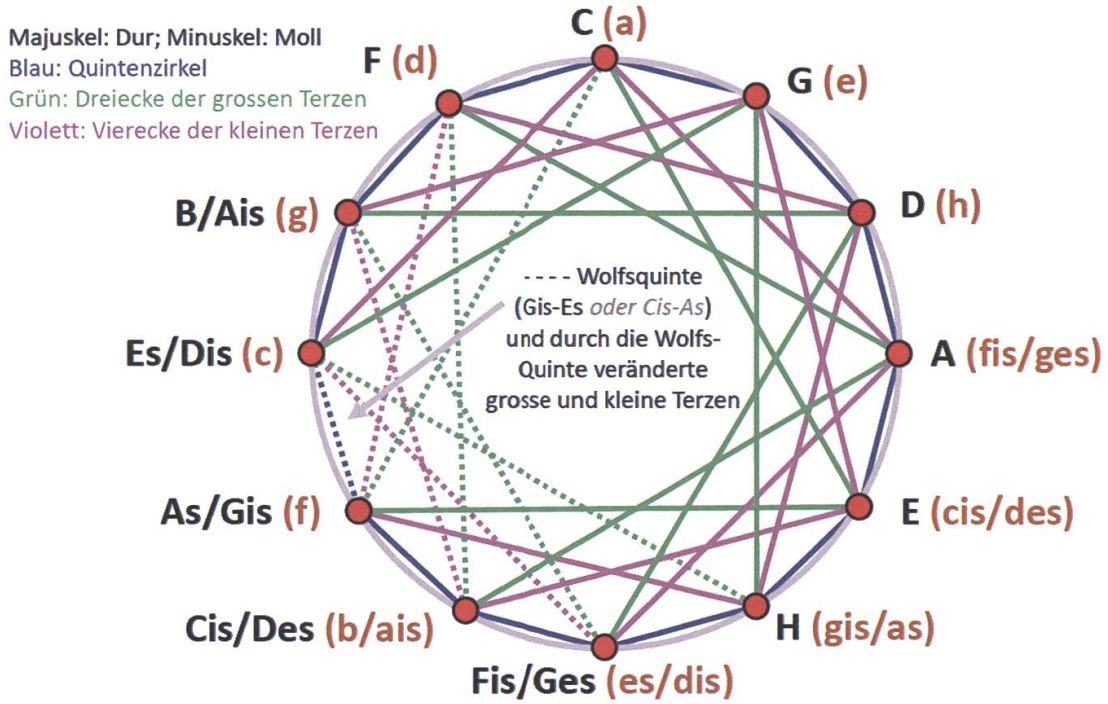


***Abb. 7a**: Die mitteltönige Stimmung mit acht reinen Terzen (ausgezogene Linien), vier zu grossen Terzen (unterbrochene Linien), elf mitteltönigen Quinten (ausgezogene Linien), einer mitteltönigen Wolfsquinte Es/Dis – As/Gis (unterbrochene Linie), neun leicht verminderte kleine Terzen (ausgezogene Linien) und drei stärker verkleinerte kleinen Terzen (unterbrochene Linien).*

Eine gemilderte Form der mitteltönigen ist die 1/5-Komma-Stimmung. Hier werden drei Quinten (Dis/Es, Ais/B und F) rein gelassen, acht Quinten (C, G, D, A, E, H, Fis/Ges und Cis/Des) werden um 1/5 des syntonischen Kommas (21.506/5 = 4.3 Cent) vermindert und die noch verbleibenden zwölfte Quinte (Gis/As) ist dann mit rund 11 Cent über der reinen Quinte nicht mehr so stark verstimmt wie die mitteltönige. Abb. 8 (oben) zeigt oben eine solchen 1/5-Komma-mitteltönigen Stimmung. Die Brauchbarkeit von Tonarten mit vielen Vorzeichen wird jetzt weniger eingeschränkt. Solche und ähnliche Varianten gemilderter Mitteltönigkeit wurden von vielen Orgelbauern (wie etwa die rekonstruierte Stimmung der Gabler-Orgel im Kloster Weingarten in Abb. 8 (unten) angewendet und sind denn auch Zwischenstufen zu den wohltemperierten Stimmungen.[4]

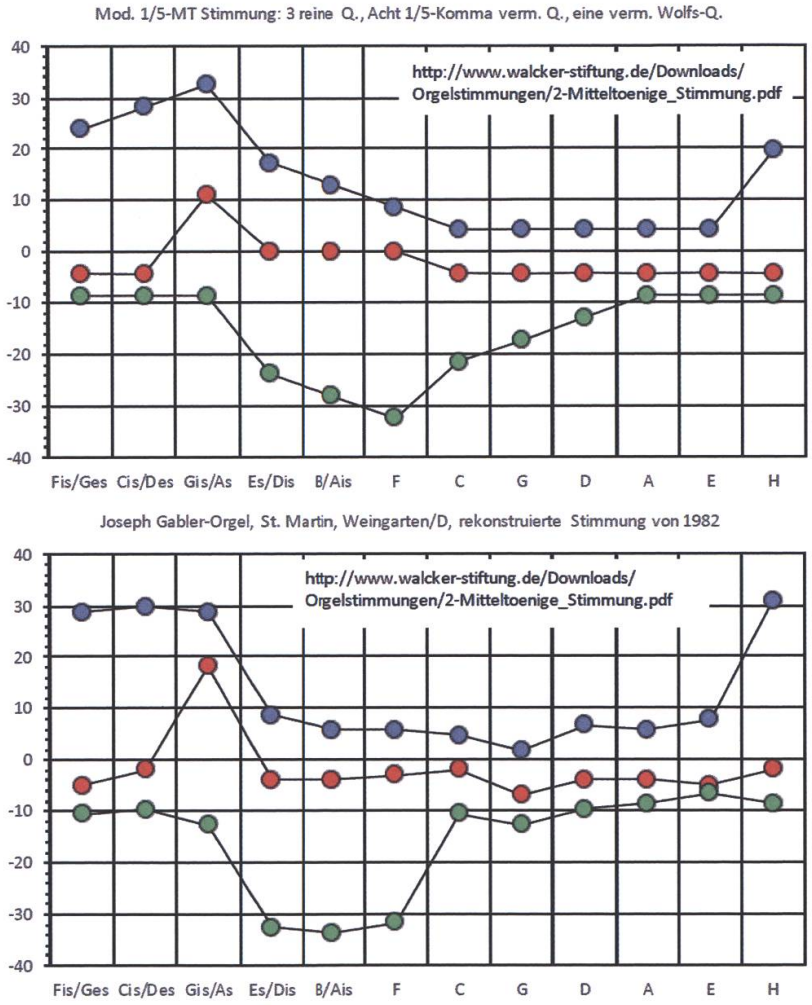


Abb. 8: *Abweichung zu rein: Oben berechnete 1/5-Komma modifizierte, mitteltönige Stimmung (Walcker). Unten: 1982 rekonstruierte Stimmung: Gabler-Orgel (1750) im Kloster Weingarten/D. 11 Quinten sind vermindert, die Wolfsquinte (Gis/As) vergrössert. (Quinten, gr. Terzen, kl. Terzen).*

[4] http://www.walcker-stiftung.de/Downloads/Orgelstimmungen/2-Mitteltoenige_Stimmung.pdf

14. Die Varianten der wohltemperierten Stimmung

Um die Beschränkungen der mitteltönigen Stimmung mit ihrer Wolfsquinte zu vermeiden, mussten andere Lösungen gefunden werden. Andreas Werckmeister (1645-1706) war einer der ersten, der Varianten von so genannten wohltemperierten Stimmungen veröffentlichte. Auf der Titelseite seiner *Orgel Probe* von 1692 schreibt er: *«Unterricht, Wie durch Anweiß und Hülffe des Monochordi ein Clavier wohl zu temperiren und zu stimmen sei, damit man nach heutiger Manier alle modos fictos in einer erträglichen und angenehmen harmoni vernehme.»* Herbert Kelletat beschreibt das Ziel wohltemperierter Stimmungen in moderneren Worten folgendermassen: *«Wohltemperierung heisst mathematisch-akustische und praktisch-musikalische Einrichtung von Tonmaterial innerhalb der zwölfstufigen Oktavskala zum einwandfreien Gebrauch in allen Tonarten auf der Grundlage des natürlich-harmonischen Systems mit Bestreben möglichster Reinerhaltung der diatonische Intervalle. Sie tritt auf als proportionsgebundene, sparsam temperierende Lockerung und Dehnung des mitteltönigen Systems, als ungleichschwebende Semitonik und als gleichschwebende Temperatur.»* (Herbert Kelletat: *Zur musikalischen Temperatur*, Band 1, 1961, Merseburger Verlag, Kassel, 1961).

Es sollten auf diese Weise alle zwölf Dur- und zwölf Moll-Tonarten brauchbar werden, wobei allerdings diejenigen mit wenig Vorzeichen besser tönen sollten, als jene mit vielen Vorzeichen. Gleichzeitig sollten möglichst viele Quinten und Terzen rein oder annähernd rein bleiben. Da es elektronische Stimmgeräte erst seit den 70er-Jahren des 20. Jh. gibt, wurde lange Zeit nach Gehör gestimmt, indem Schwebungen gezählt wurden, meist unter Benutzung eines Metronoms. Ausgangspunkt war in der Regel der Kammerton a^1 einer Stimmgabel oder einer Orgelpfeife.[5]

Mittlerweile gibt es hunderte von Varianten von Stimmungen, die als wohltemperiert bezeichnet werden. Allen gemeinsam ist, dass von den 12 Quinten einige rein gelassen, einige leicht vermindert und einige weitere etwas stärker verkleinert werden. Die Verminderung wird meist als Bruchteil des pythagoreischen Kommas von 23.460 Cent angegeben. Beispielsweise vier Quinten mit -1/6 und vier Quinten mit -1/12 des pythagoreischen Kommas; die verbleibenden vier Quinten bleiben rein. Dies ergibt: 4 x 1/6 + 4 x 1/12 = 1 pythagoreisches Komma. Damit erhält man einige fast reine Terzen und Quinten, die Tonartencharakteristik bleibt erhalten und alle Tonarten sind spielbar.

Es scheint, dass Orgelbauer bezüglich der Stimmung eher konservativ waren (oder noch immer sind) und reine Intervalle bevorzugen. Beispielsweise stimmte Gottfried Silbermann seine Orgeln noch lange mitteltönig, was durch diesbezügliche Meinungsverschiedenheiten mit Johann Sebastian Bach belegt ist. Es gibt zwei Gründe wieso sich

[5] Im 17. Jh. war der Kammerton a^1 tiefer als heute: Deutschland: 415 Hz, Frankreich: 392 Hz. Die Pariser Stimmung von 1788 legte 409 Hz fest; 1885 wurde 435 Hz beschlossen; seit 1939 gilt 440 Hz.

bei den Orgeln mitteltönige Stimmungen länger halten konnten: Erstens sind Schwebungen bei der Orgel besser hörbar als bei anderen Tasteninstrumenten. Zweitens verstimmen sich Orgeln zwar weniger schnell *(die Stimmung bei den Labialpfeifen ist temperaturabhängig nicht jedoch jene der Zungenpfeifen; da jedoch letztere weniger zahlreich sind, werden, um Zeit zu sparen, meist die Zungenpfeifen nachgestimmt)*, dafür ist das Stimmen wesentlich zeitaufwändiger als beim Cembalo oder beim Klavier, da für jeden Ton meist alle Register gestimmt werden müssen und hierzu nebst dem Orgelbauer und (früher) dem Kalkanten (Balgtreter) noch eine weitere Person erforderlich waren.

In seiner Doktorarbeit an der Universität Barcelona von 2001 hat Sergio Martínez Ruiz (*Temperament in Bach's Well-Tempered Clavier: A Historic survey and a new evaluation according to dissonace theory*) über Hundert als wohltemperierte bezeichnete Stimmungen aufgelistet und ausgewertet. Seine Zusammenstellung beginnt bei Andreas Werckmeister (1691) und den weiteren Pionieren der wohltemperierten Stimmungen, wie u. a. Johann Philipp Kirnberger, Georg Andreas Sorge, Johann Georg Neidhardt, Francesco Antonio Vallotti und Thomas Young (s. Abb. 9). Der Schwerpunkt seiner Arbeit liegt jedoch bei der «Entdeckung» der Bach-Girlande und des Bach-Siegels als vermutete Stimmanleitung von Johann Sebastian Bach durch Andreas Sparschuh und deren praktische Umsetzung durch Herbert Anton Kellner, Herbert Kelletat, Bernhard Billeter, Bradley Lehmann, Mark Lindely und weitere. Auf diese neue, so genannt Bach-Stimmung wird im folgenden Kapitel eingegangen (s. Abb. 10).

15. Die rekonstruierten «Bach-Stimmungen»

Wie Bach seine Instrumente stimmte *(gemeint sind hier vor allem die Tasteninstrumente – jedoch ohne die Orgel – die der geübte Spieler selbst in kurzer Zeit stimmen konnte)*, ist uns nicht überliefert, ausser vielleicht durch die weiter unten beschriebene Anekdote des Orgelbauers Kristian Wegscheider. Johann Nikolaus Forkel (1749-1818) berichtet, dass Bach höchstens eine Viertelstunde benötigte, um sein Clavichord zu stimmen. Die Orgeln wurden aus den bereits geschilderten Gründen vermutlich noch länger mitteltönig gestimmt als die anderen Tasteninstrumente.

Dass Johann Sebastian Bach nach Stimmverfahren suchte – und offenbar auch gefunden hatte – bei dem alle Tonarten (sowohl in Moll als auch in Dur) benutzt werden konnten, hat er mit seinem *Wohltemperierten Clavier* bewiesen. Es gilt aber heute als erwiesen, dass Bach keine gleichstufig temperierte Stimmung verwendete; dies war auch mehr im Sinne des musikalischen Empfindens der Barockzeit. Bei den wohltemperierten Stimmungen bleibt die Tonartencharakteristik nämlich erhalten aber die Wolfsquinte vermieden. Sie bleiben jedoch, wie auch die gleichstufige Stimmung, Kompromisse, bei welchen der nicht aufgehende Quintenzirkel auf mehrere, leicht vom reinen Intervall abweichende Quinten, verteilt wird. Bei der gleichstufigen Stimmung geschieht dies gleich-

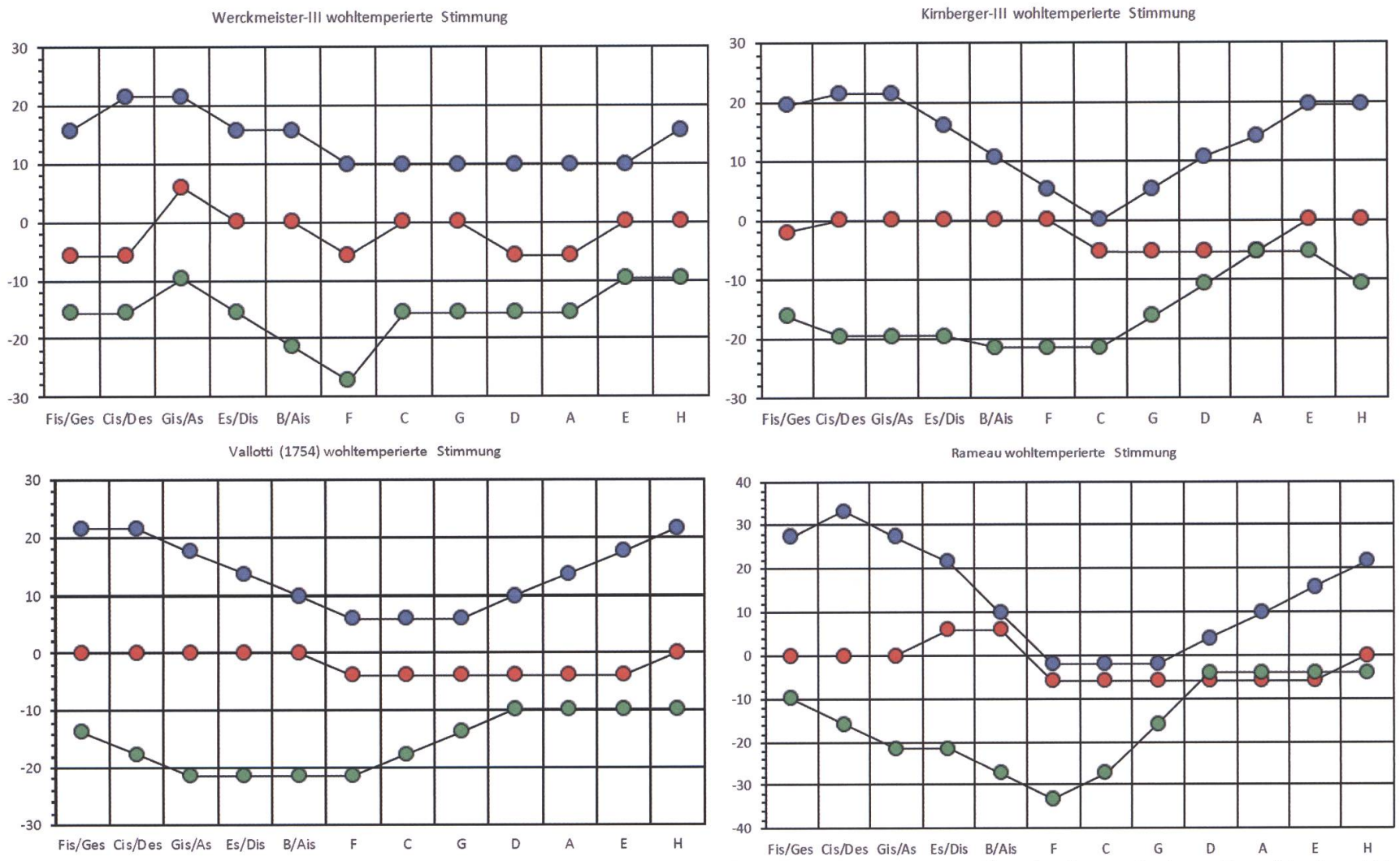


***Abb. 9**: Historische, wohltemperierte Stimmungen: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), gr. Terz (blau) und kl. Terz (grün): A. Werckmeister-III, Ph. Kirnberger-III, F. A. Vallotti, J.-Ph. Rameau. Datenquelle: www.instrument-tuner.com*

mässig, bei der wohltemperierten ungleichmässig, indem einige Quinten rein, einige leicht und einige stärker enger (kleiner) gestimmt werden.

Lange Zeit bestanden lediglich Spekulationen darüber, wie Johann Sebastian Bach seine Instrumente stimmt, bis dann im Jahr 1976 das Bach'sche Familiensiegel durch Herbert Anton Kellner und im Jahr 1999 die Girlande auf dem Titelblatt des *Wohltemperierten Clavier* durch Andreas Sparschuh als Stimmanleitung interpretiert wurden (Abb. 13). Etwas abenteuerlich mutet ein Bericht auf der Webseite des Orgelbauers Kristian Wegscheider aus Dresden an[6], der angeblich in einer kleinen Kirche in der Nähe von Leipzig den Brief eines Hausdieners der Familie Bach, namens H. C. Snerha entdeckte, in dem dieser seinem Neffen das Bach'sche Stimmverfahren erläutert. Der Wahrheitsgehalt dieser Anekdote lässt sich nicht überprüfen, wir halten es daher mit dem italienischen Sprichwort: *«Se non è vero, è ben trovato!»* ... *«Wenn es nicht wahr ist, so ist wenigstens gut erfunden!»*, oder mit dem Schiller-Zitat aus dem Prolog zu Wallensteins Lager: *«Ernst ist das Leben, heiter die Kunst»*. Dreht man diesen Namen nämlich um, dann entsteht das Wort *Ahrens C.H.*, was auf den Musikwissenschaftler Christian Ahrens, geboren 1943 in Berlin, Professor a. D. an der Ruhr-Universität Bochum, hinweisen könnte. Leider ist der besagte Brief kurz nach dem Fund beim Brand der Kirche zerstört worden, was eine nachträgliche Überprüfung verunmöglicht.

Die Idee, die Girlande auf dem Deckblatt des *Wohltemperierten Claviers* als Stimmanleitung zu interpretiere wurde von Andreas Sparschuh an einem Vortrag auf der Jahrestagung 1999 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Mainz zum ersten Mal präsentiert *(Quelle: Andreas Sparschuh: Stimm-Arithmetik des wohltemperierten Klaviers von J. S. Bach. In: Deutsche Mathematiker-Vereinigung Jahrestagung 1999, S. 154–155)*. Bereits einige Jahre zuvor hatte Herbert Anton Kellner in seinen Buch *Wie stimme ich selbst mein Cembalo* (Das Musikinstrument, 1976) seine Interpretation des Bach-Siegels als hypothetische Stimmanleitung veröffentlicht.

Grundsatz aller dieser sogenannten «Bach-Stimmungen» – wie generell allen wohltemperierten Stimmungen – ist, dass diese einige Quinten rein lassen, einige leicht, und einige weitere etwas stärker vermindern. Dadurch sind die einzelnen Tonarten nicht alle gleich und die Tonartencharakteristik bleibt erhalten. Damit entstehen auch unterschiedliche Terzen, die jedoch alle grösser als die reine Terz sind. Acht Beispiele historischer und sechs neuerer wohltemperierter Stimmungen, sind, anhand der Abweichungen der temperierten gegenüber den reinen Quinten, auf Abb. 11 graphisch dargestellt. Angegeben ist, um wie viele pythagoreische Kommatas die einzelnen Quinten beim Stimmen zu vermindern sind. Die graphische Darstellung der entsprechenden Stimmungen ist auf Abb. 10 zu sehen sind.

---

[6] Quelle:
http://www.wegscheiderorgel.de/html/artikeld814.html?filename=artikel.php&tabname=Artikel&sz=22&Unterpunkt=H.C.%20Snerha%20und%20die%20Bachstimmung

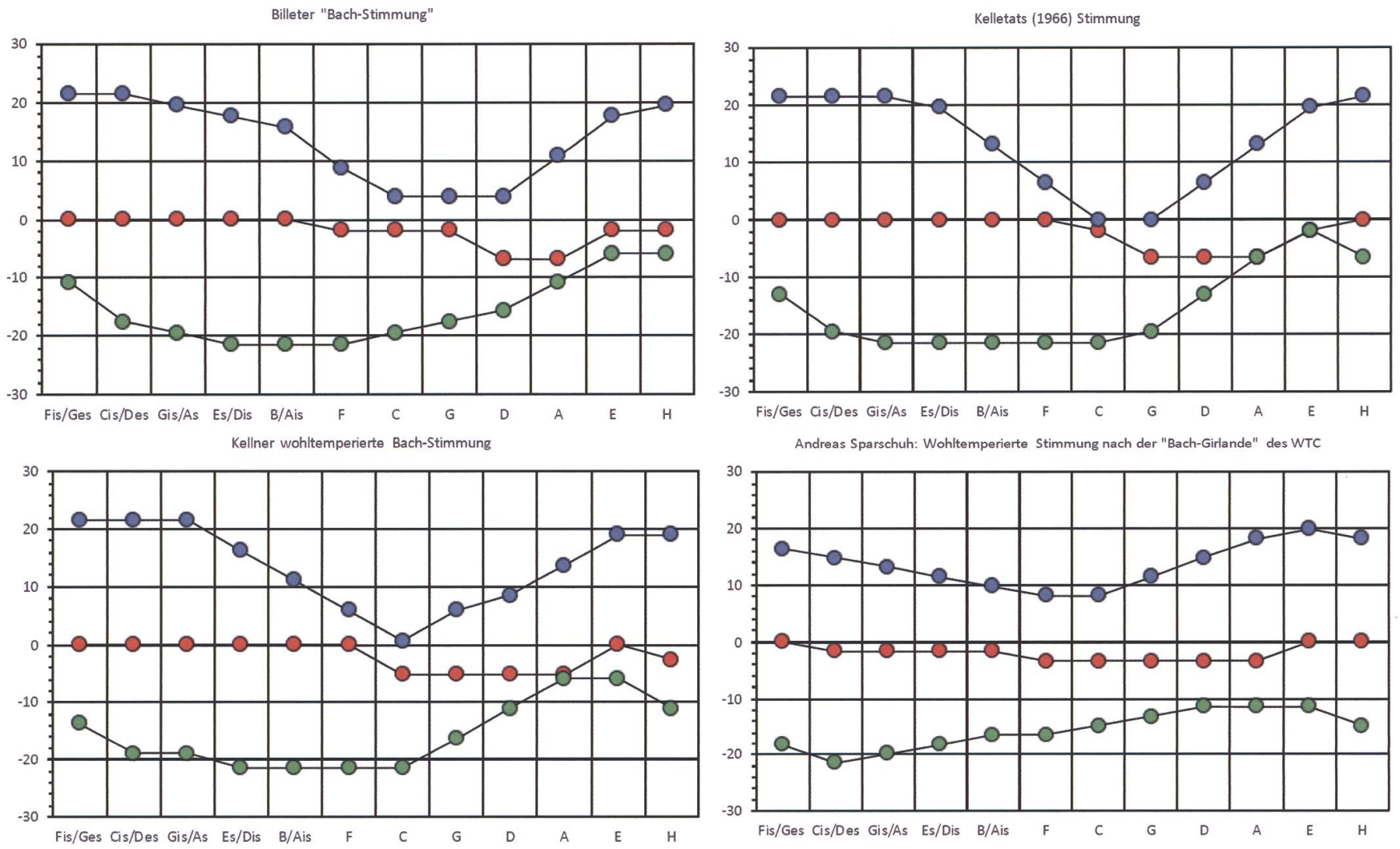
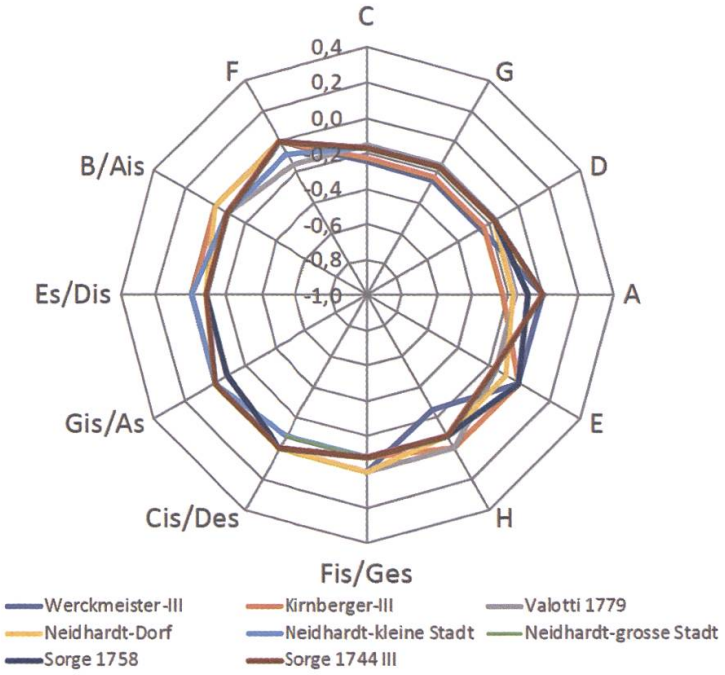


***Abb. 10**: Rekonstruierte, so genannte wohltemperierte Bach-Stimmungen: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), gr. Terz (blau) und kl. Terz (grün): B. Billeter, H. Kelletat, H. A. Kellner und A. Sparschuh (gem. «Bach-Girlande»). Daten: www.instrument-tuner.com*



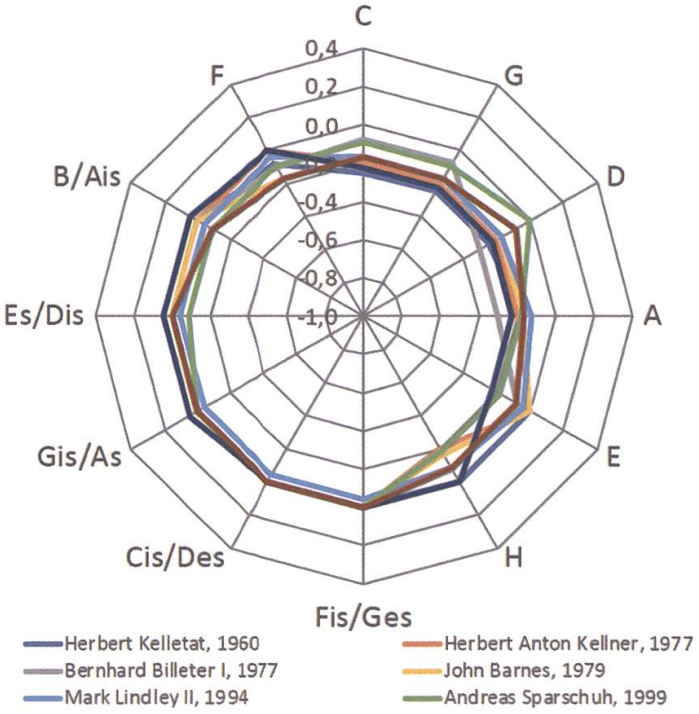
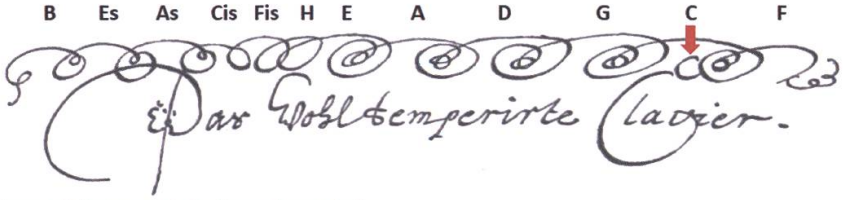


***Abb. 11**: Stimmung der Quinten (Verminderung in Anzahl pythagoreischer Kommata) bei wohl–temperierten Stimmungen: Oben die «Pioniere» und unten gemäss der Interpretation des Bach-Siegels und der Bach'sche Girlande des «Wohltemperi(e)rten Clavier». Die Quinten auf der rechten Seite des Quintenzirkels (F bis H) werden mehr vermindert, als jene auf der linken Seite.*

***Abb. 12**: Das Siegel von Johann Sebastian Bach auf deutschen Briefmarken (Quelle: Internet)*

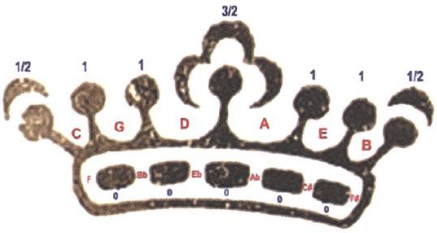
Die Girlande auf dem Deckblatt des Autographs aus dem Bach'schen «Wohltemperierten Clavier» als Stimmanleitung? (nach Andreas Sparschuh)



Stimmanleitung nach Andreas Sparschuh:

- 3 Schlaufen ohne Kringel = reine Quinte: Cis, Fis, H *(Δ_C = 0 Cent)*
- 4 Schlaufen mit einem Kringel = etwas engere Quinte: F, B, Es, As *(z.B. Δ_C = -1.675'714 Cent)*
- 5 Schlaufen mit zwei Kringeln = noch etwas engere Quinte: E, A, D, G, C *(z.B. Δ_C = -3.351'429 Cent)*

Das Bach'sche Siegel als Stimmanleitung? (nach Herbert Anton Kellner)



Stimmanleitung nach H. A. Kellner:

- Rein (abwärts): F, B, Es, As & Cis;
- ½ Schwebungen: F-C & Fis-H;
- 1 Schwebung: C-G, G-D, H-E, E-A
- 3/2 Schwebungen: D-A (Kontrolle)

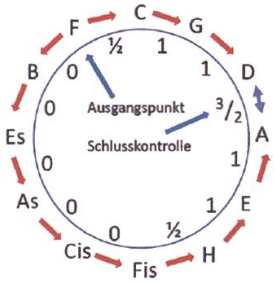


***Abb. 13:** Die Bach'sche Girlande des Deckblattes vom Autograph des Wohltemperi(e)rten Clavier und das Bach-Siegel als Stimmanleitung? Unten die Erklärung in Tabellenform: In den oberen drei Zeilen die Abweichung der Quinten in Anteilen des pythagoreischen Kommas von 23.460 Cent (die Summe soll wieder =1 ergeben), gemäss und der Interpretation der Bach-Girlande durch Andreas Sparschuh von 1999. In der untersten Zeile die Anzahl Schwebungen der verminderten Quinten gemäss der Interpretation des Bach-Siegels durch Herbert Anton Kellner von 1976.*

Ton	b/ais	es/dis	as/gis	des/cis	ges/fis	h	e	a	d	g	c	f
Quinte	(-)	(-)	(-)	0	0	0	(--)	(--)	(--)	(--)	(--)	(-)
pyth. K.	*-1/14*	*-1/14*	*-1/14*	*0*	*0*	*0*	*-2/14*	*-2/14*	*-2/14*	*-2/14*	*-2/14*	*-1/14*
Cent	*-1.6757*	*-1.6757*	*-1.6757*	*0*	*0*	*0*	*-3.3514*	*-3.3514*	*-3.3514*	*-3.3514*	*-3.3514*	*-1.6757*
Schweb	*0*	*0*	*0*	*0*	*1/2*	*1*	*1*	*3/2*	*1*	*1*	*1/2*	*0*

16. Die gleichstufig temperierte Stimmung

In diesem Fall werden alle zwölf Quinten gleichmässig vermindert. Die Oktave wird auf 12 gleiche Halbtonschritte von je $2^{1/12}$ = 1.059'463 entsprechend 100 Cent unterteilt. Die Quinte mit $2^{7/12}$ = 1.498'307 entspricht dann 700 Cent, also um 1.955 Cent weniger als die reinen Quinten mit 1.5, entsprechend 701.955 Cent. Der Quintenzirkel ist jetzt beim c^6 wieder geschlossen, da $1.498'307^{12} = 2^7 = 128$ ergibt. Sieben temperierte Halbtöne führen wieder auf die temperierte Quinte mit $1.059'463^7$ = 1.498'307. Die gleichstufige Stimmung, deren Frequenzen auf der Tabelle 11 zusammengestellt sind, hat den Vorteil der Universalität, da alle zwölf Dur-Tonarten wie auch alle zwölf Moll-Tonarten gleich gut *(oder gleich verstimmt)* tönen. Wesentlicher Nachteil dieser Stimmung ist nebst, dem Verlust der Tonartencharakteristik, die gegenüber den reinen Intervallen vert–stimmten Terzen (+13.686 Cent) und Sexten (–15.641 Cent). (Schwebungen s. Abb. 14).

***Tabelle 11**: Frequenzen der gleichstufig temperierten Stimmung auf Basis: a^1 = 440 Hz*

Ton	C_2	C_1	C_0	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4
C	16.3516	32.7032	65.4064	130.8128	261.6256	523.2511	1046.5023	2093.0045
Cis/Des	17.3239	34.6478	69.2957	138.5913	277.1826	554.3653	1108.7305	2217.4610
D	18.3540	36.7081	73.4162	146.8324	293.6648	587.3295	1174.6591	2349.3181
Dis/Es	19.4454	38.8909	77.7817	155.5635	311.1270	622.2540	1244.5079	2489.0159
E	20.6017	41.2034	82.4069	164.8138	329.6276	659.2551	1318.5102	2637.0205
F	21.8268	43.6535	87.3071	174.6141	349.2282	698.4565	1396.9129	2793.8259
Fis/Ges	23.1247	46.2493	92.4986	184.9972	369.9944	739.9888	1479.9777	2959.9554
G	24.4997	48.9994	97.9989	195.9977	391.9954	783.9909	1567.9817	3135.9635
Gis/As	25.9565	51.9131	103.8262	207.6523	415.3047	830.6094	1661.2188	3322.4376
A	27.5000	55.0000	110.0000	220.0000	440.0000	880.0000	1760.0000	3520.0000
Ais/B	29.1352	58.2705	116.5409	233.0819	466.1638	932.3275	1864.6550	3729.3101
H	30.8677	61.7354	123.4708	246.9417	493.8833	987.7666	1975.5332	3951.0664
C	32.7032	65.4064	130.8128	261.6256	523.2511	1046.5023	2093.0045	4186.0090

17. Stimmungsvarianten mit angepasster Oktav nach Serge Cordier

Bei jeder Stimmvariante müssen gewisse Intervalle gegenüber den reinen geringfügig vermindert (Quinten), beziehungsweise vergrössert (grosse Terzen) werden, um den Quintenzirkel zu schliessen. In seinem Buch *Piano bien tempéré et justesse orchestrale* (Buchet/Chastel Paris, 1982) schlägt Serge Cordier eine Stimmvariante vor, bei der anstelle der Quinten die Oktaven leicht vergrössert werden. Er erachtet nämlich die reine Quinte als wesentlich wichtigeres (*fonctonnel*) Intervall, sodass ohne weiteres die leicht vergrösserten Oktaven, aber auch Terzen und Sexten, in Kauf genommen werden könn-

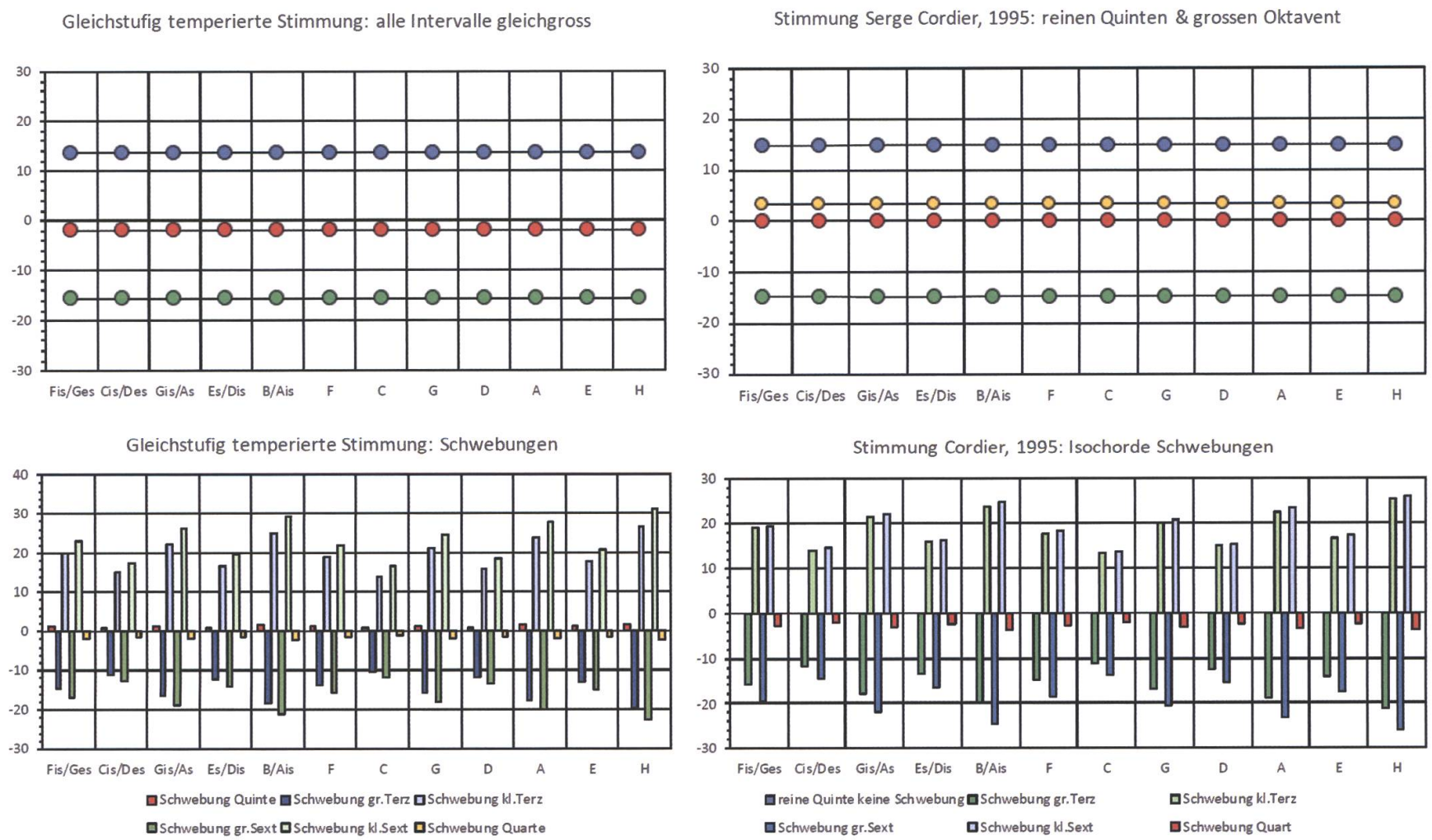


***Abb. 14**: Gleichstufige Stimmung (L) und Stimmung nach Serge Cordier (R): mit reinen Quinten und vergr. Oktave. **Oben**: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), grosse Terz (blau), kleine Terz (grün), und Oktave (gelb). **Unten**: Schwebungen (Berechnung siehe Text)*

ten. Solange es sich nur um wenige Cent handelt, dürfte dies auch für das Ohr noch erträglich sein. Seine theoretischen Überlegungen basieren im Wesentlichen auf der Analyse der Schwebungen der Obertöne von (grossen und kleinen) Terzen und Sexten, sowie der Quarten mit den auf dieselbe Note fallenden Obertönen des Grundtones.

Der Vorschlag von Serge Cordier führt zu einer Stimmung mit zwölf reinen Quinten. Da diese gegenüber der gleichstufig temperierten um +1.955 Cent zu gross ist, ergeben zwölf Quinten das pythagoreische Komma von +23.460 Cent. Dieses wird nun auf sieben Oktaven verteilt und damit die Oktave um +3.351 Cent vergrössert ist. Der Quintenzirkel schliesst sich jetzt wieder, die Terzen sind aber mit 401.117 Cent deutlich zu gross, sogar noch grösser als bei der gleichstufig temperierten Stimmung. Die Brauchbarkeit der Stimmung mit angepasster Oktave müsste allerdings praktisch erprobt werden, auch um festzustellen für welche Musikepoche sie sich am besten eignen würde. Es scheint, dass die Inharmonizität der Klaviersaiten (verursacht durch deren Steifigkeit) der Cordier-Stimmung etwas entgegenkommt, da die Obertöne einer schwingenden Saite etwas höher sind, als die theoretischen Obertöne.

***Tab. 12**: Die Stimmung nach Serge Cordier (1995) mit reinen Quinten aber um 1.955 Cent vergrösserten Oktaven (nämlich um einen Zwölftel von 23.460 Cent). Basis a^1 = 440 Hz.*

Ton	C_2	C_1	C_0	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4
C	16.2019	32.4666	65.0591	130.3704	261.2460	523.5044	1049.0377	2102.1409
Cis/Des	17.1681	34.4028	68.9389	138.1449	276.8251	554.7231	1111.5960	2227.5000
D	18.1919	36.4543	73.0500	146.3830	293.3333	587.8035	1177.8850	2360.3348
Dis/Es	19.2768	38.6283	77.4062	155.1124	310.8260	622.8566	1248.1270	2501.0910
E	20.4263	40.9318	82.0223	164.3624	329.3618	660.0000	1322.5578	2650.2412
F	21.6444	43.3727	86.9136	174.1640	349.0030	699.3585	1401.4273	2808.2857
Fis/Ges	22.9352	45.9592	92.0966	184.5501	369.8154	741.0640	1485.0000	2975.7551
G	24.3029	48.7000	97.5887	195.5556	391.8690	785.2566	1573.5565	3153.2113
Gis/As	25.7522	51.6041	103.4083	207.2173	415.2377	832.0847	1667.3940	3341.2500
A	27.2879	54.6815	109.5749	219.5745	440.0000	881.7052	1766.8274	3540.5022
Ais/B	28.9152	57.9424	116.1093	232.6686	466.2390	934.2848	1872.1905	3751.6366
H	30.6395	61.3977	123.0334	246.5436	494.0427	990.0000	1983.8367	3975.3617
C	32.4666	65.0591	130.3704	261.2460	523.5044	1049.0377	2102.1409	4212.4286

Die Analyse der Schwebungen (Tab. 13) ergibt, dass die Quarte nur ganz schwach schwebt, und die grosse Terz fast gleichschnell unterschwebt wie die kleine Sext überschwebt, beziehungsweise die kleine Terz gleichschnell überschwebt, wie die grosse Sext unterschwebt. Dieser Sachverhalt ist denn auch das wichtigste Argument von Serge Cordier, dass nämlich gewisse Schwebungen isochron sind, wie beim berechneten Beispiel für die Terzen und Sexten (Berechnete Schwebungen s. Abb. 14

Tabelle 13: Schwebungen der Stimmung nach Serge Cordier mit reinen Quinten und vergrösserter Oktave (s. auch Abb. 14). Terzen und Sexten schweben fast gleichschnell; die Quarte nur schwach.

Halbton: $q^{1/7}$; Ganzton: $q^{2/7}$; kl. Terz: $q^{3/7}$; gr. Terz: $q^{4/7}$; Quarte: $q^{5/7}$; Quinte: q = 3/2; kl. Sext: $q^{8/7}$; gr. Sext: $q^{9/7}$; Oktave: $q^{12/7}$		
Zweiklang zwischen	Berechnung der Schwebungsfrequenz	Schwebungsfrequenz Relativ zum Grundton C
C + G (Quinte)	3 x C – 2 x Quinte = C(3 – 2(3/2))	C x 0 [Hz]
C + F (Quarte)	4 x C – 3 x Quarte = C(4 – 3 x $q^{5/7}$)	C x (– 0.007'751) [Hz]
C + E (gr. Terz)	5 x C – 4 x gr. Terz = C(5 – 4 x $q^{4/7}$)	C x (– 0.042'932) [Hz]
C + Es (kl. Terz)	6 x C – 5 x kl. Terz = C(6 – 5 x $q^{3/7}$)	C x (+ 0.051'086) [Hz]
C + As (kl. Sext)	8 x C – 5 x gr. Sext = C(8 – 5 x $q^{8/7}$)	C x (+ 0.052'745) [Hz]
C + A (gr. Sext)	5 x C – 3 x kl. Sext = C(5 – 3 x $q^{9/7}$)	C x (– 0.052'709) [Hz]

18. Stimmungen historischer Orgeln

Bei den Stimmungen von vier Beispielen historischer Orgeln, dargestellt in Abb. 15, sind jene Sebald Manderscheidt (Chororgel der Kathedrale von Freiburg/CH) und von Joseph Gabler in Weingarten/D (1/5-Komma) annähernd mitteltönig gestimmt sind.

Ort	Kirche	Orgelbauer	Stimmung von
Freiburg/CH	Cathédrale St-Nicolas (Chororgel)	Sebald Manderscheidt (1620-1685)	1640
Freiberg/D	St.-Marien-Dom	Gottfried Silbermann (1683-1753)	1985
Hamburg/D	Sankt Jacobi	Arp Schnittger (1648-1719)	1993
Weingarten/D	St. Martin	Joseph Gabler (1700-1771)	1750

19. Tonartencharakteristik

Mit der gleichmässig temperierten Tonleiter sind alle Tonarten, abgesehen von der jeweiligen Tonhöhe, gleich. Bei der mitteltönigen Stimmung sowie den nicht-gleichstufig temperierten Stimmungen unterscheiden sie sich hingegen voneinander. Deshalb wurde oft für ein Musikstück eine, seiner Stimmung entsprechende, Tonart gewählt (s. Tab. 14). Über den Tonartencharakter haben sich viele Autoren Gedanken gemacht und Verbindungen zu Philosophie und Theologie gesucht, beispielsweise etwa Christian Schubart oder auch Hermann Beckh in seinem Buch *Die Sprache der Tonart in der Musik von Bach bis Bruckner. Vom geistigen Wesen der Tonarten* (publiziert 1999 im Urachhaus-Verlag in Stuttgart). Hermann Beckh teilt die Tonarten in drei Kreuze ein. Jedes Kreuz besteht aus zwei Tonarten, die im Quintenzirkel so weit wie möglich, also um sechs Halbtöne, auseinanderliegen, und denjenigen anderen beiden Tonarten, die gegen die beiden ersten Tonarten um drei Halbtonschritte versetzt sind (s. Abb. 16). Ob jedoch die Tonartencharakteristik bei Bach eine Rolle gespielt hat, ist umstritten.

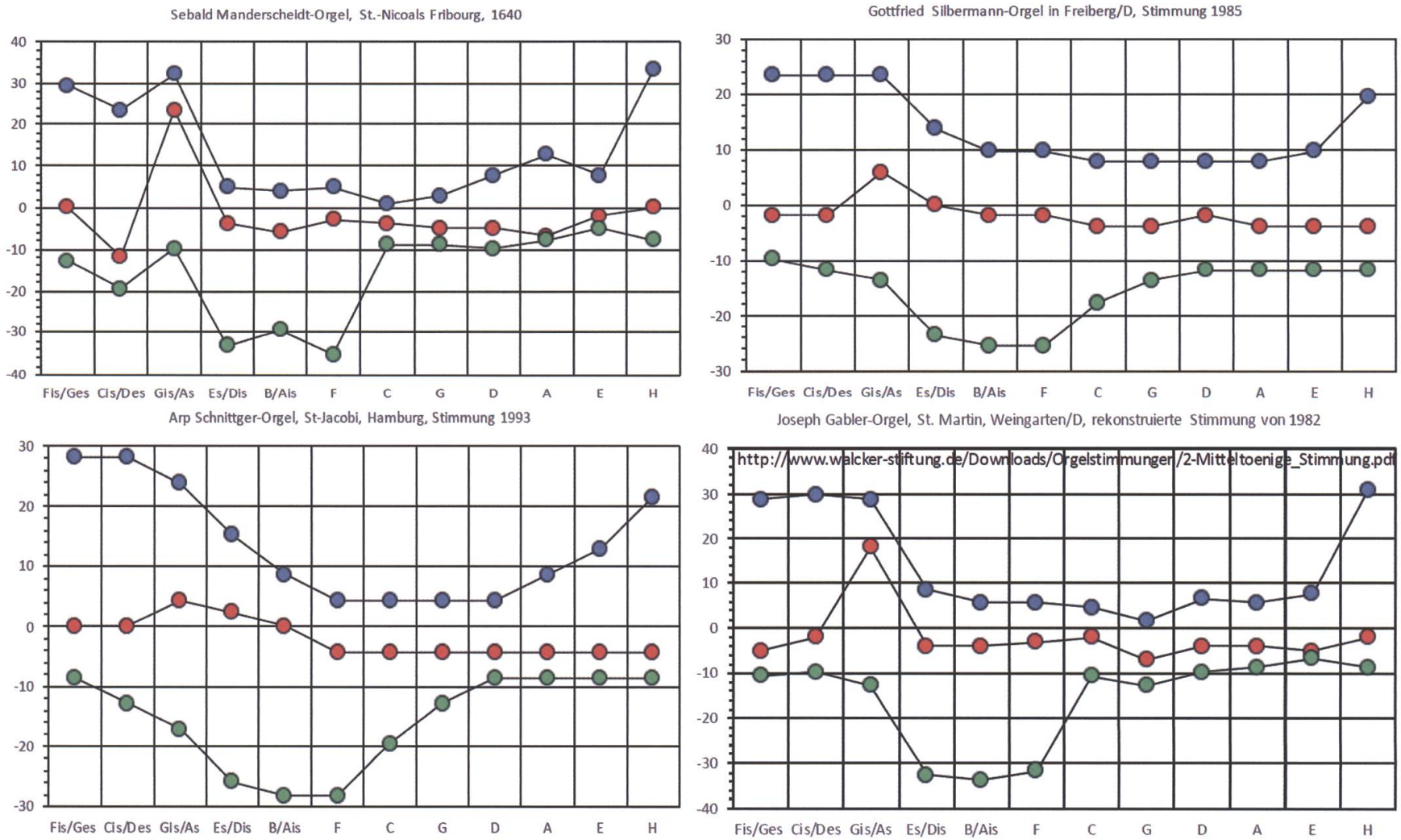


***Abb. 15**: Stimmungen historischer Orgeln: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), gr. Terz (blau) und kl. Terz (grün): Orgeln von S. Manderscheidt (Fribourg/CH), G. Silbermann (Freiberg/D), A. Schnittger (Hamburg/D) und J. Gabler (Weingarten/D). Die Manderscheidt-Orgel ist annähernd mitteltönig, die Gabler-Orgel annähernd 1/5-Komma-mitteltönig. Datenquelle: www.instrument-tuner.com*

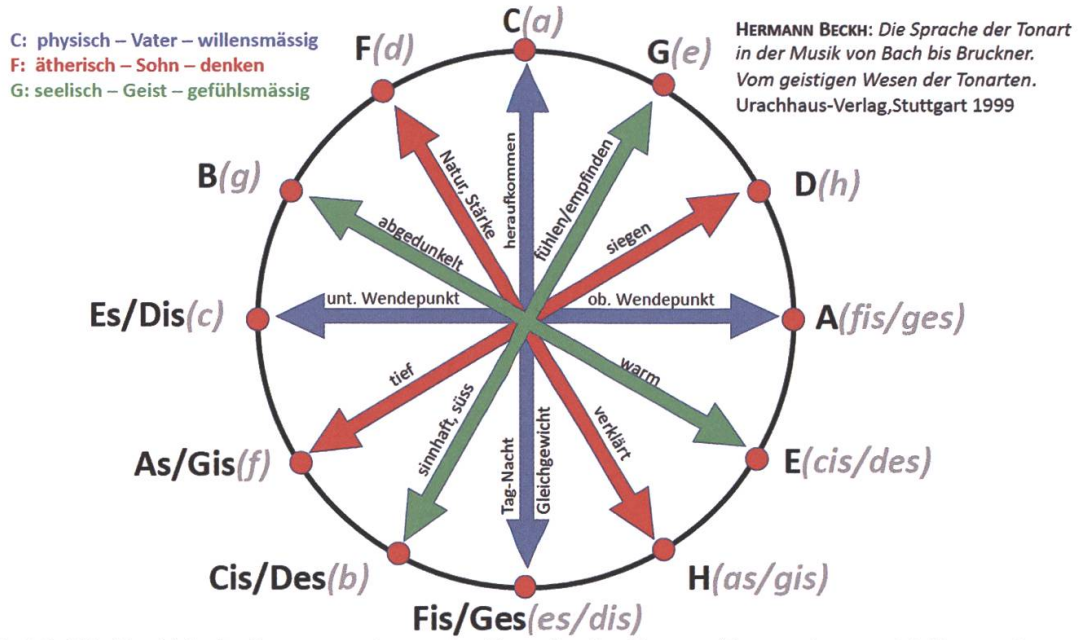


Abb. 16: Die Beckh'sche Interpretationen der Sprache der Tonart (Dur=schwarz, Moll=grau)

Tab. 14: Charakteristik (Key Color) der einzelnen Dur- und Moll-Tonarten: schwarz bzw. grau

Dur	Charakter der Tonart	Moll	Charakter der Tonart
Ges/Fis	Gefühl von Erfolg nach bestandener Prüfung	es/dis	Angstvoll, verzweifelt, erschrocken, Tonart der Geister
Des/Gis	Finster, Verzweiflung, Frust, unehrlich	b	Schicksalsergeben, düster-depressiv, unzufrieden
As/Dis	Schwer, Tod, Verurteilung, Reinigung, Ewigkeit	f	Depressiv, trauernd, klagend, schwermütig, Elend
Es/Dis	Liebevoll, ergeben, hingebungsvoll, pathetisch	c	Unerfüllte Liebe, Sehnsucht, klagend, düster
B	Heiter-freudig, hoffnungsvoll, unschuldig-bescheiden, edel, ohne Glanz	g	Unwillig, unwohl, majestätisch, sanft
F	Ruhig, entgegenkommend-höflich, friedlich, für pastorale Musikstücke	d	Melancholisch, ernst, feierlich, weiblich, kläglich
C	Rein, unschuldig, kindlich-naiv, neutral, ernst	a	Fromm, weiblich, zärtlich-klagend, ziemlich edel
G	Ruhig-lyrisch, friedlich, erfüllt-freudig, dankbar	e	Naiv, weiblich, unschuldig, erwartungsvoll
D	Triumphal-kriegerisch, festlich-glanzvoll, siegesgewiss, scharf	h	Ruhig, geduldig, Gott-ergeben, einsam, traurig
A	Unschuldig, ländlich, erfüllt, hoffnungsvoll, glänzend, vornehm, freudig	fis/ges	Düster, vorurteilsvoll, unerfüllt, sehr traurig, wehleidig, klagend
E	Freudvoll-lärmig, Erfolgsgefühle	cis/des	Bussbreit, unzufrieden, unerfüllt, klagend
H	Farbig-leuchtend, wild-leidenschaftlich, gereizt-eifersüchtig, roh, edel, strahlend	gis/as	Versagend, erstickend, verzweifeln

Quellen: www.rollingball.com , z.T. auch nach Christian Schubart: *Ideen zu einer Ästhetik der Tonkunst* (1806); siehe auch: https://de.wikipedia.org/wiki/Tonartencharakter

Die Dur-Tonarten der oberen Hälfte des Quintenzirkels bezeichnet Beckh als *aufwärtsstrebend*, jene der unteren als *abwärtsgehend*, die Moll-Tonarten der oberen Hälfte als *dunkel*, jene der unteren Hälfte als *hell* und *strahlend*. Dem C-Dur-Kreuz ordnet Beckh die Eigenschaften *physisch* und *willensmässig* – im Sinne des Vaters – zu. Beim F-Dur-Kreuz sieht er die Eigenschaften *ätherisch* und *denkend* – im Sinne des Sohnes – und schliesslich beim G-Dur-Kreuz jene von *seelisch* und *gefühlsmässig*, im Sinne des Geistes (s. dazu Abb. 16).

20. Fazit

Die pythagoreische Stimmung fusst auf reinen Quinten, hat aber eine (pythagoreische) Wolfsquinte und war aber für polyphone Musik nicht brauchbar. Dann wurde mit der mitteltönigen Stimmung (vermutlich als erster durch Gioseffo Zarlino 1571) die Schönheit der reinen Terzen entdeckt. Auch diese Stimmung hatte eine (mitteltönige) Wolfsquinte und beeinträchtigte dadurch den Gebrauch von Tonarten mit vielen Vorzeichen. Mit den wohltemperierten Stimmungen wurde schliesslich ein Kompromiss zwischen pythagoreisch und mitteltönig gefunden, was die Wolfsquinte durch leicht verminderte Quinten und vergrösserte, schärfere Terzen vermied, womit alle Tonarten spielbar wurden. Die heute gebräuchlichen, gleichstufigen Stimmung führte zur Universalität des Systems und öffnete so den Weg zur Atonalität. Die entscheidenden Eigenschaften der verschiedenen Stimmsysteme sind auf Abb. 15 zusammengestellt.

Tab. 15: *Übersichtstabelle: Eigenschaften der Stimmungen*

<table>
<tr><th></th><th>pythagoreische Stimmung (bis ca. 15 Jh.)</th><th>mitteltönige Stimmung (1525-1820)</th><th>wohltemperierte Stimmung (1675-1820)</th><th>wohltemperierte neue «Bach-Stimmungen»</th><th>gleichstufig temperiert Stimmung (ab. ca. 1910)</th><th>Cordier-Stimmung mit reinen Quinten (ab 1995)</th></tr>
<tr><td>Alle Intervalle gleich gross?</td><td colspan="4">Nein</td><td colspan="2">Ja</td></tr>
<tr><td>Oktaven rein?</td><td colspan="5">Ja</td><td>Nein</td></tr>
<tr><td>Quinten rein?
(Cent)</td><td>Ja:
11 von 12</td><td>leicht kleiner</td><td colspan="2" rowspan="3">Nein
(denn die Intervalle sind unterschiedlich gross)</td><td>um 1.955 zu klein</td><td>Ja</td></tr>
<tr><td>Grosse Terzen rein?
(Cent)</td><td colspan="2">Nein</td><td>Ja:
8 von 12</td><td>um 13.686 zu gross</td><td rowspan="2">nein</td></tr>
<tr><td>Kleine Terzen rein?
(Cent)</td><td colspan="3">Nein</td><td>um 15.641 zu klein</td></tr>
<tr><td>Wolfsquinte(n)?
(Cent)</td><td>Ja:
678.495
F=1.479’810</td><td>Ja:
737.637
F=1.531’237</td><td colspan="4">Nein</td></tr>
<tr><td>Alle Tonarten brauchbar?</td><td colspan="2">Nein</td><td colspan="4">Ja</td></tr>
<tr><td>Tonartencharakteristik erhalten?</td><td colspan="4">Ja</td><td colspan="2">Nein</td></tr>
<tr><td>Für welche Musik?</td><td>Renaissance</td><td>Frühbarock</td><td colspan="2">Barock</td><td colspan="2">ab 18/19. Jh.</td></tr>
</table>

Die erste Befreiung aus der Enge der pythagoreischen und mitteltönigen Stimmung gelang vermutlich dem Orgelbauer Christian Förner (1609-1678), seinen Schülern als Orgelbaulehrlingen, sowie Andreas Werckmeister mit verschiedenen Varianten der wohltemperierter Stimmungen. Vermutlich erhielte auch der junge Bach 1705 in Lübeck Kenntnis von diesen neuen Stimmverfahren[7]. Diesen Pionieren folgen dann Kirnberger, Sorge, Vallotti und weitere.

Das Wort «wohl» ist in diesem Zusammenhang im Barock'schen Sinne zu verstehen: Es sollten nicht alle Intervalle, mathematisch-rational verstanden, genau gleichgross sein, sondern «wohl» ist zu verstehen als schön, angenehm, brauchbar, etc. Es galt, die Wolfsquinte zu vermeiden, damit alle Tonarten ohne Einschränkungen benutzt werden konnten, ohne dass dabei die Tonartencharakteristik verloren geht. Dies ist jedoch nur möglich, indem das pythagoreische Komma nicht gleichmässig auf alle Quinten verteilt wird *(wie dies bei der gleichstufigen Stimmung der Fall ist)*, sondern bei den häufig benutzten Tonarten etwas weniger und bei den andern etwas mehr. Damit bleiben Modulationen – also Übergang von einer Ausgangstonart in eine andere Grundtonart mit neuer Tonika – nicht nur auf Dominante, Subdominant oder Parallel-Molltonart beschränkt, sondern es öffnen sich neue Möglichkeiten, und damit später auch das Verlassen der klassischen Dur-Moll-Tonalität, beispielsweise in der Atonalität, bei der es keinen Grundton als tonales Zentrum mehr gibt.

Die Brauchbarkeit der wohltemperierten Stimmung wurde von Johann Sebastian Bach in seinem *Wohltemperierten Clavier* (Teil I von 1722 und Teil II von 1744) dargelegt. Diese Sammlung enthält in jedem der beiden Teile zu jeder der zwölf Dur- und zwölf Moll-Tonarten ein Präludium mit Fuge. Für nachbarocke Musik hat eine universelle Stimmung, wie die gleichstufige mehr Vorteile, da alle Tonarten gleichberechtigt sind aber der Tonartencharakter verschwindet. Die Eigenschaften der verschiedenen Stimmungsprinzipen sind auf der Tabelle 15 zusammengestellt. Für frühbarocke Musik dürfte sich die mitteltönige Stimmung am besten eignen, da die nicht gleichmässig temperierte Stimmung mit den reinen Terzen subjektiv als schöner empfunden werden, sofern nur die «guten» Tonarten verwendet werden. Die «schlechten» wurden denn auch (s. Abb. 17) nur selten verwendet. Der Wohlklang reiner Terzen und des engelreinen C-E-G-Dreiklanges bei mitteltönig gestimmten Orgeln mag zwar für unsere, an die gleichstu-

[7] Der 20-jährige Bach reiste im Oktober 1705 zur Fuss nach dem 400 km entfernten Lübeck und blieb dort bis Januar 1706, um den berühmten Dietrich Buxtehude (1637-1707) und seine Orgel zu hören und vermutlich auch, um sich um seine Nachfolge zu bewerben. Schon zwei Jahre zuvor fuhr der gleichaltrige Georg Friedrich Händel – allerdings in einer Kutsche und begleitet von seinem Freund Johann Mattheson (1681-1764) – aus demselben Grund nach Lübeck. Allerdings schreckte beide, sowohl Bach wie Händel, die an die Nachfolge geknüpfte Bedingung ab, nämlich, wie es dort Brauch war, die Tochter (Anna Margaretha Buxtehude) des Vorgängers heiraten zu müssen. Anscheinend war sie mit 30 Jahren bereits zu alt für die beiden Youngsters. Albert Schweitzer kommentierte dies mit folgenden Worten: *«Mademoiselle Buxtehude n'avait ni les agréments de la jeunesse ni ceux de la beauté.»*

fige Stimmung gewöhnten Ohren, ungewöhnlich klingen, bleibt aber dennoch unvergesslich. Für Hochbarock dürften Werckmeister III oder Kirnberger III, oder einige der neuere, rekonstruierten Bach-Stimmungen, am besten geeignet sein. Nach 1800 wird meist die gleichstufig temperierte Stimmung vorausgesetzt und auch verwendet. Bei früherer Musik – möglicherweise auch bei aussereuropäischer Musik – haben Intonationsreinheit und verschiedenartige Tonartencharaktere noch mehr Bedeutung, eine Forderung, die durch die gleichstufige Stimmung nicht erfüllt werden kann. Im Rahmen der historischen Aufführungspraxis alter Musik werden deshalb ältere Stimmungssysteme wieder verstärkt erforscht, um adäquate Wiedergaben zu ermöglichen.

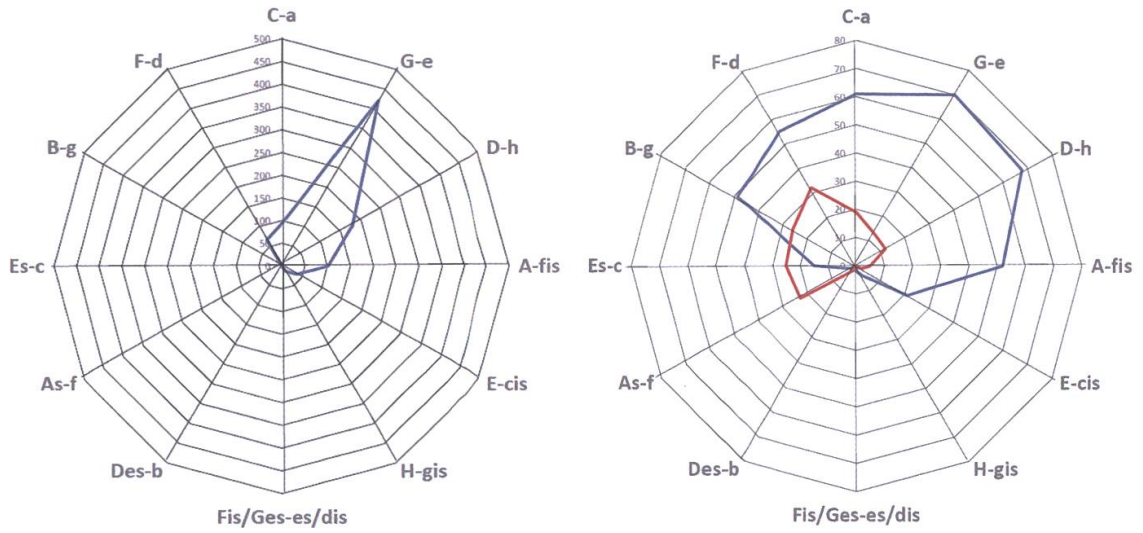


***Abb. 17**: Tonartengebrauch bei Girolamo Frescobali (links) und Domenico Scarlatti (rechts: blau: Dur, rot: Moll). Das Fitzwilliam Virginal Book benutzt bei Dur nur die Tonarten F, C, G und bei Moll nur jene von d, a, e. Die obere Hälfte des Quintenzirkels wird somit deutlich bevorzugt.*

Welche Stimmungen für die Sonaten von Domenico Scarlatti (1685-1757) die geeignetsten sind, muss wohl offenbleiben, da aus dieser Zeit nur wenige Instrumente erhalten sind und diese zudem nicht mehr in der damaligen Stimmung überliefert sind. Ein Vorschlag für eine Scarlatti-Stimmung wird von John Sankey und William A. Sethares (*A consoncance-base approach to the harpsicord tunig of Domenico Scarlatti*, in J. Accoust. Soc. Am. Vol. 101 (4), April 1997, pp. 2332-2337) vorgeschlagen. Die Autoren erarbeiten eine Bewertungsmethode, die auf der Analyse der Dissonanzen eines Musikstückes basiert, und damit die Eignung verschiedenen Stimmungsvarianten am Beispiel von Scarlatti-Sonaten mathematisch berechnet. Da Domenico Scarlatti in seinen Sonaten auf eine geniale und für die damalige Zeit sehr gewagten Art von der Ausgangstonart in viele, teils sehr entfernte, Tonarten moduliert *(er war damit seiner Zeit weit voraus: Barbara Zuber nennt seine Sonaten «Wilde Blumen am Zaun der Klassik»)*, erscheint eine solche aufwändige Analyse durchaus als gerechtfertigt.

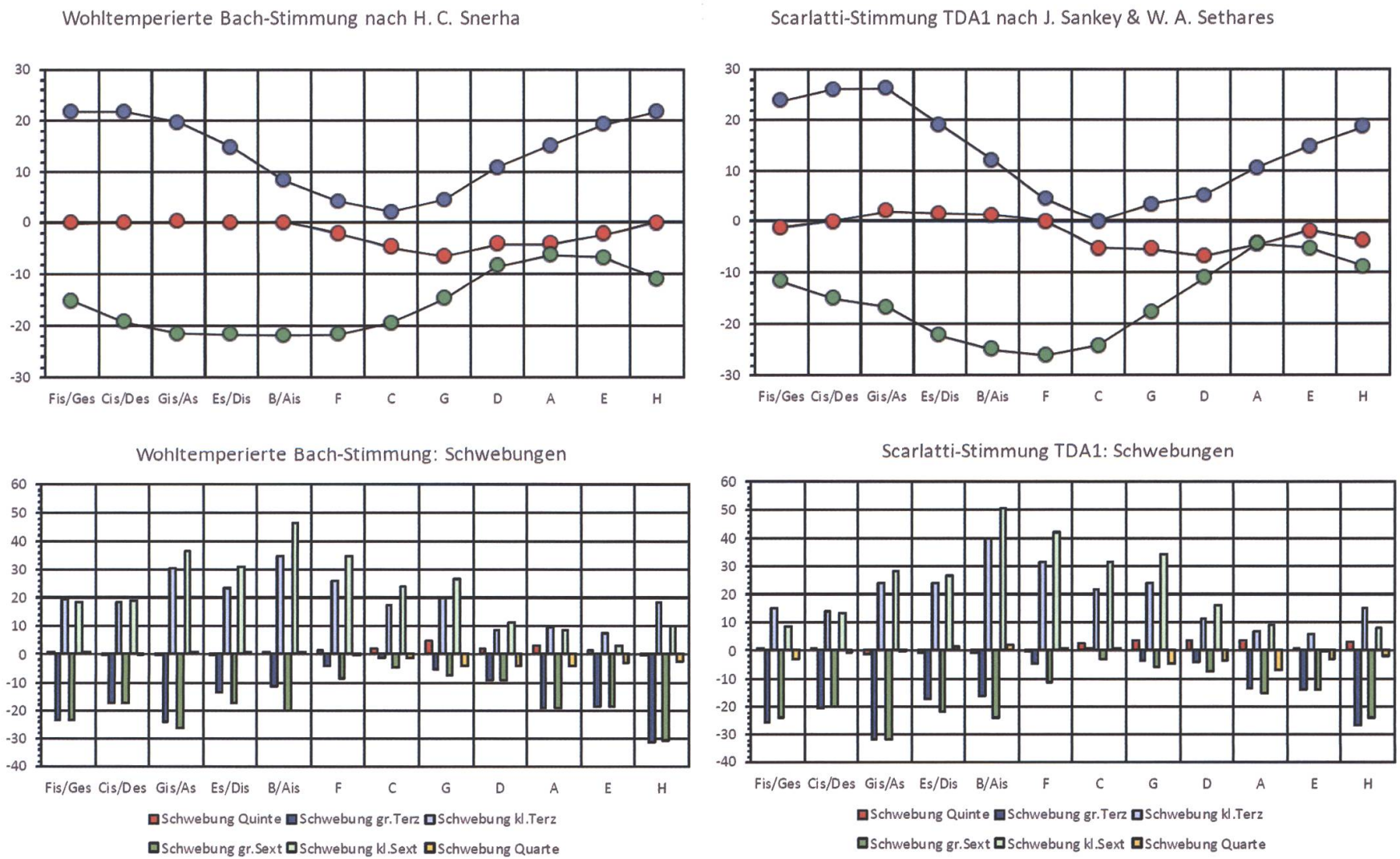


***Abb. 18**: Wohltemperierte Stimmung nach H. C. Snerha (für Bach) und nach J. Sankey & W. A. Sethares (für Domenico Scarlatti). **Oben**: Abweichung der Intervalle zur reinen Stimmung in Cent für Quinte (rot), grosse Terz (blau), kleine Terz (grün). **Unten**: Schwebungen (Berechnung siehe Text)*

Die Autoren kommen in ihrer Analyse zum Schluss, dass Scarlatti vermutlich einer französischen Stimmung *(die mehr Wert auf reine Terzen legt)* näher war, als einer deutschen oder italienischen, die reinen Quinten mehr Gewicht gibt. Scarlattis Stimmung läge demnach wohl in der Nähe jener von Jean le Ront d'Alembert (1717-1783), weshalb sie eine eigene, der d'Alembert'schen sehr ähnliche, Stimmung vorschlagen. Diese ist in Abb. 18 graphisch dargestellt. Die gleiche Abbildung zeigt auch die von Kristian Wegscheider in seiner abenteuerlichen Geschichte beschriebenen Bach-Stimmung aus dem Brief von H. C. Snerha (Kap. 15), dem angeblichen Hausdiener der Familie Bach.

Mit dem Vorbehalt, dass die Ausgangstonart bei Domenico Scarlatti nie für eine ganze Sonate massgeblich ist, lässt sich aus der Scarlatti-Biographie von Ralf Kirkpatrick (*Domenico Scarlatti*, Princeton University Press, New Jersey, 1953) eine Häufigkeitsverteilung der Tonarten ableiten (Abb. 17, rechts). Von den überlieferten 555 Scarlatti-Sonaten sind bei Dur 89 % und bei Moll 94% in den *guten* mitteltönigen Tonarten mit fast reinen, grossen Terzen (B, F, C, G, D und A, respektive f, c, g, d, a, e und h) geschrieben. Dies bestätigt seine von Sankey/Sethares vermutete Vorliebe für Stimmungen mit fast reinen Terzen. Ähnlich, aber enger, ist die Wahl (Abb. 17, links) bei Girolamo Frescobaldi (1583-1643). Allerdings ist hier die Unterscheidung zwischen Dur und Moll nicht eindeutig, weshalb in der Graphik von Abb. 17 nur die Tonart des Schlussakkordes berücksichtigt ist. Beim *Fitzwilliam Virginal Book*[8] *(eine Sammlung von 300 Cembalostücken aus der Zeit von Elisabeth I. und James I., also von etwas 1562-1612)* ist die Auswahl ebenfalls enger: Hier kommen bei Dur nur die Tonarten F, C, G vor und bei Moll nur jene von d, a, e. Die Präferenz der oberen Hälfte des Quintenzirkels, also zwischen B und E für Dur und g bis cis für Moll ist klar erkennbar. Analyse dieser Art wären – bis etwa zur Romantik – auch für andere Komponisten von Interesse.

Auch nach Jahrhunderten der Suche, sowohl in der Praxis von Musikern und Instrumentenbauern als auch bei den Musiktheoretikern, unterstützt durch Physiker und Mathematiker, bleibt das Problem des nicht geschlossenen Quintenzirkels weiterhin ungelöst. Jede Stimmungsvariante bleibt damit Kompromiss und je nach Zeitepoche und Musik passt die eine oder die andere besser. Die einen schwärmen vom engelreinen Klang reiner Terzen der mitteltönigen Stimmung, während andere die Universalität der gleichstufigen Stimmung vorziehen, da sie Modulationen ermöglicht und damit Spannungen und Dramatik durch Dissonanzen, und schliesslich den Weg öffnet zur Atonalität.

---

[8] Siehe dazu: ANNE CUNEO: *Le trajet d'une rivière* (Gallimard, 1997) (deutsche Ausgabe: *Der Lauf des Flusses: Das Leben und die Abenteuer des Francis Tregian, Gentleman und Musiker,* Limmat Zürich, 1995). Die Geschichte von Francis Tregian (1574-1619), Musiker aus begütertem Landadel Cornwall's, wird von Anne Cuneo in einem Roman nacherzählt. Als Katholik wurde er 1609 verhaftet und verbrachte 10 Jahre, bis zu seinem Tod, im Londoner Fleet-Gefängnis. Es wird vermutet *(gilt heute als umstritten)*, dass er im Gefängnis eine Sammlung von 300 Cembalostücken aus der englischen Renaissance und dem Frühbarock zusammenstellte, die heute als *Fitzwilliam Virginal Book* bekannt ist.

21. Literaturhinweise

- JAVIER ARBONÉS & PABLO MILRUD: *Die Mathematik der Musik*, Librero IBP, Kerkdriel, Niederlande (2017), ISBN 978-90-8998-816-4
- HERMANN BECKH: *Die Sprache der Tonart in der Musik von Bach bis Bruckner. Vom geistigen Wesen der Tonarten*, Urachhaus-Verlag, Stuttgart (1999)
- SERGE CORDIER : *Piano bien tempéré et justesse orchestrale*. Buchet/Chastel, Paris (1982)
- *The Fitzwilliam Virginal Book, edited from the original manuscript* (nach der Ausgabe Breitkopf & Härtel von 1899) erste Ausgabe 1963, Dover Publications Inc. New York *(das Original im Fitzwilliam Museum in Cambridge/UK ist vermutlich ein Handschrift von Francis Tregian[8])*
- REINHARD FROSCH: *Mitteltönig ist schöner! Studien über Stimmungen von Musikinstrumenten.* Verlag Peter Lang AG, Bern (1993)
- HERBERT KELLETAT: *Zur musikalischen Temperatur* (Band 1), Merseburger Verlag, Kassel (1961); ISBN-13: 978-3-87537-156-7
- HERBERT ANTON KELLNER: *Wie stimme ich selbst mein Cembalo?* Verlag Das Musikinstrument, Frankfurt am Main (1979)
- RALPH KIRKPATRICK: *Domenico Scarlatti* (deutsche Ausgabe 1972), Verlag Heinrich Ellermann, München. Amerikanische Originalausgabe bei Princeton University Press, New Jersey (1953)
- HANS JOACHIM MOSER: *Allgemeine Musiklehre*, Band 220/220a, Sammlung Göschen, Berlin (1955)
- JOHN SANKEY & WILLIAM A. SETHARES: *A Consonance-Based Approach to the Harpsichord Tuning of Domenico Scarlatti.* Journal of the Acoustical Society of America, 101(4) pp 2332-2337 (1997). Siehe weiter auch Internet: http://www.nef.carleton.ca/-bf250/consonance.html: John Sankey: The Keyboard Tuning of Domenico Scarlatti

  CHRISTIAN FRIEDRICH DANIEL SCHUBART: *Ideen zu einer Ästhetik der Tonkunst*. J. V. Degen, Wien (1806), Reprint Hildesheim 2013
- HELMUT SEIDL: *Frequenztafeln Cent-Hertz*, Verlag das Musikinstrument, Frankfurt am Main (1970)
- ANDREAS SPARSCHUH: *Stimm-Arithmetik des wohltemperierten Klaviers von J.S. Bach*. Vortrag an der Jahrestagung 1999 der Deutsche Mathematiker-Vereinigung Jahrestagung, Tagungsband S. 154–155
- SERGIO MARTÍNEZ RUIZ: *Temperament in Bach's Well-Tempered Clavier: A historic survey and a new evaluation according to dissonance theory*. University of Barcelona, Doctoral Thesis, July 2011
- KRISTIAN WEGSCHEIDER: *H.C. Snerha und die Bachstimmung: Eine unglaubliche Begebenheit aus dem Jahre 1974*. Aus der Webseite des Dresdener Orgelbauers Kristian Wegscheider www.wegscheider-orgel.de