

# De la simplification des calculs trigonométriques

Autor(en): **Ansermet**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres**

Band (Jahr): **14 (1916)**

Heft 8

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-184098>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

la zone d'instruction,  
 l'échelle,  
 la topographie,  
 le morcellement,  
 la densité de construction,  
 la visibilité et les facilités d'accès.

Dans l'examen d'une taxation nous pouvons retirer un gros avantage en décomposant sous forme de tabelles les différents cas qui peuvent se présenter.

Si nous dressons, par exemple, une tablelle pour l'instruction II, échelle 1 : 1000, terrain découvert, non construit, nous pourrons établir les prix de revient pour les suppositions spéciales suivantes :

	a Parcelles 0,75 par ha	b Parcelles 1,5 par ha	c Parcelles 3,0 par ha	d Parcelles 6,0 par ha	e Parcelles 10 par ha
mas 1 terrain plat, maximum 2 % d'inclinaison					
mas 2 inclinaison d'env. 4 %					
mas 3 inclinaison d'env. 10 %					
mas 4 inclinaison d'env. 25 %					

La représentation graphique de ce tableau nous fournira une image très claire de la variation du prix de revient et nous permettra d'interpoler facilement les valeurs du coût dans les suppositions intermédiaires. Les tableaux correspondants pour l'échelle du 1 : 500 doivent comprendre, outre la décomposition suivant la topographie et le morcellement, la distinction suivant le mode et la densité des constructions. (A suivre.)

### **De la simplification des calculs trigonométriques.**

Le but du présent article est de signaler aux lecteurs du journal divers moyens propres à faciliter les calculs de triangulation, toujours laborieux par la méthode des moindres carrés. Il s'agit principalement de l'application des procédés graphiques

à la résolution des équations normales et à la formation des équations aux erreurs, opérations qui reviennent fréquemment. Nous supposons bien entendu dans ce qui va suivre, la compensation par les coordonnées, soit la méthode de Legendre qui est caractérisée par un *changement de variables*.

La méthode de Gauss, soit la compensation directe des quantités *observées* (par les équations de condition) donne plus de satisfaction au mathématicien, mais s'adapte moins bien pour les triangulations d'ordre inférieur et a été relativement peu appliquée en Suisse. (Triangulation du tunnel du St-Gothard; réseau primaire de la ville de Coire, etc.)

#### *Formation des équations aux erreurs.*

Nous emploierons les notations usuelles :

$$v = a y + b x + f$$

$$a = + \frac{\Delta \log \Delta y}{\Delta \log \operatorname{tg} z}$$

$$b = - \frac{\Delta \log \Delta x}{\Delta \log \operatorname{tg} z}$$

Il existe encore d'autres formules pour le calcul de  $a$  et  $b$ ; elles ont toutes ceci de commun qu'elles se présentent sous la forme d'un quotient de *deux* variables. Les tables donnant les valeurs de  $a$  et  $b$  seront donc à *double* entrée, ce qui est peu pratique, sauf dans les cas où une des variables se meut entre des limites relativement restreintes. La méthode de détermination graphique est ici tout indiquée; le procédé classique consiste dans le tracé d'une famille d'hyperboles équilatères. (Plaque hyperbolique de Kloth.)

Le moyen par excellence réside dans l'application de la *nomographie* ou *théorie des abaques* et c'est sur ce principe qu'est construit l'abaque à alignement de la figure 1 (voir annexe), dont l'emploi ne présente aucune difficulté; on fera usage de préférence d'un fil très fin que l'on tendra à travers les trois échelles pour réaliser l'alignement; l'abaque original, dont nous faisons un emploi journalier, est près de trois fois plus grand; il a dû être réduit photographiquement pour rentrer dans le cadre du journal. Les lectures se feront respectivement au trait du milieu dans les trois échelles\*.

\* Si un nombre suffisant de commandes lui parviennent, l'auteur fera un tirage à l'échelle de l'abaque original et les vendra au prix de revient.

*Résolution des équations normales.*

Nous appliquerons la méthode générale exposée par M. le professeur Dumas dans le Bulletin technique de la Suisse romande, année 1907\*.

Proposons-nous tout d'abord de résoudre le système à 2 inconnues :

$$(1) \begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

l'une quelconque de ces équations, la première, par exemple, peut se remplacer par le système :

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{x} X = a = uX & \left( u = \frac{1}{x} \right) \\ y = X + b \end{cases}$$

$u$  et  $X$  étant des inconnues auxiliaires; la relation  $uX = a$  caractérise une hyperbole équilatère (fig. 2, voir pag. 236) telle que :

$$OR \cdot OP = a.$$

$OR$  et  $OP$  étant les coordonnées  $u$  et  $X$  d'un point  $M$  quelconque de la courbe; au droit du point  $R$  nous inscrivons la cote  $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{OR}$ .

A l'équation  $y = X + b$  correspond (fig. 3, voir pag. 236) la droite  $b$ , lieu du point  $N$  tel que  $OP = X$  et  $OQ = y$ ; le point  $Q$  sera coté  $y$ .

Si maintenant nous superposons les figures 2 et 3 (voir pag. 236), comme on l'a fait dans la figure 4 (voir pag. 236) en ayant soin de placer l'un sur l'autre n'importe comment les axes  $Oy$  et  $Ou$ , nous voyons qu'à tout système de valeurs  $x, y$  vérifiant l'équation  $y = ax + b$  correspond figure 4 un contour rectangulaire  $yNMx$  dont les sommets se trouvent respectivement sur la droite  $b$  et l'hyperbole  $a$ . A l'équation  $y = a'x + b'$  correspondra un contour analogue  $yN'M'x$ .

Résoudre les équations (1) équivaut donc à déterminer les deux contours  $yNMx$  et  $yN'M'x$  de façon que les points  $N$  et  $N'$  d'une part,  $M$  et  $M'$  d'autre part soient situés sur la même horizontale.

\* Résolution par voie nomographique des équations linéaires simultanées par M. le Dr. G. Dumas, professeur à l'Université de Lausanne, professeur honoraire de l'Ecole polytechnique de Zurich.

Cette opération, comme nous le verrons, se fait rapidement au moyen d'une bande de papier. En faisant varier les coefficients  $a$  et  $b$  nous obtenons une famille de droites parallèles et une

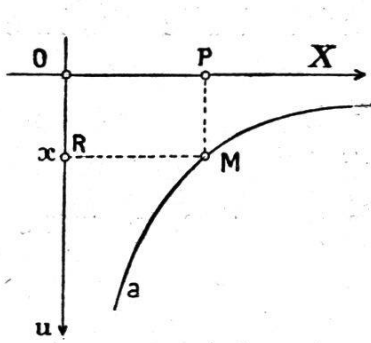


Fig. 2

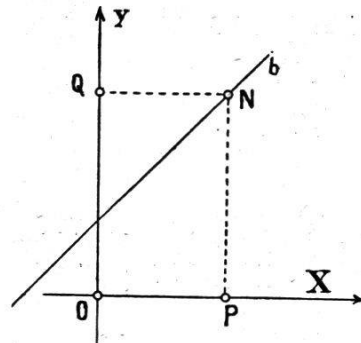


Fig. 3

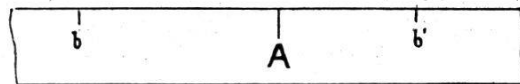


Fig. 6

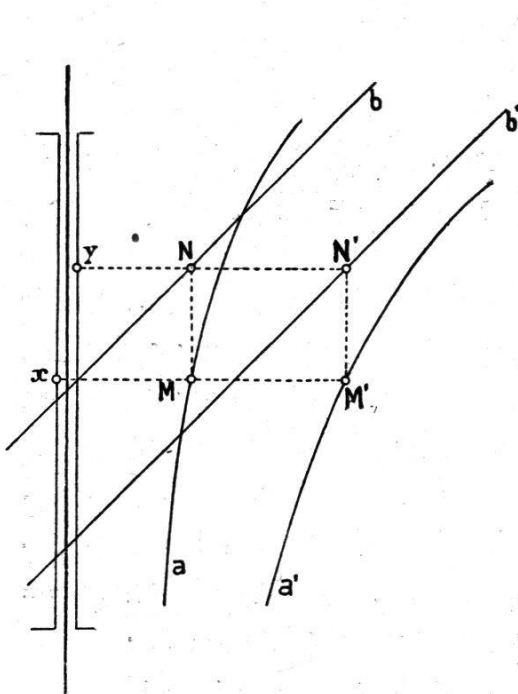


Fig. 4

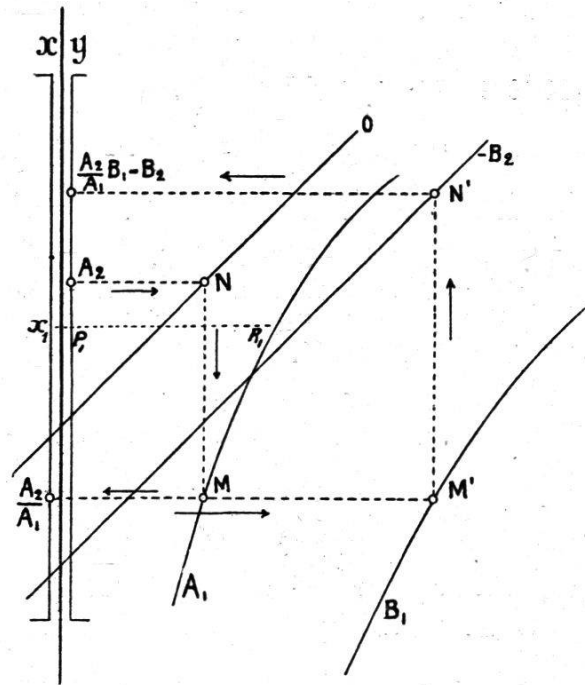


Fig. 7

famille d'hyperboles ayant mêmes asymptotes; c'est ce qui est réalisé par l'abaque (figure 5, voir annexe). Pour la construction de ce nomogramme les paramètres  $a$  et  $b$  ont été multipliés respectivement par des constantes appropriées.

# Abaque à alignement

pour le calcul des coefficients de l'équation  $v'' = ay + bx + f''$  ( $y$  &  $x$  en décimètres)

exemple :  $z = \pm 13^{\circ}47' \pm n.90^{\circ}$  ;  $\Delta Y$  ( $\Delta X$  resp.) =  $\pm 424^m$       $a$  (resp.  $b$ ) =  $\pm 11,2$  (en secondes)

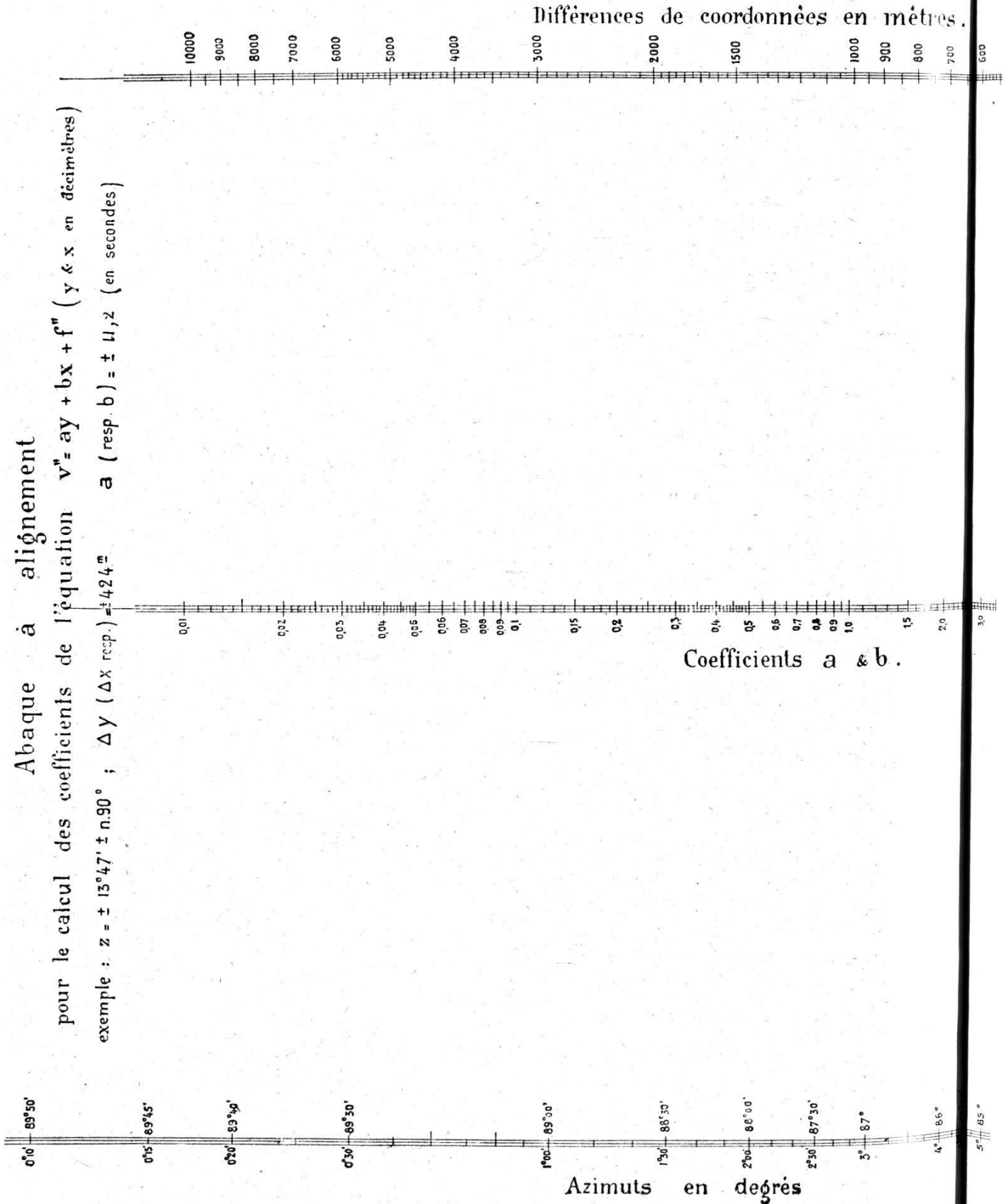
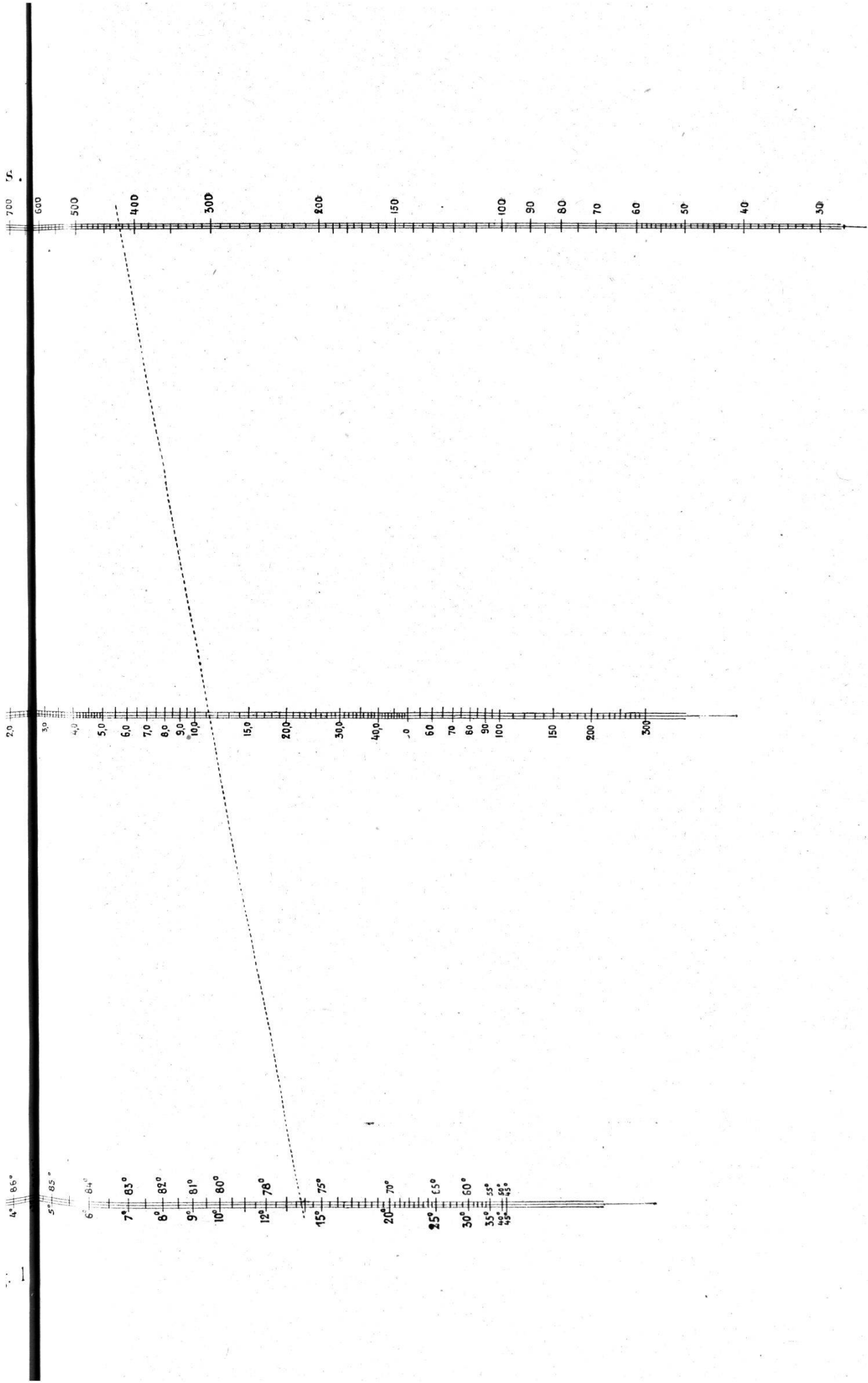


Fig. 1





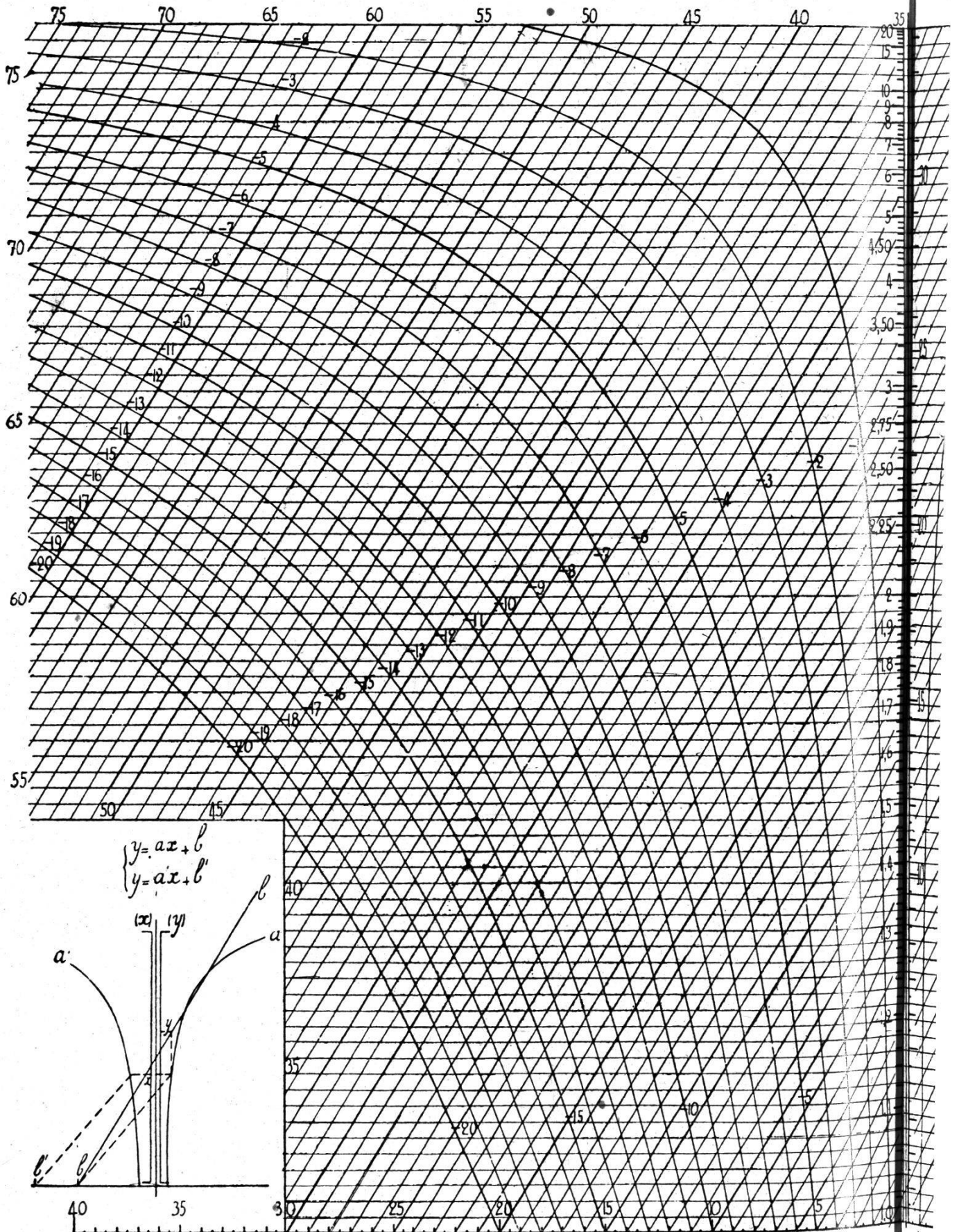
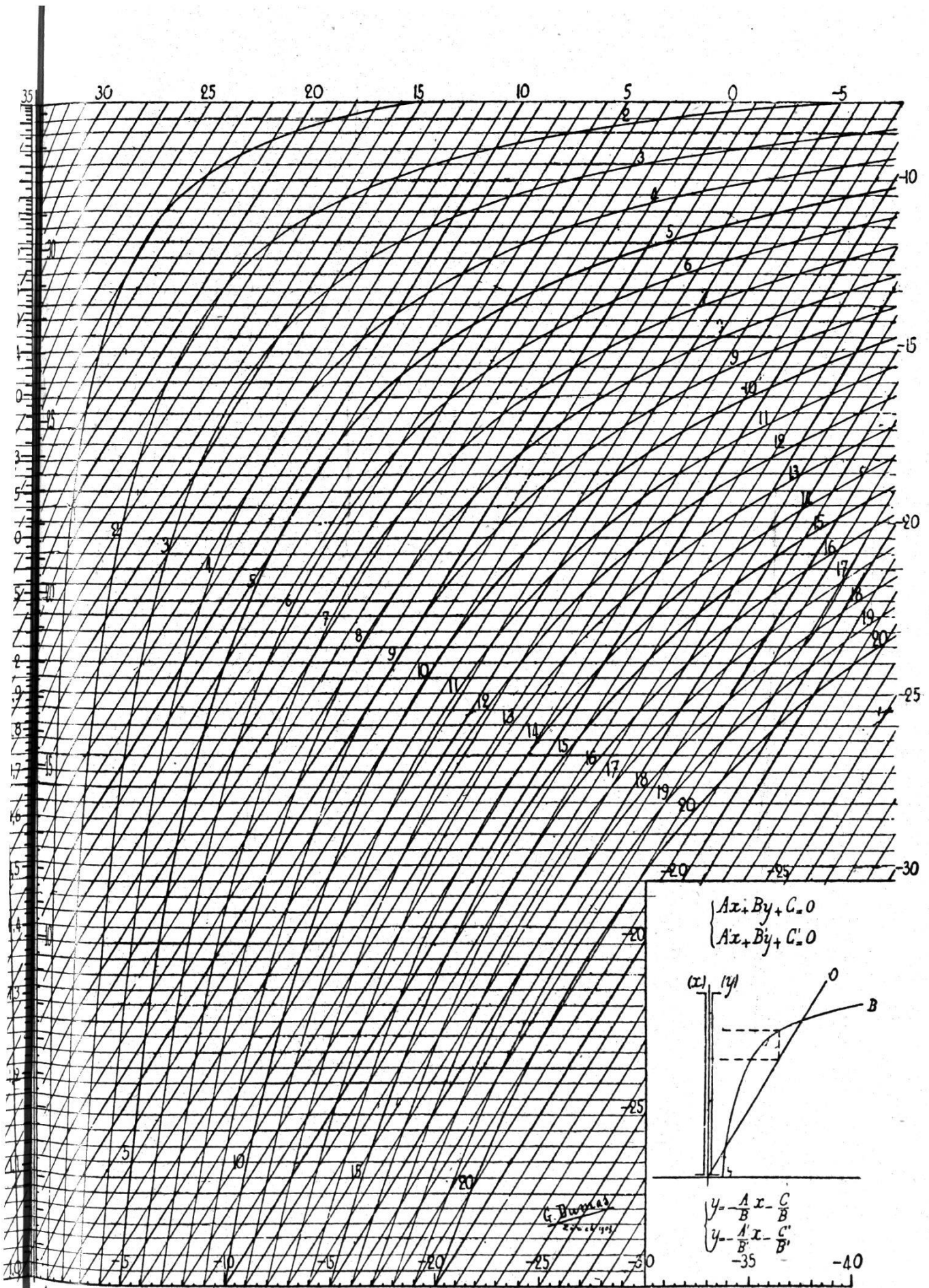


Fig. 5. Abaque pour la résolution des é





on des équations linéaires simultanées.

Nous sommes maintenant en mesure, en appliquant les propriétés ci-dessus énoncées, de résoudre le système :

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

Nous supposerons tout d'abord les coefficients  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  compris dans les limites adaptées pour la construction de l'abaque. On prend une bande de papier (figure 6, voir pag. 236) dont le bord soit bien rectiligne. On la place le long de l'échelle du bas de l'abaque et marque deux traits en face des divisions  $b$  et  $b'$  en désignant ces traits eux-mêmes par  $b$  et  $b'$ . Cela fait, on prend la bandelette et la maintenant, grâce au réseau de droites auxiliaires toujours horizontale, on place l'extrémité du trait  $b$  sur l'hyperbole  $a$ , l'extrémité du trait  $b'$  sur l'hyperbole  $a'$ . La valeur de  $x$  s'obtient en lisant à l'échelle des  $x$  sur le bord de la bandelette de papier. Pour trouver  $y$ , on marque sur ce bord un trait  $A$  en face de l'axe de l'abaque, puis on déplace la bandelette horizontalement,  $A$  restant sur l'axe. La valeur de  $y$  se lit sur l'échelle des  $y$  à son intersection avec la bandelette lorsque les traits  $b$  et  $b'$  se trouvent respectivement sur les droites  $b$  et  $b'$ .

Exemple :  $\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = -x + 30 \end{cases} \quad y = 25 \quad x = 5.$

*Cas particuliers :* Considérons l'équation  $y = ax + b$  et supposons le coefficient  $b$  nul, ce qui donne la relation  $y = ax$ ; les sommets  $N$  et  $M$  du contour rectangulaire seront situés respectivement (figure 7, voir pag. 236) sur la droite  $O$  et l'hyperbole  $a$  ou  $A_1$ , si l'on assigne à  $a$  la valeur particulière  $A_1$ . Nous avons un moyen graphique de déterminer instantanément le

quotient  $\frac{A_2}{A_1}$  de deux quantités et réciproquement en considérant  $y$  comme inconnue. Nous calculerons le produit  $ax$  de deux facteurs arbitraires, soit  $x = \frac{A_2}{A_1}$   $a = B_1$ ; la figure 7 montre

la marche à suivre pour déterminer le produit  $y = ax = \frac{A_2}{A_1} B_1$

ou plus généralement l'expression  $\frac{A_1}{A_2} B_1 - B_2$ .

Remarquons enfin que l'abscisse d'un point quelconque  $R_1$

de l'hyperbole  $A_1$  a pour valeur  $A_1 x_1$ ; marquons sur une bande de papier le segment représentatif  $P_1 R_1$  du produit  $A_1 x_1$ ; nous pouvons répéter l'opération à volonté pour d'autres segments  $P_2 R_2 = A_2 x_2$ ;  $P_3 R_3 = A_3 x_3$ , etc. . . . En totalisant ces segments à l'aide de la bandelette et par une lecture à l'échelle qui est au bas de l'abaque, on obtient la valeur de l'expression:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots = [A x].$$

*Applications.*

1<sup>o</sup> *Formations des facteurs des équations normales.* Ces facteurs sont de la forme  $[a a]$ ,  $[a b]$ ,  $[b f]$ ,  $[b b]$ , etc. . . . , leur détermination est une application directe de la propriété énoncée ci-dessus qui permet le calcul d'expressions telles que  $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$ .

2<sup>o</sup> *Résolution des équations normales.* S'il y a plus de deux équations normales, il faut d'abord procéder à une élimination pour réduire à deux le nombre des inconnues. La méthode usuelle est celle de Gauss par substitution; les nouveaux coefficients seront de la forme:

$$[b b] - \frac{[a b]}{[a a]} = [b b \cdot 1]$$

$$[b c] - \frac{[a b]}{[a a]} [a c] = [a c \cdot 1], \text{ etc.}$$

Nous retombons sur des expressions telles que  $\frac{A_2}{A_1} B_1 - B_2$  dont le calcul est indiqué schématiquement par la figure 7.

Supposons le nombre des équations normales réduit à deux:

$$[a a] y + [a b] x + [a f] = 0$$

$$[b a] y + [b b] x + [b f] = 0$$

Nous diviserons la première équation par  $[a a]$  et la deuxième par  $[b a]$  en appliquant l'abaque ainsi qu'il est expliqué plus haut sous cas particuliers; nous sommes donc ramenés au système:

$$I^0 \begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

traité au début de ce chapitre.

Jusqu'ici les quantités  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $x$ ,  $y$  étaient supposées comprises dans les limites de l'abaque; si cela n'est pas le cas, il faudra modifier quelque peu les équations en s'aidant des règles suivantes:

1) Si  $x$  est négatif, on résoudra le système

$$\begin{cases} y = -ax + b \\ y = -a'x + b' \end{cases}$$

qui donnera pour  $x$  la même valeur absolue que le système primitif, mais de signe contraire.

2)  $y$  n'est pas compris entre 0 et 30; il suffit d'ajouter un nombre rond  $K$  aux deux membres de l'équation:

$$\begin{cases} y + K = y' = ax + (b + K) \\ y + K = y' = a'x + (b' + K) \end{cases}$$

et on détermine préalablement  $y'$ , la valeur de  $K$  étant choisie de manière à ce que  $y'$  soit compris entre 0 et 30.

Le système primitif I peut être remplacé par

$$\text{II. } \begin{cases} y = ax + b \cdot 10^m \\ y = a'x + b' \cdot 10^m \end{cases} \quad \text{ou III. } \begin{cases} y = a \cdot 10^n \cdot x + b \\ y = a' \cdot 10^n \cdot x + b' \end{cases}$$

à condition de diviser les résultats obtenus pour  $x$  et  $y$  par  $10^m$  dans la première hypothèse ou en multipliant par  $10^n$  la valeur de  $x$  satisfaisant au système III.

L'application des résultats qui précèdent nous a permis de résoudre les équations normales dans la plupart des cas à la condition de construire tout d'abord une abaque de grandes dimensions permettant le tracé d'un réseau de droites et d'hyperboles plus serré que celui de la figure 5. Le manque de place ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ce sujet; mais nous engageons vivement ceux qui sont amenés à effectuer des compensations par la méthode des moindres carrés à étudier les principes de la nomographie et en particulier la méthode de résolution des équations de M. Dumas dont nous venons d'exposer les grandes lignes. Nous devons remercier avant de terminer la rédaction du *Bulletin Technique de la Suisse Romande* qui a bien voulu mettre à notre disposition le cliché de la figure n° 5.

Ansermet.

## Die Geometerschule an der Universität Freiburg.

Herr Professor Paul Gerber von der Geometerschule am Technikum Freiburg ersucht uns, nachfolgendes Studienprogramm für die Studierenden der Fakultät für allgemeine Wissenschaften an der Universität Freiburg, welche Grundbuchgeometer werden