

Compensation d'un réseau de nivellement

Autor(en): **Ansermet**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres**

Band (Jahr): **12 (1914)**

Heft 3

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-183081>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tung. Diesmal verwendet man besser Bromsilberpapier (Platinomat, lent), um den Belichtungsprozess zu beschleunigen. Auch hier ist eine Probe von Vorteil. Das belichtete Papier wird wiederum in der Dunkelkammer entwickelt und fixiert wie das Negativ. In der Zeit von ca. 20 Minuten ist alles geschehen, ein originaltreuer Abzug schwarz auf weiss liegt vor einem, dass man Freude daran haben kann.

Das ganze Verfahren ist höchst einfach und wird bald von jedem Lehrling erfasst sein. Notwendig sind nur:

eine elektrische Lampe, am bequemsten eine solche mit weissem, gelbem und rotem Licht auf einem Fusse;

zwei Schalen, zum Entwickeln und Fixieren der Kopien;

ein Kopierrahmen und ein Gefäss zum Waschen der Abzüge.

Ein Negativ und ein Positiv wird auf ca. Fr. 2.50 zu stehen kommen, jedes weitere Positiv dann noch auf ca. Fr. 1.30.

Den Herren Kollegen, die sich bereits mit Photographieren befassen, möchte ich anraten, im Kleinen einen Versuch zu wagen, ich habe die Ueberzeugung, dass sie gar bald vom Format 9×12 oder 13×18 auf dasjenige von 50×70 cm übergehen werden. Probieren geht über Studieren!

A. Fricker.

Compensation d'un réseau de nivellement.

1^o Généralités.

Le calcul d'un réseau de nivellement est une des applications les plus intéressantes de la théorie des erreurs et de la méthode des moindres carrés. De nombreuses recherches ont déjà été faites sur ce sujet¹ et il ne saurait être question, dans ce qui va suivre, d'examiner toutes les faces d'un problème aussi complexe. Nous limiterons, au contraire, à un cas concret tiré du réseau de nivellement général du Canton de Vaud la présente étude qui poursuit un triple but:

¹ **Littérature:** Helmert (Höhere Geodäsie, Ausgleichsrechnung); Jordan (Handbuch der Vermessungskunde); Vogler (Geodätische Übungen); Hilfiker (Nivellement über den Simplonpass und durch den Simplontunnel); Nivellement über den St. Bernhard, unter Mitwirkung von Ing. Gassmann); Lallemand (Nivellements de précision); Hirsch und Plantamour (Compte-rendus de la commission géodésique suisse), etc.

1^o Compléter les articles parus en 1910 (Geometer-Zeitung n^{os} 7, 8) sur le nivellement du Canton de Vaud;

2^o Calculer la grandeur que peuvent atteindre la correction orthométrique et la correction dynamique pour le territoire de ce canton (écart théorique de fermeture);

3^o Mettre en lumière d'une façon aussi objective que possible, dans le cas d'un nivellement, les deux procédés qui, depuis un siècle, se concurrencent dans l'application de la méthode des moindres carrés: la méthode de Gauss et la méthode de Legendre.

Les procédés empiriques (graphiques ou analytiques) ont été, par contre, laissés de côté; parmi ces derniers nous devons une mention spéciale à la compensation par approximations successives (stufenweise Ausgleichung) due au Prof. Vogler. Cette méthode, susceptible de rendre de grands services, a été décrite avec beaucoup de clarté dans les „Geodätische Übungen“.

2^o Erreurs de nivellement.

a) Erreurs accidentelles. On désigne sous ce nom des erreurs qui agissent indifféremment dans un sens ou dans l'autre; considérons un polygone comprenant n nivelées qui sont respectivement entachées d'erreurs accidentelles $e_1 e_2 e_3 \dots e_n$; nous obtiendrons pour tout le polygone une erreur résultante donnée par l'expression :

$$\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2} = e \sqrt{n}$$

en admettant comme cela se fait généralement:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n = e$$

Pratiquement on préfère introduire l'erreur accidentelle par kilomètre α , ce qui donne :

$$e \sqrt{n} = \alpha \sqrt{K}$$

K désignant le nombre de kilomètres;

b) Erreurs systématiques. Leur détermination est particulièrement délicate; les unes sont proportionnelles aux différences de niveau H (forme βH), d'autres à la longueur nivelée K (forme γK). La plupart ne suivent aucune loi déterminée et dépendent des instruments, du profil en long, etc. Nous ne retiendrons donc que l'expression $\pm \beta H \pm \gamma K$;

Il n'est pas inutile de rappeler ici que cette condition est la conséquence d'une part de la loi de propagation des erreurs (courbe de la cloche):

$$y = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-K^2 x^2} \delta x \quad (K^2 = p = \text{poids})$$

D'autre part du *théorème*: la probabilité de la simultanéité de plusieurs événements *indépendants* les uns des autres est égale au produit des probabilités de ces événements.

Les résidus x_1, x_2, \dots sont évidemment proportionnels aux carrés des erreurs totales E_1^2, E_2^2, \dots et les poids p_1, p_2, \dots à affecter à ces résidus seront égaux à

$$\left(\frac{1}{E_1^2}\right)^2 \left(\frac{1}{E_2^2}\right)^2 \dots$$

il faudrait donc connaître déjà les coefficients a, b, c et il n'y a pas d'autre moyen que de les déterminer provisoirement par tâtonnement.

Nous sommes en mesure maintenant d'écrire les *équations normales*:

$$\begin{cases} [p K K] a + [p K H^2] b + [p K K^2] c = [p K f^2] \\ [p K H^2] a + [p H^2 H^2] b + [p H^2 K^2] c = [p H^2 f^2] \\ [p K K^2] a + [p K^2 H^2] b + [p K^2 K^2] c = [p K^2 f^2] \end{cases}$$

Le signe $[]$ représentant \sum_1^n

Réolvons par les déterminants:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [p K f^2] & [p K H^2] & [p K K^2] \\ [p H^2 f^2] & [p H^2 H^2] & [p H^2 K^2] \\ [p K^2 f^2] & [p K^2 H^2] & [p K^2 K^2] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [p K K] & [p K H^2] & [p K K^2] \\ [p K H^2] & [p H^2 H^2] & [p H^2 K^2] \\ [p K K^2] & [p K^2 H^2] & [p K^2 K^2] \end{vmatrix}}$$

on trouve de même b et c .

L'application de ces formules à 18 lignes du réseau du Canton de Vaud a donné:

$$E^2 = 2,5 K + 20 \left(\frac{H}{100}\right)^2 + 0,2 K^2 \quad (\text{pour } H < 300^m)$$

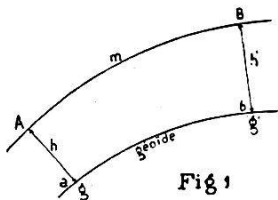
(E en mm, K en kilomètres et H en mètres).

3° Correction orthométrique et correction dynamique.

Le but de ce paragraphe est de rechercher quel ordre de grandeur peuvent atteindre ces corrections pour notre réseau cantonal. Nous avons admis jusqu'ici que les surfaces de niveau étaient des sphères concentriques et que le fil à plomb était toujours dirigé contre le centre de la terre; la différence de niveau entre deux points quelconques était simplement la distance entre les surfaces de niveau passant par ces points.

Dans les nivellements de précision on ne peut plus se contenter de cette hypothèse, car le fil à plomb subit des déviations dues à des causes multiples et les surfaces de niveau qui par définition lui sont perpendiculaires ne sont plus parallèles entr'elles.

Considérons (fig. 1) la surface des mers ab , de niveau o , (appelée aussi géoïde), ainsi que les points A et B situés sur la surface de niveau $A m B$ et sur les verticales des points a et b . L'altitude du point A est par définition $A a = h$, celle de B : $B b = h'$ et ces altitudes diffèrent



d'une certaine quantité $h - h'$ appelée *correction orthométrique*. Ce qui est constant, c'est le travail de la pesanteur pour élever l'unité de masse d'un point quelconque du géoïde à un autre point de la surface $A m B$:

Travail pesanteur = $g h = g' h'$ (g et g' désignent la gravité en a et b).

On dit que les points A et B ont même *cote dynamique* et un nivellement aussi précis qu'on le voudra effectué suivant $A m B$ ne révélera pas la différence $h - h'$. Pour calculer cette différence, il faut préalablement étudier la variation de la gravité g , ce qui se fait au moyen du pendule, ou à défaut d'observations pendulaires à l'aide de la formule de Clairaut-Helmert:

$$\text{Correction orthom. de } A \text{ à } B = - 0,0053 \int_A^B h. \sin 2 \lambda d \lambda$$

(h = altitude. λ = latitude).

En réalité g n'a pas la même valeur en A et a sauf si h est très petit et la correction orthométrique dépend essentiellement du chemin parcouru entre les points nivelés.

La *correction dynamique* exige plus spécialement une détermination précise de la gravité en chaque point du polygone;

on admet pour *unité* de travail de la pesanteur celui qui correspond au niveau de la mer à la latitude de 45^0 ; à une altitude h et pour une latitude λ le travail élémentaire de la pesanteur s'exprime pour une masse $\frac{1}{g^0}$ par:

$$d T = \frac{g_\lambda^h}{g^0} d h$$

Il faut maintenant intégrer cette expression sur tout le pourtour de la ligne nivelée; si le polygone se ferme, on démontre que *l'écart orthométrique de fermeture* est égal à *l'écart dynamique de fermeture*. Cette propriété est fondamentale.

Ces formules ont été appliquées au polygone Allaman - L'Isle - Molendruz - Les Clées - Cossonay - Allaman (fig. 2). La latitude varie entre $46^0 28'$ et $46^0 44'$, ce qui permet de négliger le terme $\sin 2 \lambda$. L'intégration en est bien simplifiée, car il suffit de projeter le profil en long du cheminement (longueur totale 85 kilomètres) sur le méridien et de planimétrer successivement à partir de l'ordonnée d'Allaman, ce qui donne: Gimel — 2,1 mm; Bière — 3,5 mm, Mollens — 6,0 mm, etc. On construira la courbe des *corrections orthométriques* qui n'est pas autre chose que la première courbe intégrale¹ de la projection méridienne.

L'écart de fermeture n'atteint que — 5,2 millimètres. Par contre, la correction atteint aux Clées son maximum, soit — 16,7 mm en passant par Molendruz et — 11,5 mm par Cossonay.

Ces valeurs se rapportent, bien entendu, au repère d'Allaman dont l'altitude doit préalablement être corrigée par rapport à la Pierre de Niton de — 8,7 mm (par Nyon).

Nous avons en résumé:

Genève P. N., altitude admise définitivement	373.600
Les Clées (par Molendruz), correction absolue	— 25,4 mm
Les Clées (par Cossonay) " "	— 20,2 mm

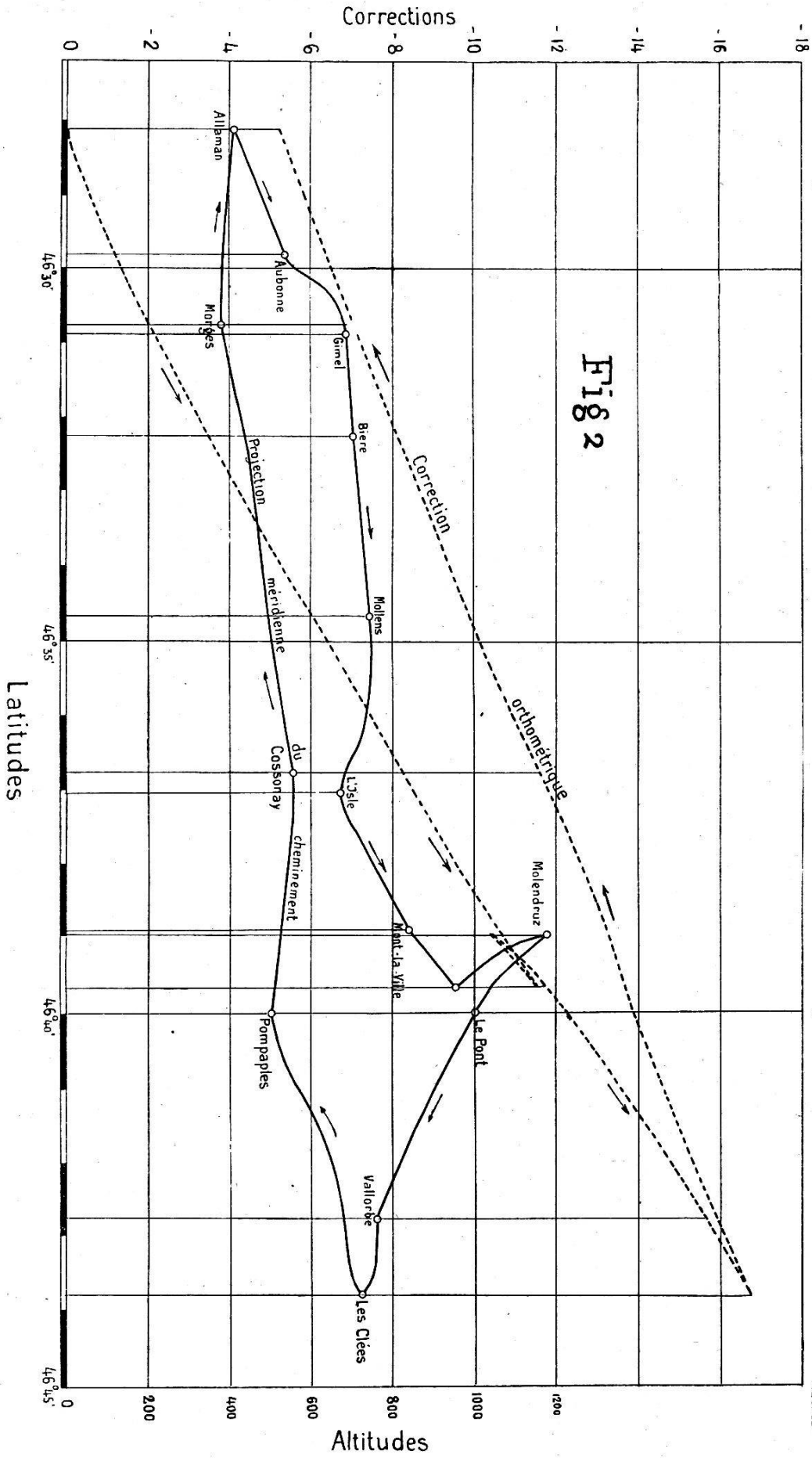
et ainsi de suite pour les autres repères.

¹ Voir Ansermet: Sur quelques appareils d'intégration (Bulletin technique de la Suisse Romande, 1914).

Millimètres

Calcul de la correction orthométrique.

Mètres

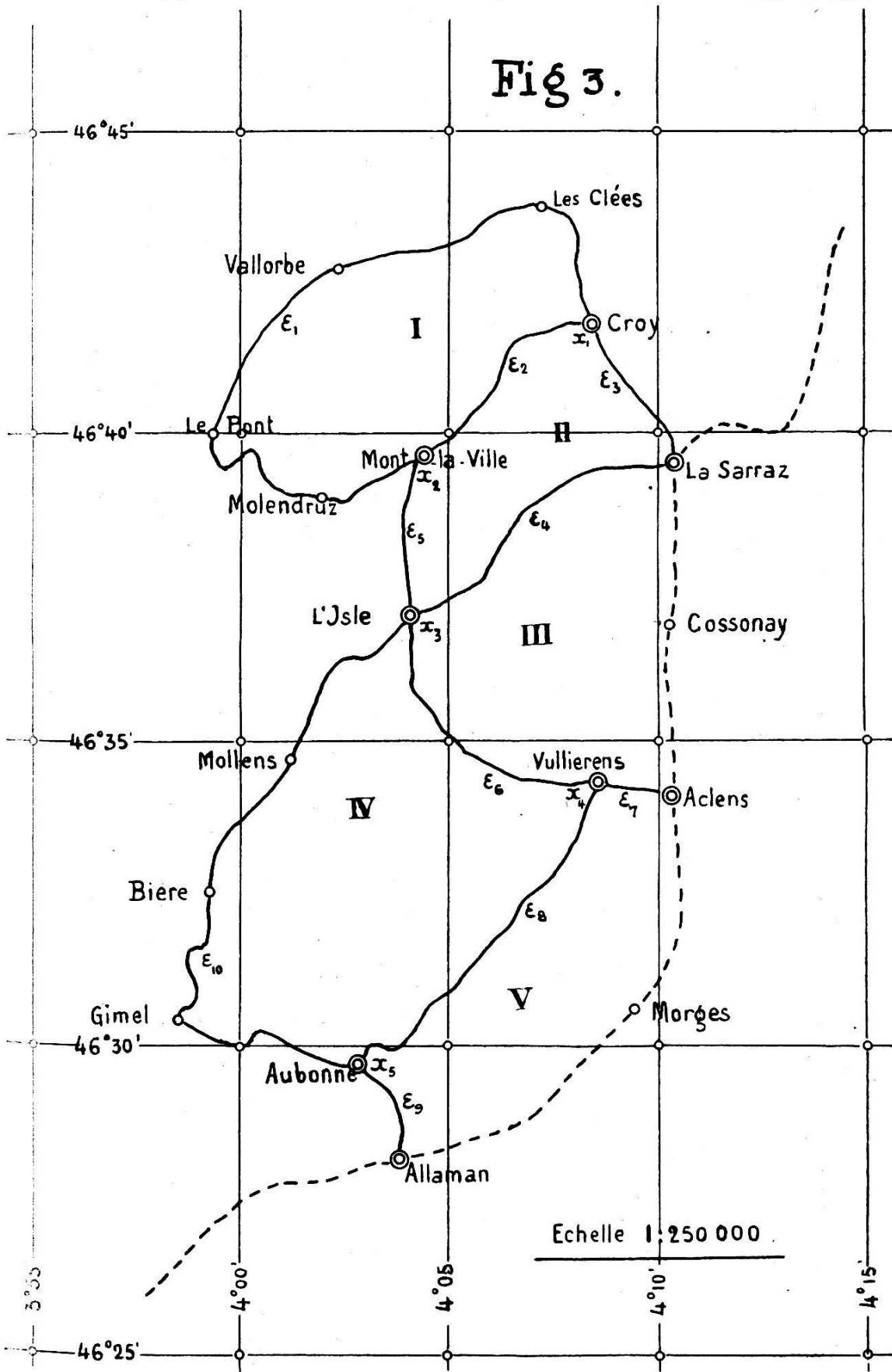


Latitudes

Altitudes

4° Compensation du réseau.

Une application stricte de la méthode des moindres carrés



exigerait qu'on compense les quantités directement observées, c'est-à-dire chaque nivelée. Pratiquement un pareil mode de compensation se passe de commentaires et nous chercherons la valeur la plus probable des erreurs commises sur chaque ligne. Les équations de condition sont déjà sous forme linéaire, ce qui simplifie notablement les calculs.

Le réseau qui fait l'objet de cette étude (fig. 3) comprend 5 polygones (longueur totale 130 km).

Les altitudes des repères d'Allaman, Aclens et La Sarraz sont définitives, ces repères faisant partie de lignes déjà compensées et publiées.

Le tableau ci-dessous donne tous les éléments nécessaires à l'établissement des équations; il est assez clair pour rendre toute explication superflue. Un fait est cependant à signaler: les divergences assez fortes entre les diverses déterminations du repère de l'Isle, nœud central de tout le réseau. Le polygone II, entr'autres, présente un écart de fermeture passablement plus élevé que les autres polygones du réseau cantonal, sans qu'un examen attentif des deux opérations ait révélé une erreur matérielle. C'est ce qui nous a engagé à compenser rigoureusement cette région, alors que la plus grande partie du canton a été traitée par les méthodes approchées. Les corrections orthométriques pour les 5 polygones pris séparément sont très faibles (2 — 3 mm); elles sont assimilées aux erreurs systématiques et comprises implicitement dans les erreurs totales probables E.

Il y a en tout 10 lignes à compenser et 5 altitudes à déterminer (nœuds). Nous désignons par Mont-la-Ville le repère situé entre Lapraz et Mont-la-Ville.

Nœuds du réseau	Altitudes définitives	Altitudes approchées	Corrections
La Sarraz	499.262	—	—
Aclens	463.524	—	—
Allaman	410.943	—	—
Croy	—	642.485	x_1
Mont-la-Ville . .	—	932.495	x_2
L'Isle	—	663.955	x_3
Vullierens	—	502.365	x_4
Aubonne.	—	501.063	x_5

Des altitudes approchées nous déduisons les différences de niveau approchées, les polygones étant parcourus dans le sens des aiguilles de la montre.

Lignes nivelées	Distances	Différences de niveau observées (à compenser)	Corrections	E ²	Différences de niveau approchées
Polygone I					
Croy-Mont-la-Ville.	^K 7,5	^m +290,0164	ϵ_2	198	+290,010
Mont-la-Ville-Croy.	25,0	—290,0062	ϵ_1	356	—290,010
	32,5	+ 10,2 mm		554	—
Polygone II					
La Sarraz-L'Isle .	10,2	+164,6744	ϵ_4	98	+164,693
L'Isle-Mont-la-Ville	5,0	+268,5278	ϵ_5	162	+268,540
Mont-la-Ville-Croy.	7,5	—290,0164	ϵ_2	198	—290,010
Croy-La Sarraz. .	5,1	—143,2254	ϵ_3	58	—143,223
	27,8	— 39,6 mm		516	—
Polygone III					
La Sarraz-Aclens .	—	— 35,7380	—	—	— 35,738
Aclens-Vullierens .	2,1	+ 38,8390	ϵ_7	9	+ 38,841
Vullierens-L'Isle .	10,0	+161,5694	ϵ_6	97	+161,590
L'Isle-La Sarraz .	10,2	—164,6744	ϵ_4	98	—164,693
	22,3	— 4,0 mm		204	—
Polygone IV					
L'Isle-Vullierens .	10,0	—161,5694	ϵ_6	97	— 161,590
Vullierens-Aubonne	11,3	— 1,3187	ϵ_8	53	— 1,302
Aubonne-L'Isle. .	22,5	+162,8703	ϵ_{10}	208	+162,892
	43,8	— 17,8 mm		358	—
Polygone V					
Vullierens-Aclens .	2,1	— 38,8390	ϵ_7	9	— 38,841
Aclens-Allaman .	—	— 52,5810	—	—	— 52,581
Allaman-Aubonne.	3,0	+ 90,1185	ϵ_9	26	+ 90,120
Aubonne-Vullierens	11,3	+ 1,3187	ϵ_8	53	+ 1,302
	16,4	+ 17,2 mm		88	—

Nous considérerons dans la suite les différences de niveau comme des quantités essentiellement positives auxquelles il faut, ajouter les corrections $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$

Ainsi la différence de niveau compensée La Sarraz-L'Isle aura pour expression: $164,6744 + \varepsilon_4$ et le polygone I par exemple fournit l'équation de condition: $290,0164 + \varepsilon_2 = 290,0062 + \varepsilon_1$ soit: $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 10,2 = 0$ et ainsi de suite.

A. Méthode de Gauss.

Gauss fait emploi de coefficients indéterminés ou arbitraires appelés aussi *facteurs de Lagrange* $K_1 K_2 \dots$

Ecrivons d'abord les équations de condition qui sont au nombre de 5 (5 polygones):

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 10,2 = 0 \\ \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - 39,6 = 0 \\ \varepsilon_7 + \varepsilon_6 - \varepsilon_4 - 4,0 = 0 \\ -\varepsilon_6 - \varepsilon_8 + \varepsilon_{10} - 17,8 = 0 \\ -\varepsilon_7 + \varepsilon_9 + \varepsilon_8 + 17,2 = 0 \end{array} \right.$$

Les poids des ε sont donnés par $\frac{1}{E^2}$; il faut:

$$\frac{\varepsilon_1^2}{356} + \frac{\varepsilon_2^2}{198} + \frac{\varepsilon_3^2}{58} + \dots + \frac{\varepsilon_{10}^2}{208} = \text{minimum}$$

Formons la différentielle première en tenant compte des équations de condition multipliées préalablement par $2 K_1$ $2 K_2 \dots 2 K_5$:

$$\left(\frac{2 \varepsilon_1}{356} + 2 K_1\right) d \varepsilon_1 + \left(\frac{2 \varepsilon_2}{198} - 2 K_1 + 2 K_2\right) d \varepsilon_2 + \dots + \left(\frac{2 \varepsilon_{10}}{208} - 2 K_4\right) d \varepsilon_{10} = 0$$

les coefficients de $d \varepsilon_1$ $d \varepsilon_2 \dots$ sont nuls séparément, ce qui donne 10 équations corrélatives:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 356 (-K_1) \\ \varepsilon_2 &= 198 (K_1 - K_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

ou plus simplement sous forme de tableau:

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	ε_{10}	
K_1	-356	+198									+10,2
K_2		-198	-58	+98	+162						-39,6
K_3				-98		+97	+9				-4,0
K_4						-97		-53		+208	-17,8
K_5							-9	+53	+26		+17,2

Portons les ε dans les équations de condition, nous obtenons les: Equations normales

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	+554	-198				+10,2
2	+198	+516	-98			-39,6
3		-98	+204	-97	-9	-4,0
4			-97	+358	-53	-17,8
5			-9	-53	+88	+17,2

et enfin, en éliminant par substitution les

Equations finales

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
1	+1	-0,357				+0,0184 $K_1 = +0,0170$
2		+1	-0,220			-0,0808 $K_2 = +0,0991$
3			+1	-0,531	-0,0493	-0,0648 $K_3 = +0,0830$
4				+1	-0,1885	-0,0785 $K_4 = +0,0489$
5					+1	+0,1573 $K_5 = -0,1573$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 356 \quad (-K_1) = -6,05 \text{ mm} \\ \varepsilon_2 &= 198 \quad (K_1 - K_2) = -16,25 \\ \dots \end{aligned} \right\} \text{voir tableau récapitulatif.}$$

B. Méthode mixte (Lallemand).

Lallemand ne fait emploi ni de coefficients indéterminés, comme Gauss, ni de résultats approchés, comme Legendre; il considère les 5 équations de condition déjà posées, qui doivent être satisfaites dans *tous les cas*, et qu'il appelle *équations absolues* et le groupe d'équations dites *relatives* qu'il faut satisfaire *autant que possible*:

$$10 \text{ équations relatives } \left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{E_1} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{E_2} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \frac{\varepsilon_{10}}{E_{10}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Lallemand applique au système de 15 équations ainsi obtenues le principe des moindres carrés et le procédé d'élimination de Legendre (voir plus loin).

Cette méthode revient simplement à éliminer préalablement cinq des ε et à introduire les poids

$$\frac{1}{E_1^2} \quad \frac{1}{E_2^2} \quad \dots$$

dans l'équation du minimum :

$$5 \text{ équat. absolues } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 10,2 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_2 - 39,6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - 4,0 \\ \varepsilon_9 = \varepsilon_7 - \varepsilon_8 - 17,2 \\ \varepsilon_{10} = \varepsilon_6 + \varepsilon_8 + 17,8 \end{cases}$$

$$\frac{(\varepsilon_2 + 10,2)^2}{356} + \frac{(\varepsilon_2)^2}{198} + \frac{(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6)^2}{58} + \dots = \text{minimum}$$

Equations normales

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon_2 + 10,2}{356} + \frac{\varepsilon_2}{198} - \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6}{58} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6}{58} + \frac{\varepsilon_5}{162} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6}{58} + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - 4,0}{98} + \frac{\varepsilon_6}{97} + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_8 + 17,8}{208} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43,6}{58} + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - 4,0}{98} + \frac{\varepsilon_7}{9} + \frac{\varepsilon_7 - \varepsilon_8 - 17,2}{26} &= 0 \\ \frac{\varepsilon_8}{53} - \frac{\varepsilon_7 - \varepsilon_8 - 17,2}{26} + \frac{\varepsilon_6 + \varepsilon_8 + 17,8}{208} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Equations finales

	ε_2	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8		
1	+ 1	+0,784				+3,640	$\varepsilon_2 = - 16,24$
2		+ 1	+0,470	+0,470		-18,67	$\varepsilon_5 = + 16,06$
3			+ 1	-9,89	+2,86	+49,4	$\varepsilon_6 = + 3,38$
4				+ 1	-0,259	- 5,01	$\varepsilon_7 = + 2,18$
5					+ 1	+10,93	$\varepsilon_8 = - 10,93$

Le calcul a été simplifié en opérant des réductions entre les équations normales. $\varepsilon_1 = - 6,04$
 $\varepsilon_3 = -$

C. Méthode de Legendre.

Cette méthode est caractérisée :

- a) par l'introduction de valeurs approchées des inconnues ;
- b) par l'emploi de variables auxiliaires. Il semble qu'on complique le problème ; en réalité ce n'est qu'une apparence.

Considérons la ligne Croy-Mont-la-Ville :

$$\begin{array}{l} \text{Croy} \left\{ \begin{array}{l} \text{Altitude approchée} = 642,485 \\ \text{„ compensée} = 642,485 + x_1 \end{array} \right. \\ \text{Mont-la-Ville} \left\{ \begin{array}{l} \text{Altitude approchée} = 932,495 \\ \text{„ compensée} = 932,495 + x_2 \end{array} \right. \\ \text{Mont-la-Ville-Croy} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diff. de niveau observée} = 290,0164 \\ \text{„ „ approchée} = 290,010 \\ \text{„ „ compensée} = 290,010 + x_2 - x_1 \\ \phantom{\text{„ „ compensée}} = 290,0164 + \varepsilon_2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\varepsilon_2 = 290,010 - 290,0164 + x_2 - x_1 = x_2 - x_1 - 6,4$$

Nous avons donc décomposé l'erreur d'observation ε en deux parties à l'aide des valeurs approchées ; nous obtenons ainsi le système d'équations aux erreurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_1 = x_2 - x_1 + 3,8 & \varepsilon_6 = x_3 - x_4 + 20,6 \\ \varepsilon_2 = x_2 - x_1 - 6,4 & \varepsilon_7 = x_4 + 2,0 \\ \varepsilon_3 = x_1 - 2,4 & \varepsilon_8 = x_4 - x_5 - 16,7 \\ \varepsilon_4 = x_3 + 18,6 & \varepsilon_9 = x_5 + 1,5 \\ \varepsilon_5 = x_2 - x_3 + 12,2 & \varepsilon_{10} = x_3 - x_5 + 21,7 \end{array} \right.$$

Il ne reste que 5 inconnues $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ au lieu de 10 et par ce changement de variables nous avons exprimé implicitement que l'écart de fermeture des 5 polygones devait être nul ; il n'y a plus à s'occuper des équations de condition

$$\frac{(x_2 - x_1 + 3,8)^2}{356} + \frac{(x_2 - x_1 - 6,4)^2}{198} + \dots + \frac{(x_3 - x_5 + 21,7)^2}{208} = \text{minimum}$$

Equations normales

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{x_2 - x_1 + 3,8}{356} - \frac{x_2 - x_1 - 6,4}{198} + \frac{x_1 - 2,4}{58} &= 0 \\ \frac{x_2 - x_1 + 3,8}{356} + \frac{x_2 - x_1 - 6,4}{198} + \frac{x_2 - x_3 + 12,2}{162} &= 0 \\ -\frac{x_2 - x_3 + 12,2}{162} + \frac{x_3 - x_4 + 20,6}{97} + \frac{x_1 + 18,6}{98} + \frac{x_1 - x_5 + 21,7}{208} &= 0 \\ -\frac{x_3 - x_4 + 20,6}{97} + \frac{x_4 + 2,0}{9} + \frac{x_4 - x_5 + 16,7}{53} &= 0 \\ -\frac{x_4 - x_5 - 16,7}{53} + \frac{x_5 + 1,5}{26} - \frac{x_3 - x_5 + 21,7}{208} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Equations finales

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	+ 1	-0,534				-0,784	$x_1 = - 3,34$
2		+ 1	-0,534			+ 4,12	$x_2 = - 13,20$
3			+ 1	-0,3655	-0,1706	+ 16,15	$x_3 = - 17,03$
4				+ 1	-0,1505	-1,025	$x_4 = + 0,18$
5					+0,0582	+0,3246	$x_5 = - 5,58$

on en déduit: $\varepsilon_1 = - 6,06$ $\varepsilon_2 = - 16,26$

Récapitulation:

Méthodes de :	Legendre	Lallemand	Gauss	Moyennes	Différences de niveau compensées
ε_1	- 6,06	6,04	6,05	- 6,05	290,0002
ε_2	- 16,26	16,24	16,25	- 16,25	290,0002
ε_3	- 5,74	5,74	5,75	- 5,74	143,2196
ε_4	+ 1,57	1,56	1,58	+ 1,57	164,6760
ε_5	+ 16,03	16,06	16,02	+ 16,04	268,5438
ε_6	+ 3,39	3,38	3,31	+ 3,36	161,5728
ε_7	+ 2,18	2,18	2,16	+ 2,17	38,8412
ε_8	- 10,94	10,93	10,92	- 10,93	1,3078
ε_9	- 4,08	4,09	4,08	- 4,08	90,1144
ε_{10}	+ 10,25	10,25	10,18	+ 10,23	162,8806

Les légères divergences dans les résultats sont dues à l'emploi de la règle logarithmique pour ces calculs.

Altitudes définitives

Croy	642,4816
Mont-la-Ville . .	932,4818
L'Isle	663,9380
Vullierens . . .	502,3652
Aubonne	501,0574

5^o Conclusion.

On voit qu'avec les 3 méthodes il y a 5 équations normales à résoudre et c'est en somme l'opération laborieuse du problème. Dans la méthode de Gauss les équations présentent une symétrie qui facilite le travail; par contre, l'emploi des facteurs de Lagrange, qui ne sont susceptibles d'aucune interprétation, alourdit les calculs; à ce point de vue le procédé de Lallemand est certainement préférable. La méthode de Gauss paraît malgré cela jouir d'une certaine faveur (nivellements de la commission géodésique suisse, nivellement de précision de la ville de Zurich, etc.).

La méthode de Legendre présente un avantage caractéristique sur les deux autres: on n'a pas à craindre avec elle d'oublier des équations de condition ou d'en compter à double et c'est précieux lorsque le réseau est compliqué; il suffit de considérer toutes les lignes à compenser et d'exprimer tous les ε en fonction des x . C'est déjà ce même avantage qui a assuré à la méthode de Legendre une place si éminente dans les calculs de triangulation, bien que la détermination des valeurs approchées des divers éléments d'un réseau trigonométrique soit souvent pénible.

Il faut donc éviter d'adopter ou de condamner *a priori* une méthode ou l'autre, mais dans chaque cas examiner préalablement celle qui est la plus appropriée.

ANSERMET.
