Die Ausgleichung der Fehler im Polygonzuge

II. Jahrgang № 11 15. November 1904

Zeitschrift

des

Vereins Schweiz. Konkordatsgeometer

Organ zur Hebung und Förderung des Vermessungs- und Katasterwesens

Jährlich 12 Nummern. Jahres-Abonnement Fr. 4.-

Unentgeltlich für die Mitglieder

Redaktion: F. Brönnimann, Bern | ***Expedition: H. Keller in Luzern***

6 14

Die Ausgleichung der Fehler im Polygonzuge.

Von W. Leemann, Kantonsgeometer in Frauenfeld.

Die strenge, wissenschaftliche Ausgleichung der Fehler im Polygonzuge fordert verhältnismäßig bedeutend mehr Rechenarbeit als z. B. die Einschaltung einzelner trigonometrischer Punkte. Es rührt dies daher, daß im Polygonzug gleichzeitig Winkel- und Längenmessungsfehler auszugleichen sind, während bei der trigonometrischen Punktbestimmung, abgesehen von ganz außerordentlichen Fällen, nur Winkelfehler in Betracht fallen. Die große Rechenarbeit, welche die Anwendung der Methode d. kl. Quadrate auf die Berechnung des Polygonzuges verursacht, bildete denn auch, vereint mit der Tatsache, daß das einfache, heute allerorts übliche Ausgleichungsverfahren in der Mehrzahl der Fälle genügt, einen Umstand, welcher dem streng wissenschaftlichen Verfahren den Eingang in die Praxis erschwerte. An dieser Stelle mag es interessieren, was hierüber in **„Gauß, die trig.- und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst“** in Kapitel 6 gesagt ist: „Die Verteilung der Fehler fy und fx müßte, wenn sie streng wissenschaftlich geschehen sollte, in Verbindung mit der Verteilung des Winkelfehlers f_β nach der Methode d. kl. Quadrate erfolgen. Wenn irgendwo führte dies aber bei den polyg. Rechnungen im engern Sinne viel zu weit und wäre dabei nicht einmal immer von zweifellos gutem Erfolge. Es handelt sich hierbei um die Verbindung von ungleichartigen Grössen — Winkeln und Längen, — über deren verschiedene Genauigkeit Hypothesen aufgestellt werden müßten, die schwerlich allgemeine Gültigkeit hätten. Denn nicht allein können je nach der Beschaffenheit des Geländes die Winkelmessungen unter sich und die Streckenmessungen unter sich von verschiedener Genauigkeit sein, sondern es kann auch in dem einen Gelände die Winkelmessung eine vergleichsweise höhere Genauigkeit darbieten, als die Streckenmessung, während in dem andern Gelände das umgekehrte Verhältnis stattfindet, ganz abgesehen von den Einflüssen der Witterung, die das Verhältnis verschieben, sowie davon, daß bei der Streckenmessung zugleich die Art der Handhabung der Meßgeräte von erheblichem Einfluß ist. Außerdem können die in fy und fx mitenthaltenen Netzfehler nicht von den polyg. Fehlern getrennt werden, wodurch es vollends **unmöglich wird, eine richtige Grundlage für die Gesamtausgleichung aller** Fehler zu gewinnen."

Das allgemein übliche primitive Ausgleichungsverfahren, welches wohl an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt, aber strenger wissenschaftlicher Begründung entbehrt, vermag jedoch den feinfühligeren Geometer nicht zu befriedigen, sondern es empfindet derselbe das Bedürfnis nach einem rationelleren Ausgleichungsverfahren, einem Verfahren, welches einerseits auf wissenschaftlicher Basis aufgebaut, anderseits praktisch anwendbar ist. Diesem Bedürfnis, welches schon lange bestanden haben mag, sind eine ganze Reihe von Näherungsverfahren entsprungen. Ein solches Näherungsverfahren ist denn auch das im nachfolgenden entwickelte, welchem sowohl der Vorzug der Einfachheit, als auch derjenige der Wissenschaftlichkeit zukommen dürfte. Der Grundgedanke, welcher diesem Ausgleichungsverfahren zugrunde liegt, ist im gleichen Kapitel 6 des eingangs erwähnten Werkes enthalten, wo es heißt: „7. Will man bei der Verteilung der Fehler fy und fx möglichst scharf verfahren, so wird man in Berücksichtigung der Verschiedenartigkeit der Fehler l und φ (l = Längenfehler, φ = Querverschiebung) die Verbesserungen der Δx und Δy so bestimmen müssen, daß der Längsfehler l vorzugsweise durch die Änderung der Strecken, der Querfehler φ vorzugsweise durch die Änderung der Brechungswinkel des Polygonzuges vernichtet wird."

„Die Fehler der Streckenmessung werden nicht sämtlich als rein zufällige, sondern zum Teil als **konstante** Fehler anzusehen sein, die meistens im gleichen Sinne wirken und den Strecken proportional sind. Umgekehrt ist es mit der Winkelmessung; hier können konstante Fehler zwar auch vorkommen, im großen und ganzen muß aber vorausgesetzt werden, daß die Fehler teils positiv, teils negativ auftreten. Diese Verschiedenartigkeit wird bei der Fehlerverteilung nicht unberücksichtigt bleiben dürfen."

Was die konstanten Längenfehler bei den Polygonzügen anbetrifft, muß jedoch der Vollständigkeit wegen noch bemerkt werden, daß z. B. bei neueren Städtevermessungen, welche erhöhte Präzision erheischen, jene aus einer größern Zahl von Zügen von Anfang an ermittelt werden und sodann in gleicher Weise, wie die Lattenfehler und die Reduktion auf den Meeresspiegel, im ganzen Polygonnetz Berücksichtigung finden. Auf diese Weise können dann die konstanten Längenfehler als eliminiert betrachtet werden und es hätte in solchen speziellen Fällen ein Ausgleichungsverfahren, ebenso, wie bei den Winkeln, auch bei den Seiten auf konstante Fehler keine Rücksicht zu nehmen. In den weitaus meisten Fällen werden aber die bezeichneten Vorsichtsmaßregeln nicht getroffen und es erscheint daher als vollkommen gerechtfertigt, bei einem Ausgleichungsverfahren, wie das im folgenden behandelte, welches allgemeine Gültigkeit besitzen soll, die konstanten Längenfehler in Betracht zu ziehen.

Ausgleichung des Polygonzuges mit Trennung von Winkel- und Seitenausgleichung.

Der im folgenden entwickelten Theorie liegen 3 Haupt-Bedingungen zu Grunde:

1. Die Ausgleichung der Winkel und Seiten ist getrennt durchzuführen.

2. Die Ausgleichung der Polygonwinkel hat den Azimutalwiderspruch, sowie die Querverschiebung des Zuges zum Verschwinden zu bringen und die Fehlerquadratsumme $[v_{,,} \, v_{,,}]$ soll ein Minimum sein.

3. Die Ausgleichung der Polygonseiten hat lediglich den Längenfehler zum Verschwinden zu bringen und es soll $[p \, v_s \, v_s]$ ein Minimum sein.

Die gebrauchten Buchstaben haben folgende Bedeutungen:

		Verbesserungen:	
Winkel:	$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \ldots \alpha_n$	$v_{\alpha 0} \quad v_{\alpha 1} \quad v_{\alpha 2} \ldots v_{\alpha n}$	
Azimute:	$z_1 \quad z_2 \quad z_3 \ldots z_n$	$v_{z1} \quad v_{z2} \quad v_{z3} \ldots v_{zn}$	
Seiten:	$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \ldots s_n$	$v_{s1} \quad v_{s2} \quad v_{s3} \ldots v_{sn}$	
Ordinatenunterschiede:	$\Delta y_1 \; \Delta y_2 \; \Delta y_3 \ldots \Delta y_n$	$v_{y1} \quad v_{y2} \quad v_{y3} \ldots v_{yn}$	von den Winkelverbesserungen herrührend
		$v'_{y1} \quad v'_{y2} \quad v'_{y3} \ldots v'_{yn}$	von den Seitenverbesserungen herrührend
Abscissenunterschiede:	$\Delta x_1 \; \Delta x_2 \; \Delta x_3 \ldots \Delta x_n$	$v_{x1} \quad v_{x2} \quad v_{x3} \ldots v_{xn}$	von den Winkelverbesserungen herrührend
		$v'_{x1} \quad v'_{x2} \quad v'_{x3} \ldots v'_{xn}$	von den Seitenverbesserungen herrührend

Koordinatenwidersprüche { vor der Winkelausgleichung $fy, \; fx$
nach „ „ $fy' \; fx'$

Azimutalwiderspruch $= w_1$ } durch Verbessern der Winkel
Querverschiebung (linear) $= w_2$ } zu beseitigen

Längenfehler des Zuges $fs' = \sqrt{fy'^2 + fx'^2}$ durch Verbessern der Seiten zu beseitigen

a) Winkelausgleichung.

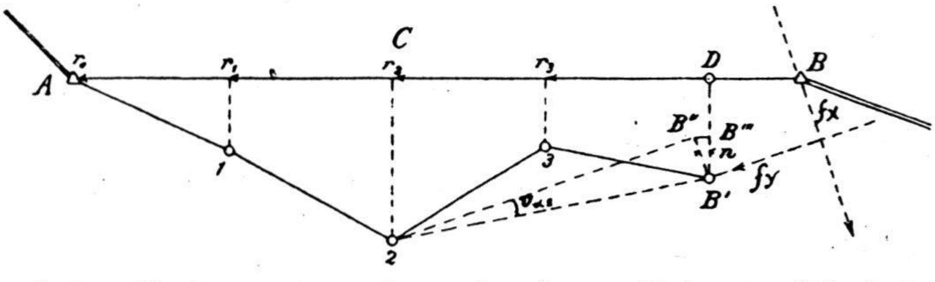
Bestimmung der Koeffizienten a und b der Fehlergleichungen:

$$\alpha_0 \; v_0 + \alpha_1 \; v_1 + \alpha_2 \; v_2 \ldots \; \alpha_n \; v_n + w_1 = 0$$

$$b_0 \; v_0 + b_1 \; v_1 + b_2 \; v_2 \ldots \; b_n \; v_n + w_2 = 0$$

Die Koeffizienten **a** sind alle gleich **1**.

Die Koeffizienten **b** ergeben sich aus folgendem:



Jede Verbesserung der einzelnen Polygonwinkel bewirkt eine Drehung des Zugarmes, welcher vom betreffenden Polygonpunkt bis zum Punkte B' reicht. Eine Verbesserung, welche wir z. B. am Winkel α_2 anbringen, bewirkt eine Drehung des Zugarmes 2 bis B'. Die Bewegung, welche dabei der Punkt B' macht, ist $B'-B''$. Diese Verschiebung $B'-B''$ entspricht einer Querverschiebung des ganzen Polygonzuges von B' bis B'''. $B'-B'''$ ist aber gleich $(B'-B'') \cos n$. Der Winkel n ist auch der Neigungswinkel der Geraden $2-B'$ mit der Richtung $A-B$. Die Querverschiebung $(B'-B''')$, welche durch v_{a2} hervorgerufen wird, berechnet sich nun einfach:

Es ist $$B'-B''' = (B'-B'') \cos n$$

$$B'-B'' = (2-B') \frac{v_{a2}}{\varrho}$$

somit $$B'-B''' = (2-B') \cos n \frac{v_{a2}}{\varrho}$$

Nun ist also $(2-B') \cos n = C-D = r_2$

Dann ist $$B'-B''' = r_2 \frac{v_{a2}}{\varrho} = \frac{r_2}{\varrho} v_{a2}$$

Der Koeffizient b_2 ist also gleich $\frac{r_2}{\varrho}$

und analog $b_1 = \frac{r_1}{\varrho}$

$b_0 = \frac{r_0}{\varrho}$

ferner ist $b_n = o$

Alle Koeffizienten b haben positives Vorzeichen.

Die Strecken r_0 r_1 r_2 ... werden am einfachsten auf graphischem Wege ermittelt, indem man den vorläufig blind gerechneten Zug ins Polygonnetz einzeichnet und die Polygonpunkte $1, 2, 3$ ... auf die Seite AB projiziert. Desgleichen wird die Querverschiebung $w_2 = B'-D$ des vorläufig blind gerechneten Polygonzuges am einfachsten und mit genügender Schärfe graphisch erhalten, indem man die Koordinatenwidersprüche in vergrößertem Maßstabe im Polygonnetz aufträgt. (Siehe Figur.)

Die Berechnung der v_a geschieht nun in bekannter Weise mit Hülfe von Korrelaten. Die Korrelaten-Gleichungen lauten:

$$[aa]\, K_1 + [ab]\, K_2 + w_1 = o$$
$$[ab]\, K_1 + [bb]\, K_2 + w_2 = o$$

woraus sich die K_1 und K_2 nach folgenden Formeln berechnen:

$$K_1 = -\frac{[bb]\, w_1 - [ab]\, w_2}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}$$

$$K_2 = -\frac{[aa]\, w_2 - [ab]\, w_1}{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}$$

und hierauf die v_α:

$$v_{\alpha 0} = a_0\, K_1 + b_0\, K_2$$
$$v_{\alpha 1} = a_1\, K_1 + b_1\, K_2$$
$$v_{\alpha 2} = a_2\, K_1 + b_2\, K_2$$

Denkt man sich nun diese Winkelverbesserungen v_α an den Polygonwinkeln angebracht, die verbesserten Azimute neu gebildet und mit diesen die Koordinaten-Unterschiede wieder gerechnet, so erhält man für den Endpunkt des Polygonzuges Koordinatenwerte, welche einem Punkt der Geraden AB entsprechen, daß eine Querverschiebung somit nicht mehr vorhanden ist. Eine wiederholte Berechnung des Polygonzuges auf Grund der verbesserten Polygonwinkel ist aber nicht notwendig, weil die Änderungen der Koordinaten-Unterschiede direkt aus den Azimutänderungen abgeleitet werden können. Es ist nämlich:

$$v_{y1} = \frac{\Delta x_1}{\varrho}\, v_{z0} \quad ; \quad v_{x1} = \frac{\Delta y_1}{\varrho}\, v_{z0}$$

$$v_{y2} = \frac{\Delta x_2}{\varrho}\, v_{z1} \quad ; \quad v_{x2} = \frac{\Delta y_2}{\varrho}\, v_{z1}$$

Das Vorzeichen von $\left\{\begin{matrix} v_y \\ v_x \end{matrix}\right.$ ist im $\left\{\begin{matrix} \text{I. und IV.} \\ \text{III. und IV.} \end{matrix}\right.$ Quadranten gleich, im $\left\{\begin{matrix} \text{II. und III.} \\ \text{I. und II.} \end{matrix}\right\}$ Quadranten entgegengesetzt demjenigen von v_z.

b) Seitenausgleichung.

Fügt man die algebraische Summe dieser Verbesserungen v_y und v_x den Koordinaten-Widersprüchen fy und fx bei, so verbleiben noch weitere Koordinaten-Widersprüche fy' und fx', welche als von konstanten Längenfehlern in den Polygonseiten herrührend aufzufassen sind. Es ist also

$$fy' = fy + [v_y]$$
$$fx' = fx + [v_x]$$

Aus fy' und fx' berechnet sich

$$fs' = \sqrt{fy'^2 + fx'^2}$$

NB. Es ist klar, daß der Längenfehler vor und nach Beseitigung der Querverschiebung und des Azimutalwiderspruchs ein verschiedener ist.

Dieses fs' wird zum Verschwinden gebracht durch Verbesserung der Polygonseiten proportional ihrer Länge, oder einfacher durch entsprechende zweitmalige Verbesserung der Koordinatenunterschiede. Diese Verbesserungen, mit v_y' und v_x' bezeichnet, werden erhalten aus:

$$v_y' = \frac{fs'}{AB} \Delta y$$

$$v_x' = \frac{fs'}{AB} \Delta x$$

Hiebei haben die $\left\{ \begin{matrix} v_y' \\ v_x' \end{matrix} \right.$ im $\left\{ \begin{matrix} \text{III. und IV.} \\ \text{II. und III.} \end{matrix} \right.$ Quadranten gleiches, im $\left\{ \begin{matrix} \text{I. und II.} \\ \text{I. und IV.} \end{matrix} \right.$ Quadranten entgegengesetztes Vorzeichen wie fs'.

Fügt man nun zu den Koordinaten-Unterschieden Δy und Δx die Verbesserungen $v_y + v_y'$ und $v_x + v_x'$, so erhält man die endgültig verbesserten Koordinaten-Unterschiede, welche zu den gesuchten Koordinaten der Polygonpunkte führen.

Die zweitmaligen Verbesserungen v_y' und v_x' entsprechen also ausschließlich den Seitenverbesserungen v_s. Weil diese v_s proportional den Seitenlängen und somit umgekehrt proportional den Gewichten p sind, so wird wirklich $[p\, v_s\, v_s]$ zu einem Minimum.

(Fortsetzung folgt.)

Tachymetrische Instrumente.

Von F. Brönnimann, Stadtgeometer in Bern.

Jedes berufliche Interesse ist an die ihm zudienenden Praktiken und maschinellen Einrichtungen geknüpft; je zweckmässiger dieselben sind, desto einfacher gestaltet sich die Arbeitsleistung bei vermehrter Güte des Produktes. Wer irgend ein Gewerbe mit Vorteil betreiben will, wird daher gut tun, sich diejenigen Hülfsmittel zu verschaffen, welche ihn rasch und sicher zum Ziele führen. Mangelhafte Ausrüstung ist eine schlechte Kapitalanlage. Das gilt ganz besonders auch im Vermessungswesen. Jedes Verfahren erfordert seine besondere Instrumentation, und solange diese nicht vollständig ist, ist auch die Verwendbarkeit desselben unvollkommen und wenig lohnend. Jede Verbesserung erhöht den Erfolg. Dies einsehend, tut sich ein reger Eifer kund, sowohl von seiten der Mechaniker als der Berufsgenossen, stetsfort neue Erfindungen in die Welt zu setzen, und man würde eine reichhaltige