

**Zeitschrift:** Veröffentlichungen des Geobotanischen Institutes der Eidg. Tech. Hochschule, Stiftung Rübel, in Zürich

**Band:** 101 (1989)

**Artikel:** Mechanische Belastbarkeit natürlicher Schilfbestände durch Wellen, Wind und Treibzeug = Mechanical impacts on natural reed stands by wind, waves and drift

**Kapitel:** Teil III. Untersuchungen zur Halmfestigkeit : Definition der Begriffe

**Autor:** Binz-Reist, Hans-Rudolf

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-308911>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. DEFINITION DER BEGRIFFE

Festigkeit ist ein Begriff, unter welchem eine Vielzahl von physikalischen Größen verstanden werden können. Für die vorliegende Arbeit sind zwei davon von Interesse, nämlich die Bruchfestigkeit (= Festigkeit im engeren Sinne) und die Steifigkeit. Wie der Name des ersten Ausdrucks sagt, gibt dieser an, bei welcher Belastung das Objekt (der Halm) bricht. Der zweite Ausdruck dagegen sagt, eine wie große Belastung notwendig ist, um eine bestimmte Verformung (z.B. Verbiegung) des Objektes zu erzwingen. In den folgenden Kapiteln werden die hier soeben allgemein definierten Begriffe im Hinblick auf die vorliegende Arbeit weiter eingeschränkt, da nur bestimmte Belastungen und Verformungen (nämlich solche, die bei einem natürlichen Schilfhalm vorwiegend auftreten) interessieren.

### 1.1. DEFINITION DER STEIFIGKEIT

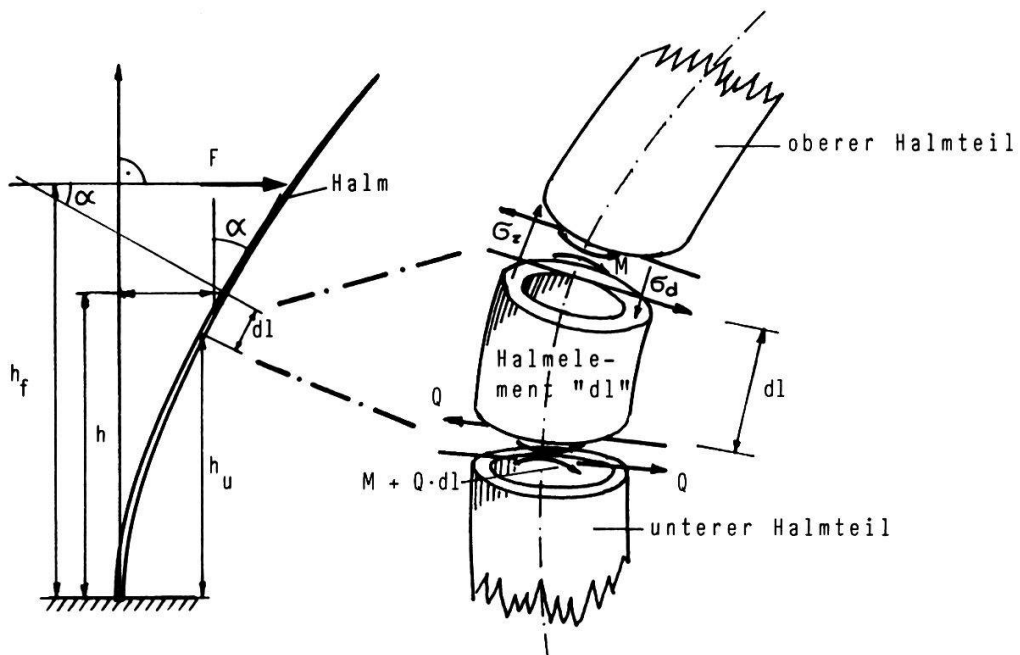
Ein Schilfhalm wird unter dem Einfluß von Wellen, Wind und Treibzeug praktisch ausschließlich auf Biegung belastet.

Zwischen den äußeren Belastungen, den daraus folgenden Beanspruchungen (Biegemoment, Querkraft usw.), den inneren Spannungen (wirkende Kraft pro Flächeneinheit des Querschnitts) und den Verformungen bestehen gesetzmäßige Zusammenhänge, die unter den Annahmen der klassischen Statik (s. z.B. STÜSSI 1962) in einfacher Weise mathematisch formuliert werden können. Soweit es für das Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig ist, werden diese Beziehungen im folgenden kurz hergeleitet.

Als einfaches Beispiel diene ein Schilfhalm, der in einer bestimmten Höhe  $h_f$  über Grund von einer äußeren Kraft  $F$  belastet wird (Fig. 1.1.). Uns interessieren die Beanspruchungen, Spannungen und Verformungen in einem beliebig gewählten Halmquerschnitt in der Höhe  $h$  über Grund. Dazu denken wir uns ein kurzes Stück des Halmes mit der (sehr kleinen) Länge  $dl$  herausgeschnitten. Auf beide Schnittflächen wirken Kräfte, welche die abgeschnittenen Teile auf das betrachtete Halmelement ausüben. Nach dem dritten Newton'schen Prinzip "actio=reactio" übt das betrachtete Halmelement seinerseits die selben Kräfte in umgekehrter Richtung auf die abgeschnittenen Teile aus. Auf den jeweils zusammengehörenden Schnittflächen wirken also die entgegengesetzt gleichen Kräfte und Momente.

Wenn wir der Einfachheit halber das Eigengewicht des oberen abgeschnittenen Halmstückes vernachlässigen, so ist an der oberen Schnittstelle nur der Einfluß der äußeren Kraft  $F$  zu berücksichtigen. Dieser äußert sich als "abscherende" Kraft (Querkraft) und (wenn  $F$  nicht gerade im betrachteten Querschnitt angreift) als "biegende" Kraft (Biegemoment). Würde die Kraft  $F$  nicht (wie in diesem Beispiel angenommen) senkrecht zur Halmachse wirken, so entstünde auch noch eine "drückende" oder "ziehende" Kraft (Normalkraft), deren Einfluß im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen vernachlässigt werden darf.

Der Betrag der Querkraft  $Q$  ist gleich der senkrecht zur Halmachse wirkenden Komponente von  $F$ . Unter der zunächst anzunehmenden Voraussetzung, daß die Verdrehung  $\alpha$  des untersuchten Halmstückes klein sei (und wenn  $F$  horizontal wirkt), kann die Querkraft gleich  $F$  gesetzt werden:



**Fig. 1.1.** Belastung und Beanspruchung eines Schilfhalmes.

Links: Schematische Darstellung und wichtigste Abmessungen eines Schilfhalmes, der durch eine waagrechte Kraft  $F$  beansprucht wird.

Rechts: Herausgeschnitten gedachtes Element des Halmes mit den wirkenden Beanspruchungen an den beiden Querschnitten.

$$Q = F \cos \alpha \quad [\text{N}] \quad (1.1)$$

bzw.

$$Q \approx F \quad (\text{wenn } \alpha \text{ klein und } F \text{ horizontal}) \quad [\text{N}] \quad (1.2)$$

$Q$  ... Querkraft [N]

$F$  ... Äußere Kraft [N]

$\alpha$  ... Winkel zwischen der Querschnittsebene und der Wirkungslinie von  $F$  [rad]

Das Biegemoment  $M$  bewirkt die Verkrümmung des Halmes. Sein Betrag ist gleich dem Produkt aus dem Betrag der äußeren Kraft und dem senkrecht zur Wirkungslinie dieser Kraft gemessenen Abstand vom betrachteten Punkt, im Beispiel der Fig. 1.1. also

$$M = F (h_f - h) \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.3)$$

$M$  ... Biegemoment [N·m]

$F$  ... Äußere Kraft (Betrag) [N]

$h_f$  ... Höhe über Grund der Wirkungslinie von  $F$

$h$  ... Höhe über Grund des betrachteten Querschnittes

Das Biegemoment kann man sich auch als ein Paar gleich großer, genau entgegengesetzt wirkender Kräfte (Kräftepaar) veranschaulichen, deren Betrag und Abstand voneinander so groß sind, daß das Produkt gleich dem vorhandenen Biegemoment ist:

$$P \cdot a = M \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.4)$$

$P$  ... Betrag der Kräfte des gedachten Kräftepaares [N]

$a$  ... Abstand der beiden Kräfte [m]

$M$  ... Äquivalentes Biegemoment [N·m]

Bis jetzt haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Wirkungslinie der Kraft  $F$  irgendwo durch die Halmachse geht. Angesichts der geringen Dicke eines Schilfhalmes ist diese Voraussetzung in unserem Fall stets mit genügender Genauigkeit erfüllt. Andernfalls müßte noch das Torsionsmoment (Verdrehung) berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird also nur die Biegung behandelt, unter der abgekürzten Bezeichnung "Moment" ist darum im folgenden immer das Biegemoment zu verstehen.

Im Vergleich der beiden Schnittflächen des gedachten Halmelementes stellen wir fest, daß die Querkraft an beiden Stellen gleich groß ist (außer wenn eine äußere Kraft am Element selbst angreift), denn die Querkraft ist ja gleich einer Komponente der oberhalb der Schnittstelle wirkenden, äußeren Kraft. Das Biegemoment wird dagegen um den Betrag

$$dM = Q dl \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.5)$$



vergrößert, da der Abstand zur äußeren Kraft um  $dl$  zunimmt. An der unteren Schnittstelle wirkt somit ein Biegemoment vom Betrag

$$\begin{aligned} M_u &= M + dM = F(h_f - h) + F dl = F[h_f - (h - dl)] \\ &= F(h_f - h_u) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Analogie der Gleichung (1.6) mit (1.3) ist offensichtlich, wodurch die Richtigkeit von (1.5) indirekt bestätigt wird. Gleichung (1.5) ist allgemein gültig und besagt nichts anderes, als daß die Querkraft in jedem Punkt eines Stabes gleich der ersten Ableitung des Biegemomentes in Richtung der Stabachse ist:

$$Q = \frac{dM}{dl} \quad (1.7)$$

Was bewirken Querkraft und Biegemoment im betrachteten Halmstückchen selbst? Die Querkraft unterwirft das Halmelement einer Schub- oder Scherspannung; unter ihrem Einfluß erhält das im unbelasteten Zustand von der Seite gesehen rechteckige Halmstück die Form eines Rhomboids (Parallelogramm; vgl. Fig. 1.2.): die Schnittflächen bleiben parallel, werden aber gegenüber der Halmachse verschoben. Es kann gezeigt werden (z. B. STÜSSI 1962 oder ZIEGLER 1968), daß bei schlanken Stäben der Einfluß dieser Schubverformung gegenüber der gleich zu besprechenden Verkrümmung durch das Biegemoment vernachlässigbar ist. Diese Verkrümmung entsteht durch eine Verlängerung des Halmstücks auf der Außenseite der Krümmung (in den Figuren 1.1. und 1.2. auf der linken Seite des Elementes) und eine entsprechende Verkürzung auf der Innenseite (in den beiden Figuren: rechts). Diesen Verformungen entspricht eine Zug- (außen) bzw. Druckspannung (innen). Aus Gleichgewichtsgründen muß (wenn keine Normalkraft wirkt) die Summe der Zugspannungen gleich der Summe der Druckspannungen sein. Ferner müssen die Resultierenden von Zug und Druckspannung ein Kräftepaar bilden, welches dem vorhandenen Biegemoment  $M$  äquivalent ist. Diese Gleichgewichtsbedingungen reichen aber noch nicht aus, um die Spannungen und Verformungen als Folge äußerer Krafteinwirkungen zu berechnen. Dazu sind noch zwei Annahmen über das Verformungsverhalten notwendig, die in der klassischen Statik wie folgt formuliert werden:

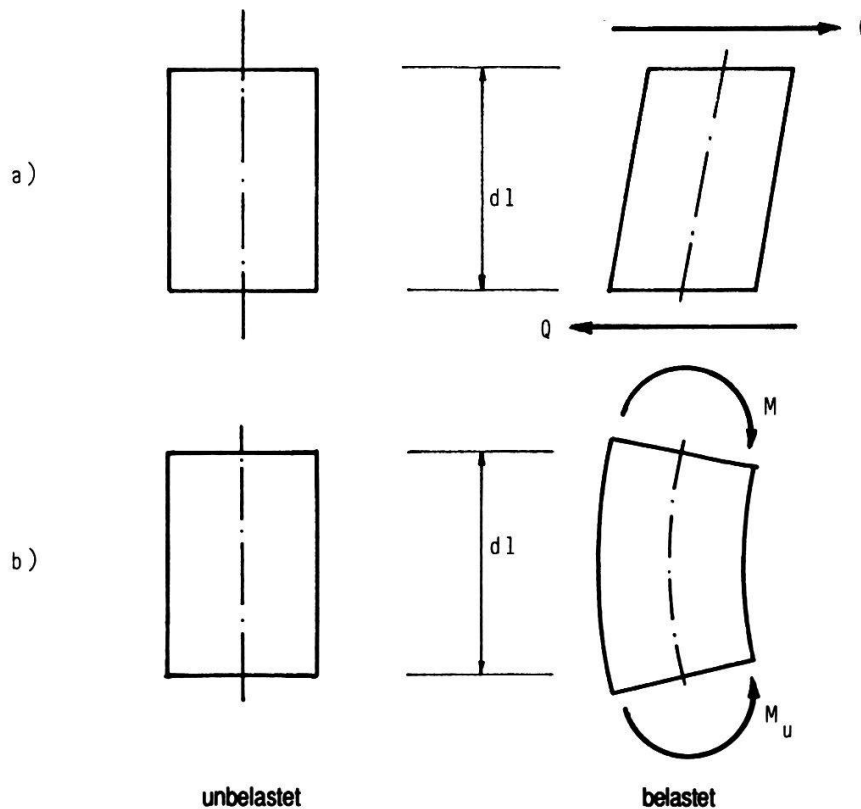
1. Ein im unbelasteten Zustand ebener Querschnitt soll auch unter Belastung und Verformung eben bleiben (Hypothese von Bernoulli-Navier)
2. Die Verformungen sind direkt proportional zu den Spannungen (Hooke'sches Gesetz).

Zur mathematischen Formulierung des Hooke'schen Gesetztes müssen die Begriffe Spannung und Verformung noch genauer definiert werden: Unter (Normal-)Spannung (Zug oder Druck) wird die in irgendeinem Punkt senkrecht zur Querschnittsebene wirkende Kraft pro Flächeneinheit verstanden (die Schubspannung ist analog die parallel zur Querschnittsebene wirkende Kraft pro Flächeneinheit). Die hier zu berücksichtigenden Verformungen sind die Dehnungen, welche als relative Längenänderungen, d.h. als Verlängerung oder Verkürzung pro Längeneinheit des Halmelementes, definiert werden:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dl)}{dl} \quad [-] \quad (1.8)$$

- $\varepsilon$  ... Dehnung
- $\Delta(dl)$  ... Verlängerung des Halmelementes [m]
- $dl$  ... Länge des Halmelementes [m]

Das Hooke'sche Gesetz kann nun dahingehend präzisiert werden, daß die Spannungen direkt proportional zu den Dehnungen angenommen werden:



**Fig. 1.2.** Verformungen eines Stabelementes unter  
a) Querkräfteinfluß  
b) Biegemoment

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad [\text{N/m}^2] \quad (1.9)$$

- $\sigma$  ... Spannung in einem Punkt des Querschnittes
- $E$  ... Proportionalitätsfaktor  $[\text{N/m}^2]$
- $\varepsilon$  ... Dehnung [-]

Zur Veranschaulichung diene Figur 1.3., wo eine gedachte "Faser" des untersuchten Halmelementes im belasteten und unbelasteten Zustand gezeichnet ist.

Der Proportionalitätsfaktor  $E$  der Gleichung (1.9) ist eine Materialkonstante und heißt Elastizitätsmodul, abgekürzt E-Modul.

Bevor wir die Hypothese von Bernoulli-Navier für den Schilfhalm formulieren und mit dem Hooke'schen Gesetz verknüpfen, sei noch die Frage berührt, ob die erwähnten Annahmen der klassischen Statik überhaupt "richtig" sind, d.h. brauchbare Ergebnisse erwarten lassen.

Das Ebenbleiben der Querschnitte setzt voraus, daß keine Schubverzerrungen auftreten, was bedeutet, daß rechte Winkel des Halmstücks auch bei Verformung rechte Winkel bleiben, daß also auch der verformte Querschnitt in allen Punkten auf der (ebenfalls verformten) Halmachse senkrecht steht. Diese Annahme trifft für schlanke Stäbe in genügendem Maße zu (s. oben bei den Bemerkungen zur Schubspannung). Die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes kann nur mit Messungen am Halmmaterial nachgeprüft werden. Dabei sind aber verschiedene Schwierigkeiten zu berücksichtigen: Ein Schilfhalm ist ja kein homogener Stab (vgl. Teil I, Kap. 1.1.). Es ist zu erwarten, daß die ver-

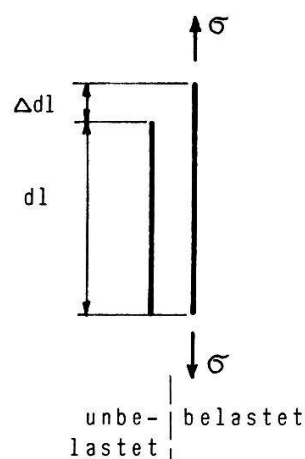


Fig. 1.3. Gedachte, einzelne "Faser" aus dem Halmelement in belastetem und unbelastetem Zustand. (Diese fiktiven "Fasern" dürfen nicht mit den Cellulosefasern, die den wirklichen Stengel aufbauen, verwechselt werden.)

schiedenen Gewebearten je einen eigenen E-Modul haben (sofern das Hooke'sche Gesetz überhaupt gilt). Ebenso ist bei natürlichen Materialien der E-Modul für Zug nicht unbedingt gleich jenem für Druck. Da wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht für das Verhalten im Mikrobereich (einzelne Fasern) interessieren, sondern für den Halm als ganzes, ist die Lösung von einer andern Seite her möglich: Wir nehmen zunächst an, das Hooke'sche Gesetz sei ebenso wie die Hypothesen von Bernoulli-Navier in unserem Fall gültig und überprüfen dann, inwiefern die damit gezogenen Schlußfolgerungen mit dem bei den Festigkeitsmessungen beobachteten Verhalten der Schilfhalme übereinstimmen. Dies ist tatsächlich in genügendem Maße der Fall. Deshalb sei im folgenden der Zusammenhang zwischen äußerer Belastung und Verformung eines Halmes mit den Annahmen der klassischen Statik hergeleitet.

Mit den Bezeichnungen der Figur 1.4. kann das Ebenbleiben der Querschnitte mit der Gleichung

$$\varepsilon = \Phi \cdot \xi \tag{1.10}$$

- $\varepsilon$  ... Dehnung
- $\Phi$  ... Proportionalitätsfaktor
- $\xi$  ... Abstand von der Halmachse

formuliert werden. Das Gleichgewicht zwischen den (Normal-)Spannungen und dem Biegemoment drückt sich in folgender Gleichung aus:

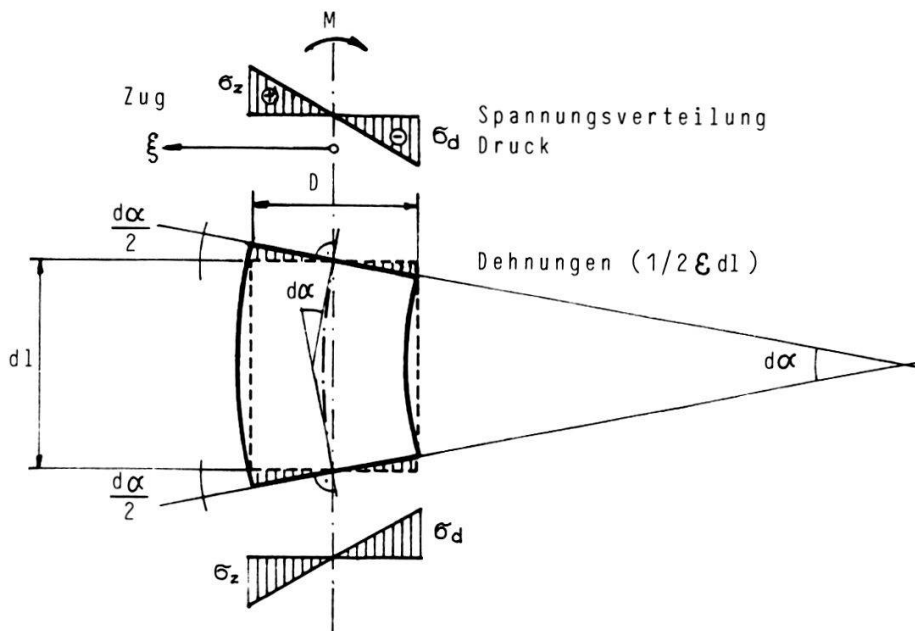


Fig. 1.4. Belastetes Halmelement mit eingezeichneten Spannungen und Dehnungen.

$$M = \int_{QS} \sigma \xi dF \quad (1.11)$$

$\sigma$  ... Spannung  
 $dF$  ... Flächenelement des Querschnitts  
 $QS$  ... Querschnitt

Die Kombination der Gleichungen (1.9), (1.10) und (1.11) führt zu

$$M = E \Phi \int_{QS} \xi^2 dF = E \Phi J \quad (1.12)$$

mit

$$J = \int_{QS} \xi^2 dF \quad [\text{m}^4] \quad (1.13)$$

Der Ausdruck  $J$  heißt Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der zur Bildebene ( $x$ - $z$ -Ebene, vgl. Fig. 1.1., 1.4.) senkrechten, durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden  $\eta$ -Achse. Da die Schwerpunkte aller Querschnitte die Halmachse definieren, schneidet diese  $\eta$ -Achse auch die Halmachse.

Der Proportionalitätsfaktor  $\Phi$  aus Gleichung (1.10) wird uns weiter unten noch beschäftigen. Er wird durch Auflösen der Gleichung (1.12) erhalten:

$$\Phi = \frac{M}{E \cdot J} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (1.14)$$

Die Gleichungen (1.9), (1.10) und (1.14) liefern die Formel zur Berechnung der Spannungen:

$$\sigma = \frac{M}{J} \xi \quad [\text{N/m}^2] \quad (1.15)$$

Die Maximalspannungen treten an den Rändern auf, nämlich dort wo  $\xi$  maximal ist, d.h. für einen runden Schilfhalm bei  $\xi = \pm D/2$ .

$$\underline{\sigma_{max}} = \frac{M}{J} \frac{D}{2} \quad [\text{N/m}^2] \quad (1.16)$$

Die Bedeutung des Faktors  $\Phi$  wird aus der geometrischen Interpretation des Verhältnisses  $\varepsilon/\xi$  ersichtlich (Gl. 1.10). Aus der Figur 1.4. geht hervor, daß

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon dl}{\xi} = \tan \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2} \quad (\text{weil } d\alpha \text{ klein}) \quad (1.17)$$

Da  $\varepsilon/\xi$  nichts anderes ist als  $\Phi$ , kann Gleichung (1.17) mit Berücksichtigung von (1.14) auch so angeschrieben werden:

$$\frac{1}{2} \Phi dl = \frac{1}{2} \frac{M}{E \cdot J} dl = \frac{d\alpha}{2} \quad (1.18)$$

Auflösung nach  $\Phi$  ergibt

$$\Phi = \frac{d\alpha}{dl} = \frac{M}{E \cdot J} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (1.19)$$

In der Figur 1.4. sehen wir sofort, daß  $d\alpha/dl$  nichts anderes als die Krümmung der Halmachse ist und damit auch gleich dem Kehrwert des Krümmungsradius'. Zusammen mit der Figur 1.1. ist auch der Zusammenhang zwischen der Krümmung, dem Drehwinkel  $\alpha$  und der Durchbiegung  $\delta$  ersichtlich: Die Krümmung des Halmelementes über die Länge  $dl$  ist gleich der Änderung des Drehwinkels  $\alpha$  längs dieses Halmelementes. Der Tangens des Drehwinkels ist gleich der ersten Ableitung der Durchbiegung in Richtung der z-Achse:

$$\delta' = \tan\alpha \quad [-] \quad (1.20)$$

Für die meisten Berechnungen der klassischen Statik wird noch als zusätzliche Voraussetzung angenommen, daß die Durchbiegungen  $\delta$  (und damit auch die Drehwinkel  $\alpha$ ) klein seien. Dann gilt

$$\delta' = \frac{d\delta}{dz} \approx \frac{d\delta}{dl} \approx \tan\alpha \approx \alpha \quad [-] \quad (1.21)$$

und damit nach (1.19)

$$\Phi = \frac{d\alpha}{dl} \approx \frac{d\alpha}{dz} \approx \frac{d^2\delta}{dz^2} = \delta'' \quad [\text{m}^{-1}] \quad (1.22)$$

Bei kleinen Durchbiegungen kann damit die Krümmung  $\Phi$  gleich der zweiten Ableitung  $\delta''$  der Durchbiegung in Richtung der unverformten Stabachse (in unserem Beispiel ist es die z-Achse) gesetzt werden. Die Grenze für die Gültigkeit dieser Näherung folgt aus (1.21), der Drehwinkel muß innerhalb der geforderten Genauigkeit mit seinem Tangens übereinstimmen. Sonst muß für den Zusammenhang zwischen Krümmung und Durchbiegung die exakte Gleichung (41.1) aus Teil II benutzt werden, als deren Grenzfall (1.22) für Werte von  $\delta' \ll 1$  betrachtet werden kann.

Gleichung (1.19) ist die gesuchte Verknüpfung zwischen dem Biegemoment  $M$  und der Halmkrümmung  $\Phi$ : Diese ist gleich dem Biegemoment geteilt durch den Ausdruck  $E \cdot J$  (E-Modul mal Flächenträgheitsmoment des Quer-

schnitts). Daher ist es naheliegend, den Wert  $E \cdot J$  als Biegesteifigkeit des Halmelementes (= Widerstand gegen Verkrümmung) zu bezeichnen:

$$E \cdot J = \frac{M}{\Phi} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (1.23)$$

- $E \cdot J$  ... (lokale) Biegesteifigkeit des Halmes [ $\text{N} \cdot \text{m}^2$ ]
- $E$  ... (lokaler) Elastizitätsmodul des Halmes [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]
- $J$  ... Flächenträgheitsmoment des Querschnitts [ $\text{m}^4$ ]
- $\Phi$  ... (lokale) Krümmung des Halmes [ $\text{rad}/\text{m}$ ] bzw. [ $\text{m}^{-1}$ ]

Da wir uns in dieser Arbeit nur mit der Biegebeanspruchung des Schilfhalmes befassen, ist mit der Biegesteifigkeit sein Verformungsverhalten vollständig beschrieben. Der Wert ist einerseits von den Materialeigenschaften (E-Modul), andererseits von der Geometrie (Flächenträgheitsmoment des Querschnitts) abhängig. Während sowohl der E-Modul, wie auch das Flächenträgheitsmoment von Schilfhalmern nur mit großem Aufwand gemessen werden können, ist das Produkt der beiden Größen, eben die Biegesteifigkeit, zumindest als Mittelwert über einen bestimmten Halmabschnitt, experimentell einfach zu bestimmen. Die Schwierigkeiten bei der Bestimmung des E-Moduls rühren vor allem von der Inhomogenität des Halmes her, die Messung des Trägheitsmomentes erfordert bei der Bestimmung des Außen- und Innendurchmessers (je nach Unregelmäßigkeit des Querschnitts in mehreren Richtungen) eine Genauigkeit im Bereich 1/100 mm, denn das Trägheitsmoment eines ringförmigen Querschnittes ist eine Funktion von der Differenz der vierten Potenz dieser Durchmesser. Die geforderte Präzision führt besonders bei weichen Halmen zu Problemen (Zusammendrücken beim Messen).

Als Charakteristikum des Halmes ist die Biegesteifigkeit  $E \cdot J$  unabhängig von der Art der Belastung, sie kann daher als Vergleichsgröße für Schilfpflanzen verschiedener Bestände dienen. Allerdings ist sie keine Materialkonstante, sondern abhängig von der Geometrie. Es mag für Vergleichszwecke wünschenswert sein, diesen Einfluß der Halmgeometrie zumindest teilweise zu eliminieren, was mit gewissen vereinfachenden Annahmen über die Halmgeometrie ohne weiteres möglich ist. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, den Schilfhalm, bzw. den untersuchten Abschnitt daraus, als homogenen, prismatischen Stab mit (vollem) Kreisquerschnitt zu idealisieren. Auf diese Weise wird der Einfluß der Halmstärke eliminiert, während der Einfluß des Halm-aufbaus, insbesondere des Verhältnisses von Wandstärke zu Durchmesser, nach wie vor in der gesuchten Größe enthalten sind. Das Trägheitsmoment, das wir als ideelles Trägheitsmoment  $J_{id}$  bezeichnen wollen, ist dann nur noch vom Außendurchmesser  $D$  abhängig:



$$J_{id} = \frac{\pi}{64} D^4 \quad [\text{m}^4] \quad (1.24)$$

$J_{id}$  ... Idealisierte Trägheitsmoment des Halmquerschnitts [ $\text{m}^4$ ]  
 $D$  ... Halmdurchmesser (außen) [m]

Bei der Messung des Außendurchmessers ist keine so hohe Präzision nötig, wie bei der exakten Berechnung des Trägheitsmomentes, denn der Meßfehler steht hier im Verhältnis zum ganzen Durchmesser und nicht nur zur Wanddicke. Eine Meßgenauigkeit von 1/20 bis 1/10 mm (Schublehre) ist daher ausreichend. Dagegen ist zu beachten, daß die Halme meistens nicht kreisrund sind. Der Durchmesser muß deshalb in einer genau definierten Weise festgelegt werden. In der vorliegenden Arbeit wird immer der in der Richtung der Belastung liegende Durchmesser des Halmes als repräsentativ genommen, weil diese Dimension den stärksten Einfluß hat. Möglich wäre aber auch die Berechnung eines mittleren Durchmessers aus Messungen in verschiedenen Richtungen.

Mit dem ideellen Trägheitsmoment kann man aus der gemessenen Biegesteifigkeit einen ideellen E-Modul ableiten:

$$E_{id} = \frac{E \cdot J}{J_{id}} \quad [\text{N/m}^2] \quad (1.25)$$

Dieser idealisierte E-Modul ist natürlich keine Materialkonstante, denn er ist, wie bereits gesagt, noch abhängig von der Wandstärke sowie von der Anordnung und Verteilung des Festigungsgewebes. Da der Zweck dieser Arbeit nicht im Vergleich der mechanischen Eigenschaften verschiedener Schilfbestände liegt, machen wir hier Gebrauch von dieser vereinfachten Möglichkeit zur Darstellung der Ergebnisse von Steifigkeitsmessungen.

OSTENDORP (1982, 1983) geht dagegen noch einen Schritt weiter, indem er den Halmquerschnitt als Kreisring annimmt, das Trägheitsmoment mithin zu

$$J_r = \frac{\pi}{64} (D_a^4 - D_i^4) \quad [\text{m}^4] \quad (1.26)$$

$J_r$  ... Trägheitsmoment des Kreisringquerschnitts [ $\text{m}^4$ ]  
 $D_a$  ... Außendurchmesser des Halmes [m]  
 $D_i$  ... Innendurchmesser des Halmes [m] (= Außendurchmesser abzüglich Wandstärke)

festlegt.



## 1.2. DEFINITION DER FESTIGKEIT

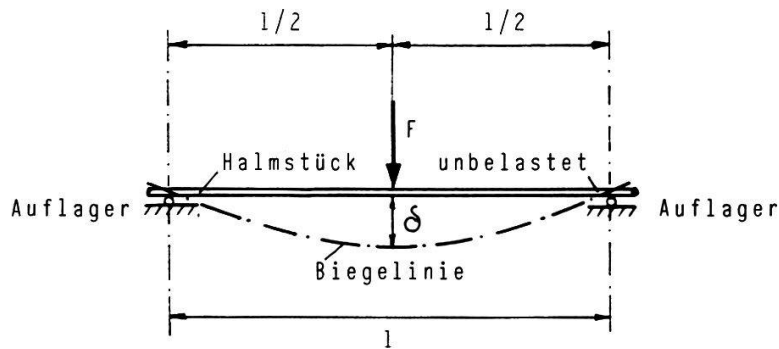
Bezeichnet die Steifigkeit den Widerstand des Schilfhalmes gegen Verformung, so steht der Begriff Festigkeit für den Widerstand gegen Bruch. Da in dieser Arbeit nur die Biegebeanspruchung interessiert, verstehen wir unter Festigkeit hier die Biegebruchfestigkeit oder kürzer: Biegefestigkeit (analog zur Biegesteifigkeit). Der Biegebruch wird durch das Biegemoment und die dadurch bewirkten Spannungen im Halm verursacht. Unter Festigkeit kann man daher sowohl das Bruchmoment, wie auch die Bruchspannung verstehen. Ein Blick auf Gleichung (1.16) zeigt, daß für Bruchmoment und Bruchspannung hinsichtlich Meß- und Interpretierbarkeit analog dasselbe gilt, wie für Biegesteifigkeit und E-Modul: Das Bruchmoment ist unabhängig von der äußeren Belastung und charakterisiert das Halmstück als ganzes, die Bruchspannung ist eine Materialeigenschaft des Halmgewebes. Analog zum Vorgehen im vorigen Kapitel können wir unter Verwendung des idealisierten Trägheitsmomentes eine ideelle Bruchspannung definieren (vgl. Gl. 1.16):

$$\sigma_{Br id} = \frac{M_{Br} D}{J_{id} 2} \quad [\text{N/m}^2] \quad (1.27)$$

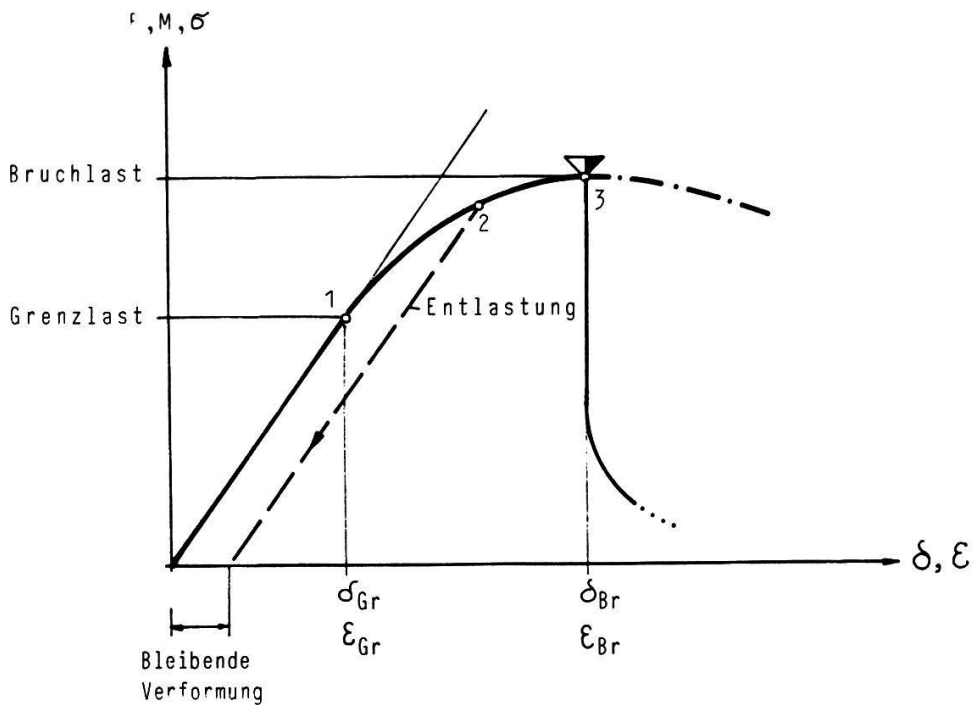
$$\begin{array}{ll} \sigma_{Br id} & \dots \text{ Idelle Bruchspannung } [\text{N/m}^2] \\ J_{id} & \dots \text{ Idealisierte Trägheitsmoment des Halmquerschnitts } [\text{m}^4] \\ M_{Br} & \dots \text{ Bruchmoment } [\text{N}\cdot\text{m}] \\ D & \dots \text{ Halmdurchmesser (außen) } [\text{m}] \end{array}$$

Damit Bruchmoment und Bruchspannung wohldefinierte Größen sind, muß noch festgelegt werden, was genau unter "Bruch" verstanden werden soll. Da bei einem Biegebruch ("Knicken") die beiden Teilstücke in der Regel nicht voneinander abgetrennt werden, ist diese Frage nicht so einfach zu beantworten, wie es auf den ersten Blick scheint. Es wäre an sich naheliegend, den Eintritt des Bruchs als jenen Punkt zu definieren, wo durch die Beanspruchung des Halmes eine zumindest kurz- und mittelfristig irreversible Schädigung entsteht. Die zeitliche Einschränkung muß deshalb gemacht werden, weil die Pflanzen eine gewisse Fähigkeit zur Selbstheilung besitzen. Dieser Punkt ist jedoch mit einfachen Mitteln nicht feststellbar, und es muß ein anderer Weg gesucht werden. Dazu ist es zweckmäßig, den Verlauf eines Biegebruches einmal qualitativ zu verfolgen.

Im einfachsten Fall unterstützt man dazu ein Halmstück an seinen beiden Enden und bringt in der Mitte eine Belastung auf (Fig. 1.5.) Mit zunehmender



**Fig. 1.5.** Einfache Versuchsanordnung für einen Biegeversuch  
 $F$  = Belastung (z.B. Gewicht oder Federwaage)



**Fig. 1.6.** Kraft-Durchbiegungsdiagramm eines Biegeversuchs mit einem Schilfhalm.  
Das Bild bleibt qualitativ gleich, wenn anstelle der Kraft  $F$  das Biegemoment  $M$  oder die (Maximal-)Spannung  $\sigma$  eines Querschnitts auf der Ordinate aufgetragen wird, ebenso wenn auf der Abszisse anstelle der Durchbiegung  $\delta$  die (Faser-)Dehnung  $\epsilon$  dargestellt wird.  
Im linear-elastischen Bereich (Punkt 0 bis 1) sind Belastung und Verformung zueinander direkt proportional, die Entlastung folgt derselben Linie (keine bleibenden Verformungen). Wird der Halm über diesen Bereich hinaus belastet, so kehrt er auch bei vollständiger Entlastung nicht mehr in seinen ursprünglichen Zustand zurück, es bleibt eine plastische Verformung (Entlastung folgt bei einer Belastung bis zum Punkt 2 der gestrichelten Linie). Wird der Halm über seine Bruchfestigkeit (Punkt 3) belastet, so ist der weitere Verlauf der Kurve davon abhängig, ob die Last von der Verformung unabhängig ist (z.B. Belastung durch aufgezogene Durchbiegung, strichpunktierte Linie) oder nicht (z.B. Federwaage, ausgezogene Linie).

Belastung biegt sich der Halm immer mehr durch, bis zu dem Punkt, wo die Belastung nicht mehr gesteigert werden kann, da der Halm "verreist". Zeichnet man Kraft und Durchbiegung gegeneinander auf, so erhält man normalerweise ein Diagramm in der Art der Figur 1.6. Aus den Gleichungen (1.3) und (1.16) geht hervor, daß zumindest bei kleinen Verformungen Belastung, Biegemoment und maximale Spannung zueinander direkt proportional sind. Aus den Gleichungen (1.17), (1.19) und (1.22) folgt, daß die Dehnungen und die Durchbiegungen solange zueinander direkt proportional sind, als die Krümmung mit genügender Näherung gleich der zweiten Ableitung der Biegelinie in Richtung der Halmachse gesetzt werden darf. Deshalb kann die Darstellung der Figur 1.6. mit entsprechender Anpassung der Skalen ebenso als Biegemoment-Durchbiegungs- oder als Spannungs-Dehnungskurve interpretiert werden.

Auf dieser Kurve sind drei Bereiche zu unterscheiden: Zuerst (zwischen Punkt 0 und 1) verläuft die Kurve linear, was bedeutet, daß in diesem Bereich die Annahmen der klassischen Statik gültig sind (die oben erwähnten Proportionalitäten nach der Hypothese von Bernoulli-Navier und dem Hooke'schen Gesetz begründen einen linearen Zusammenhang zwischen den aufgetragenen Größen). Solange der Halm nicht über diesen Bereich hinaus belastet wird, kehrt er nach Wegnehmen der Kraft wieder in seine Ausgangslage zurück. Wir sprechen deshalb vom (linear-)elastischen Bereich. Belasten wir den Halm stärker, so wandert die Kurve allmählich von der ursprünglichen Geraden weg, die Verformungen nehmen überproportional zu. Wird der Halm in diesem zweiten Bereich (z.B. bei Punkt 2 in Fig. 1.6.) entlastet, so kehrt er nicht mehr in die Ausgangslage zurück (gestrichelte Linie): Es entsteht eine bleibende Verformung. Tritt dies (in der Natur) nur einmal auf, so wird sich der Halm durch entsprechende Zellstreckung an die neuen Verhältnisse anpassen. Wird dagegen die Belastung bis jenseits der Elastizitätsgrenze oft wiederholt, so weicht der Halm (im Experiment) immer mehr aus; bei der Art der in der Natur vorkommenden Beanspruchung (Wellenschlag) bedeutet dies meist, daß er "abliegt".

Bei ständiger Zunahme der Belastung steigt die Kurve bis zu einem bestimmten Maximum (Punkt 3 in Fig. 1.6.), wo der Halm im eigentlichen Sinne des Worte bricht. Es entsteht ein deutlich sichtbarer Knick, hervorgerufen durch das Einbeulen der Halmwand auf der Druckseite (in der Anordnung der Figur 1.5. ist dies die Halmoberseite). In einigen Fällen wird der Bruch auch durch das Zerreißen der Fasern auf der Zugseite verursacht, besonders dann, wenn die Anordnung so gewählt wird, daß die Maximalbeanspruchung auf einen

Knoten fällt. Im ersten Fall kann in der Bruchstelle immer noch ein bestimmtes Biegemoment übertragen werden; wird die Belastung durch eine aufgezogene Verformung gesteuert, so nimmt die Kurve den Verlauf der strichpunktieren Linie in der Figur 1.6., wird die Last mit einer Feder aufgebracht, so fällt die Kraft nach dem Bruch zusammen und sinkt auf Null (ausgezogene Linie in Figur 1.6.).

Als Eintritt des Bruches kann man sinnvollerweise die Punkte 1 oder 3 definieren. Die Wahl wird durch Überlegungen zur Zweckmäßigkeit bestimmt, die hier kurz skizziert seien. Der Punkt 1 in der Figur 1.6. (Elastizitätsgrenze) entspricht sicher mit guter Näherung dem oben definierten Punkt, wo (kurzfristig) irreversible Schäden entstehen. Um ihn zu bestimmen, muß man die Belastungs-Verformungskurve in ihrem ganzen Verlauf kennen, der kritische Punkt kann dann einfach und recht genau aus der Darstellung herausgemessen werden (vgl. Fig. 1.9.). Dazu sind jedoch umfangreiche Prüfeinrichtungen erforderlich, die für Versuche im Feld nicht in Frage kommen. Bei Feldversuchen hat man keine andere Wahl als den sichtbaren Bruch, d.h. die maximal aufbringbare Last, zu messen. Auch dieser Wert ist eine interessante Vergleichsgröße und ist mit dem entsprechenden Wert der Elastizitätsgrenze stark korreliert. Besteht die Möglichkeit für Labormessungen, so wird man in erster Linie die Elastizitätsgrenze selbst als Bruchkriterium wählen, daneben aber auch den Maximalwert - Punkt 3 - protokollieren und das Verhältnis der beiden ausrechnen.

Da wir sowohl Feld-, als auch Laborversuche durchführten, werden wir im folgenden zur genauen Unterscheidung jene Werte, die der Elastizitätsgrenze entsprechen, mit der Vorsilbe Grenz- kennzeichnen (Grenzmoment, Grenzspannung usw.), die zum Maximalwert gehörigen Größen dagegen mit Bruch- (Bruchmoment, Bruchspannung usw.).

### 1.3. DIE BERECHNUNG DER STEIFIGKEIT UND FESTIGKEIT BEI BIEGEVERSUCHEN

Der Zweck von Biegeversuchen ist die Bestimmung einzelner oder aller der in den vorigen Kapiteln definierten Größen. Während zur Berechnung der Bruch-(Grenz-)Festigkeit die Messung der Bruch-(Grenz-)Kraft und die Kenntnis der Geometrie der Versuchsanlage genügen, muß zur Bestimmung der Biegesteifigkeit außerdem die der aufgetragenen Last entsprechende Durchbiegung gemessen werden.

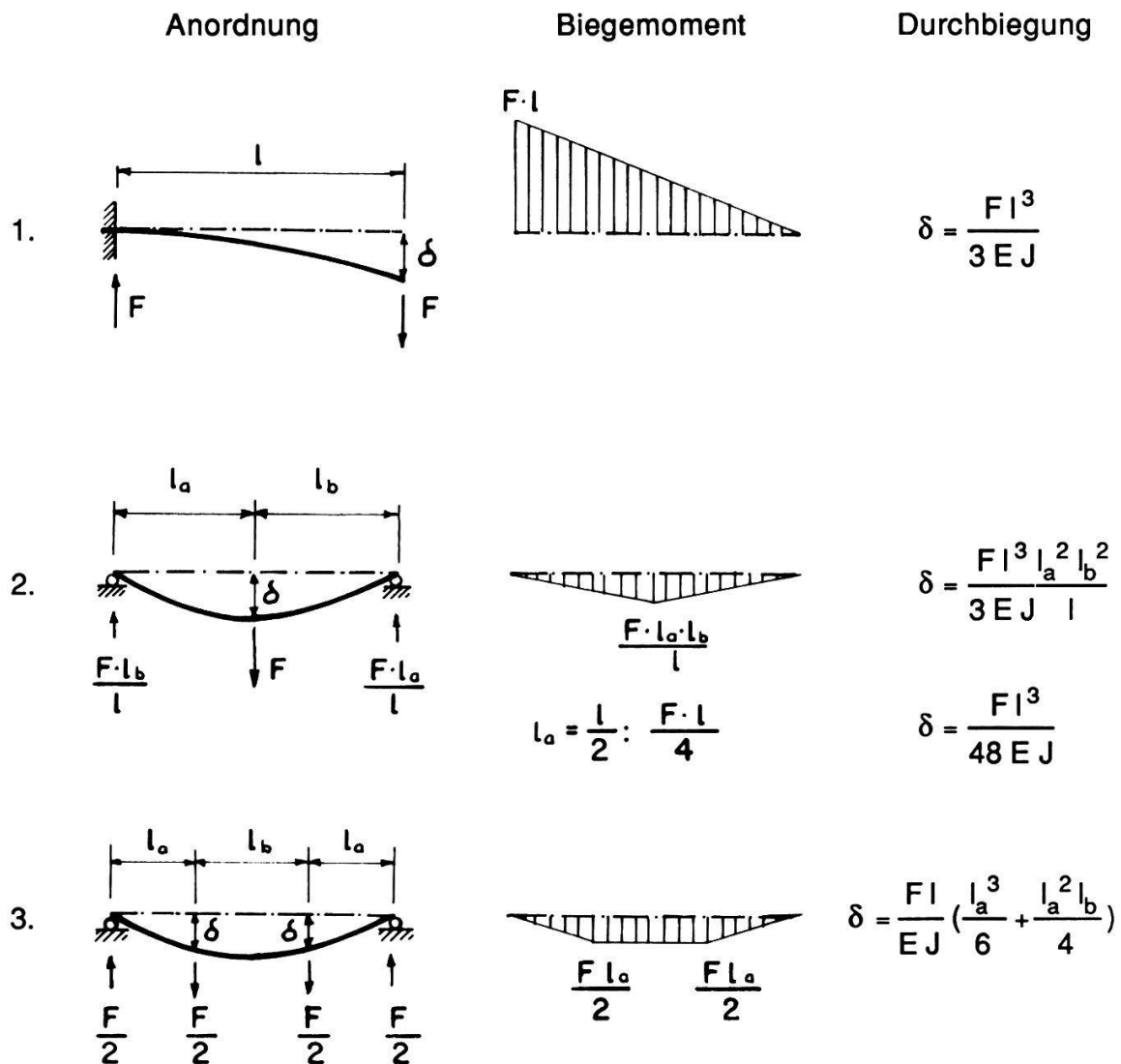


Fig. 1.7. Drei mögliche Prüfanordnungen für Schilfbiegeversuche, mit zugehörigen Auflagerkräften, Biegemomentverteilungen und Durchbiegungen.

1. Halm einseitig fest eingespannt, am anderen Ende belastet
2. Halm beidseitig aufgelegt, dazwischen (bzw. in der Mitte) belastet
3. Halm beidseitig aufgelegt, in zwei symmetrisch gelegenen Punkten belastet

### 1.3.1. Berechnung der Biegesteifigkeit

Die Figur 1.7. zeigt links drei mögliche Anordnungen für Biegeversuche:

1. Halm auf einer Seite fest eingespannt, am anderen Ende belastet.
2. Halm an beiden Enden aufgelegt, ungefähr in der Mitte belastet ("Dreipunktlagerung").
3. Halm an beiden Enden aufgelegt, in zwei symmetrisch gelegenen Punkten belastet ("Vierpunktlagerung").

In der gleichen Figur sind auch die längs der Halmachse wirkenden Biegemomente und die Auflagerkräfte eingetragen. Diese Größen folgen aus den in jedem Punkt zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen (Äquivalenz der äußeren - Belastung und Lagerkräfte - und der inneren Kräfte - Querkraft und Biegemoment). Sind die Durchbiegungen  $\delta$  klein, so ist die Halmkrümmung  $\Phi$  nach Gleichung (1.22) gleich der zweiten Ableitung  $\delta''$  der Biegelinie in Richtung der (unverformten) Stabachse, so daß die zweimalige Integration der rechten Seite von (1.19) über die Stabachse die Gleichung der Biegelinie liefert. Dabei müssen natürlich die für die einzelnen Versuchsanordnungen unterschiedlichen Randbedingungen berücksichtigt werden. Setzt man längs des ganzen Stabes konstante Querschnittswerte ( $E \cdot J$ ) voraus, so ist die Integration von (1.19) für die in Fig. 1.7. gezeigten Verläufe des Biegemomentes in geschlossener Form möglich. Für die Durchbiegung unter den Lasteinleitungspunkten sind die entsprechenden Ausdrücke in der Figur 1.7. eingetragen. Da bei den Biegeversuchen sowohl die Belastung (Kraft  $F$ ), als auch die Durchbiegung  $\delta$  unter den Lasteinleitungspunkten bekannt sind, kann aus den Formeln der Figur 1.7. die Biegesteifigkeit berechnet werden:

Anordnung 1 (Einseitig eingespannter Stab):

$$E \cdot J = \frac{l^3}{3} \frac{dF}{d\delta} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (1.28)$$

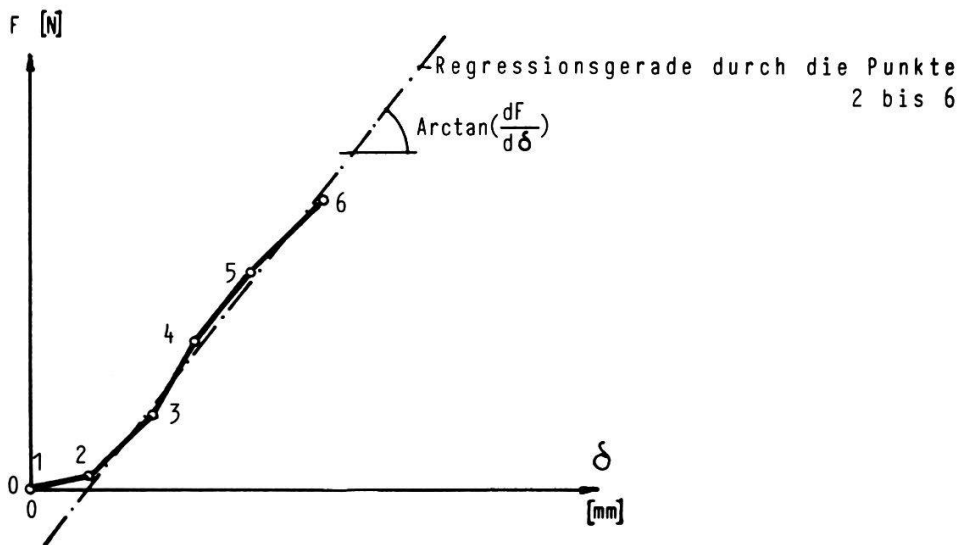
Anordnung 2 (Dreipunktlagerung):

$$E \cdot J = \frac{l_a^2 l_b^2}{3l} \frac{dF}{d\delta} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (1.29)$$

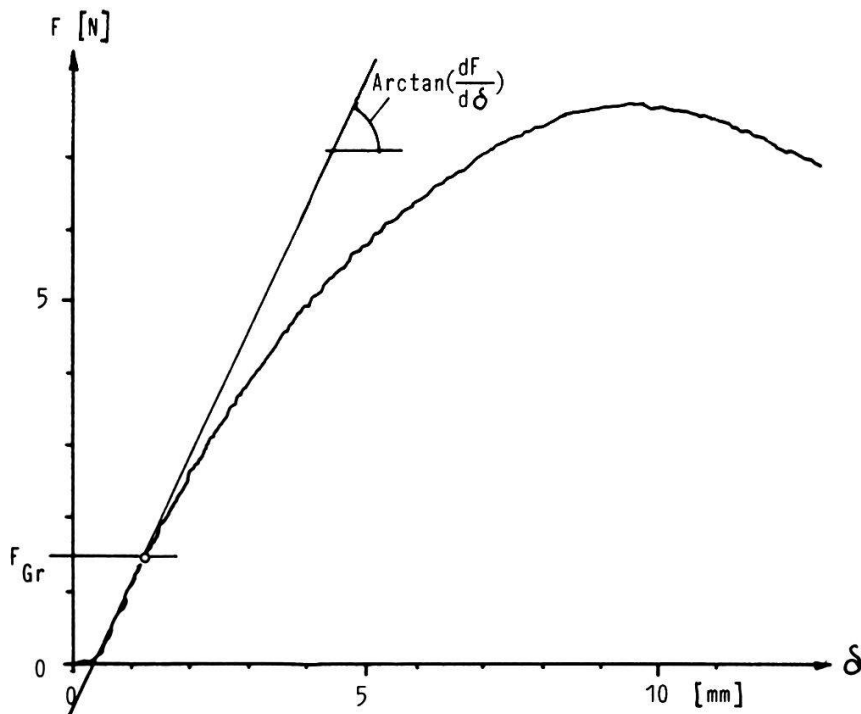
- falls  $l_a = l_b = l/2$ :

$$E \cdot J = \frac{l^3}{48} \frac{dF}{d\delta} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (1.30)$$

Anordnung 3 (Vierpunktlagerung):



**Fig. 1.8.** Beispiel eines Biegeversuchs mit stufenförmiger Laststeigerung. Das zur Berechnung der Biegesteifigkeit erforderliche Verhältnis von Lastzunahme: Durchbiegungszunahme ( $dF/d\delta$ ) entspricht der Steigung der Regressionsgeraden durch die Punkte 2 bis 6. Wegen des Schlupfes zu Beginn des Versuchs (Punkte 1 und 2) darf der Punkt 1 für die Regressionsrechnung nicht verwendet werden, ebenso alle Punkte, welche bei höherer Belastung außerhalb des linear-elastischen Bereichs liegen.



**Fig. 1.9.** Beispiel eines Biegeversuchs mit stetiger Laststeigerung und automatischer Aufzeichnung von Kraft und Durchbiegung. Die dem linear-elastischen Bereich entsprechende Gerade wird graphisch gefunden, ebenso der Punkt der Grenzbelastung  $F_{Gr}$ .



$$E \cdot J = \left( \frac{l_a^3}{6} + \frac{l_a^2 l_b}{4} \right) \frac{dF}{d\delta} \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2] \quad (1.31)$$

Die so erhaltene Biegesteifigkeit  $E \cdot J$  ist ein Mittelwert für das untersuchte Halmstück, da ja von konstanten Querschnittswerten ausgegangen wurde. In den obigen Formeln ist der Quotient  $F/\delta$ , welcher eigentlich nach den Gleichungen der Figur 1.7. einzusetzen wäre, durch den Differentialquotienten  $dF/d\delta$  ersetzt worden. Da wir für die Bestimmung der Biegesteifigkeit mit der Belastung innerhalb des linear-elastischen Bereichs bleiben müssen, stimmen die beiden Ausdrücke in ihrem Wert überein. Der Differentialquotient kann meßtechnisch leichter bestimmt werden, da der Nullpunkt bei den Biegeversuchen nie genau bekannt ist, denn zu Beginn der Belastung entstehen wegen des unvermeidlichen Schlupfes zusätzliche Verschiebungen, deren Größe unbekannt ist (vgl. Fig. 1.8. und 1.9.). Wegen der immer vorhandenen kleinen Meßfehler ist es außerdem unerlässlich, mehrere Laststufen zu messen. Die "wirkliche" Kraft-Verformungslinie erhält man dann durch lineare Regression. Der Regressionskoeffizient (Steigung der Geraden) ist dann gerade gleich dem gesuchten  $dF/d\delta$ . Selbstverständlich müssen für die Regressionsrechnung alle Punkte, die sich mit einiger Wahrscheinlichkeit außerhalb des linear-elastischen Bereichs befinden, weggelassen werden. Bei Laborversuchen mit stetiger Aufzeichnung von Last und Durchbiegung findet man die gesuchte Gerade am besten graphisch (Fig. 1.9.) und kann deren Steigung herausmessen.

### 1.3.2. Berechnung der Biegefestigkeit

Je nach Prüfmethode und Anforderungen kann man aus dem Biegeversuch die Bruch- und/oder die Grenzlast bestimmen. Die folgenden Darlegungen behandeln den Fall der Bruchlast. Da die Zusammenhänge für die Grenzlast die selben sind, kann man für diesen Fall in diesem Kapitel überall den Begriff "Bruch-" durch "Grenz-", bzw. "Br" durch "Gr", ersetzen.

Unter der Voraussetzung, daß der Bruch am Ort des maximalen Biegemomentes eintritt, ergeben sich für die drei Anordnungen der Figur 1.7. die folgenden Bruchmomente:

Anordnung 1 (einseitig eingespannter Stab):

$$M_{Br} = F_{Br} \cdot l \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (1.32)$$



Anordnung 2 (Dreipunktlagerung):

$$M_{Br} = F_{Br} \frac{l_a l_b}{l} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.33)$$

- falls  $l_a = l_b = l/2$ :

$$M_{Br} = \frac{F_{Br} l}{4} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.34)$$

Anordnung 3 (Vierpunktlagerung):

$$M_{Br} = \frac{F_{Br} l_a}{2} \quad [\text{N}\cdot\text{m}] \quad (1.35)$$

Der Bruch tritt nicht unbedingt am Ort des maximalen Biegemomentes auf, weil die Bruchfestigkeit längs des Halmes variiert: Nimmt die Bruchfestigkeit vom Ort des maximalen Biegemomentes verhältnismäßig rascher ab als das vorhandene Biegemoment, so wird der Bruch an einem anderen Ort eintreten (vgl. Fig. 1.10.). Wie dieser für die Prüfung ungünstige Fall vermieden werden kann, wird bei der Beschreibung der Prüfeinrichtungen gezeigt.

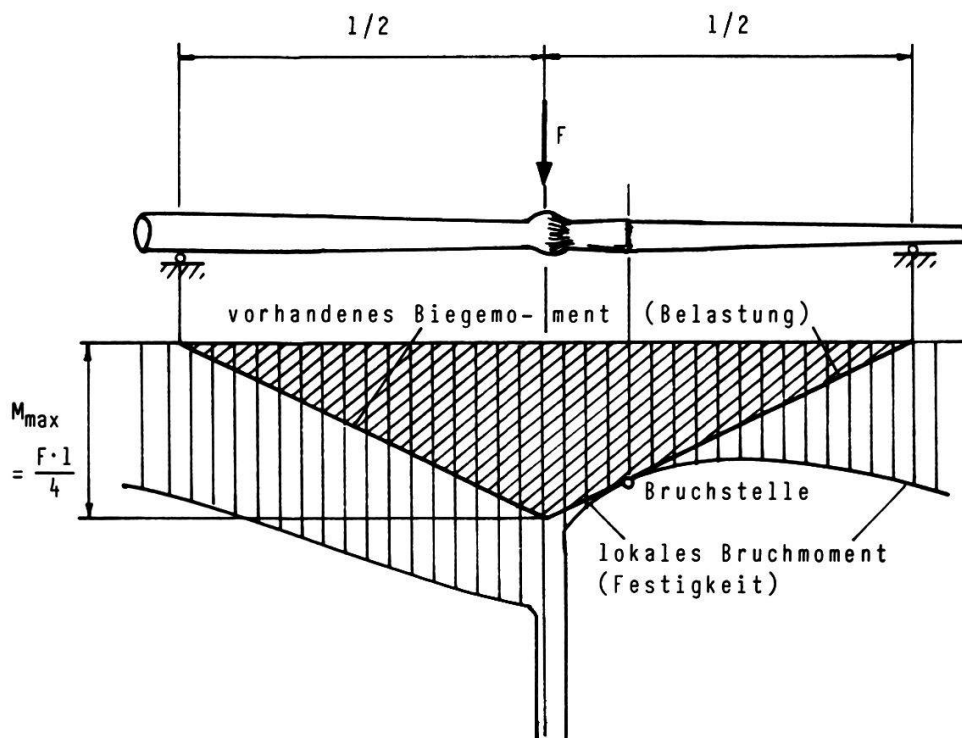


Fig. 1.10. Da die Festigkeit (Bruchmoment) längs des Halmstückes variiert, tritt der Bruch nicht unbedingt am Ort des maximalen vorhandenen Biegemomentes (unter der Kräfteinleitung) auf, sondern dort, wo das lokale Biegemoment bei wachsender Belastung zuerst die Größe des (lokalen) Bruchmomentes erreicht.