Zur trigonometrischen Höhenrechnung

Autor(en): **Müller, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres**

Band (Jahr): **14 (1916)**

Heft 12

PDF erstellt am: **15.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-184116

zugleich, vor einigen Jahren hören zu müssen, dass meine Messungen mit den etwa 35 Jahre späteren Messungen nicht übereinstimmen sollten, und es ist mir eine Genugtuung, nun vernehmen zu können, dass der Grund dieser Misstimmigkeiten entdeckt worden ist. Ich erinnere mich, damals in einiger Entfernung nördlich der Signalstelle einige Trichter von ungefähr 4 Meter Durchmesser und 2 Meter Tiefe bemerkt zu haben, die durchaus das Gepräge eines Einsturzes hatten. Ueber die Ursache dieser Einsenkungen war ich nicht im klaren; ich habe sie damals als Folge der Versickerung von Schneewasser betrachtet; sie scheint indessen mit einem verworfenen, zerklüfteten Zustande der Gesteinsmassen in Verbindung zu stehen. *St.*

Zur trigonometrischen Höhenrechnung.

Die auf Seite 290 dieser Zeitschrift abgeleitete Formel für log d' gilt nur für relativ kleine Exzentrizitäten. Um auch grösseren Exzentrizitäten gerecht zu werden, dürfen wir im Cossatze, von dem wir ausgegangen sind, das e^2 nicht vernachlässigen. Die Entwicklung nimmt dann folgenden Gang:

$$d^2 = d'^2 + e^2 - 2\,d'\,e\cos i$$

$$d^2 = d'^2\left(1 + \frac{e^2}{d'^2} - \frac{2\,e\cos i}{d'}\right)$$

1. $$2\log d = 2\log d' + \log(1 + x),\ \text{wenn}$$

$$x = \frac{e^2}{d'^2} - \frac{2\,e\cos i}{d'}\quad\text{gesetzt wird}$$

$$\log(1 + x) = M\cdot\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots\right)$$

$$\begin{array}{rclllll}
x & = & -\dfrac{2\,e\cos i}{d'} & +\dfrac{e^2}{d'^2} & & & \\[2ex]
-\dfrac{x^2}{2} & = & \underline{\qquad\quad} & -\dfrac{2\,e^2\cos^2 i}{d'^2} & +\dfrac{2\,e^3\cos i}{d'^3} & -\dfrac{e^4}{2\,d'^4} & \\[2ex]
\dfrac{x^3}{3} & = & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} & -\dfrac{8\,e^3\cos^3 i}{3\,d'^3} & +\dfrac{4\,e^4\cos i}{d'^4} & -\ldots \\[2ex]
-\dfrac{x^4}{4} & = & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} & -\dfrac{4\,e^4\cos^4 i}{d'^4} & +\ldots
\end{array}$$

$$\log(1+x) =$$

$$M\left(-\frac{2\,e\cos i}{d'}+\frac{e^2(1-2\cos^2 i)}{d'^2}+\frac{e^3(2\cos i-{}^8\!/_3\cos^3 i)}{d'^3}-\ldots\right)$$

Nun ist: $\quad 1 - 2\cos^2 i = 1 - (1+\cos 2\,i) = -\cos 2\,i$

$$2\cos i - \frac{8}{3}\cos^3 i = 2\cos i - \frac{8}{3}\left(\frac{3}{4}\cos i + \frac{1}{4}\cos 3\,i\right)$$

$$= 2\cos i - 2\cos i - \frac{2}{3}\cos 3\,i = -\frac{2}{3}\cos 3\,i$$

Mit diesen Vereinfachungen wird:

$$2.\quad \log(1+x) = M\left(-\frac{2\,e\cos i}{d'}-\frac{e^2\cdot\cos 2i}{d'^2}-\frac{2\,e^3\cos 3i}{3\,d'^3}-\ldots\right)$$

Gleichung 2. in 1. eingesetzt ergibt:

$$3.\quad \log d' = \log d + \frac{M\cdot e\cdot\cos i}{d'}+\frac{M\cdot e^2\cdot\cos 2\,i}{2\,d'^2}+\frac{M\cdot e^3\cdot\cos 3\,i}{3\,d'^3}+\ldots$$

Für die nachfolgende Betrachtung nehmen wir nun an, die sechste Stelle von log d' solle richtig sein.

Wollen wir das zweite Korrektionsglied vernachlässigen, so haben wir die Bedingung zu erfüllen:

$$\frac{M\cdot e^2\cos 2\,i}{2\,d'^2} < 0{,}0000005$$

Der grösste Wert, den cos 2 i annehmen kann, ist 1. Es wird dann:

$$e^2 < d'^2\,\frac{0{,}000001}{0{,}434}$$

$$e < d'\sqrt{0{,}0000023}$$

$$4.\qquad e < d'\cdot 0{,}0015$$

Ist diese Bedingung 4. erfüllt, so wird auf alle Fälle das erste Glied genügen. Es ergibt sich dann für

d'	=	300	500	1000	2000	m
e	<	45	75	150	300	cm

Benützen wir auch das zweite Glied, so heisst unsere Bedingung:

$$\frac{M\cdot e^3\cos 3\,i}{3\,d'^3} < 0{,}0000005$$

$$\cos 3\,i\ \max = 1$$

$$e^3 < d'^3\,\frac{0{,}0000015}{0{,}434}$$

$$e < d'\cdot\sqrt[3]{0{,}0000035}$$

5. $$e < d' \cdot 0{,}015$$

Diese Bedingung 5. gibt uns folgende Maximalwerte für e, bei denen das dritte Korrektionsglied vernachlässigt werden kann.

d'	=	300	500	1000	2000 m
e	<	4,5	7,5	15,5	30,0 m

Die Mitbenützung des zweiten Gliedes wird also ziemlich sicher in den meisten Fällen genügen, bietet aber dann keine Vorteile gegenüber andern Methoden, da in so extremen Fällen das erste Glied $\frac{M \cdot e \cos i}{d'}$ nicht mehr mit dem Rechenschieber bestimmt, und das d' im Nenner nicht durch d ersetzt werden kann.

Auch bei grossen Exzentrizitäten erreichen wir mit dem ersten Gliede allein genügende Genauigkeit, wenn

$$\cos 2\,i = 0, \text{ oder}$$
$$i = 45^0,\ 135^0 \text{ etc. ist.}$$

Kriens, im Oktober 1916. *E. Müller.*

Du calcul trigonométrique des altitudes.

Dans l'article que, sous ce titre, nous avons publié à la page 310 de notre journal, il y a lieu de remarquer que la formule que nous avons déduite pour log d' n'est valable que pour des excentricités relativement minimes.

Lorsqu'on a à faire avec des excentricités plus grandes, il faut modifier les développements de la formule dont nous sommes partis, en ce sens que nous conservons le terme e^2. Les développements sont donc les suivants:

$$d^2 = d^{2\prime} + e^2 - 2\,d'\,e \cos i \text{ ou}$$

$$d^2 = d'^2 \left(1 + \frac{e^2}{d'^2} - \frac{2\,e \cos i}{d'}\right) \text{ et}$$

1^0 $2 \log d = 2 \log d' + \log (1 + x)$, lorsque nous posons

$$x = \frac{e^2}{d'^2} - \frac{2\,e \cos i}{d'}$$

$$\text{or } \log (1 + x) = M \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots.\right)$$

$$x = - \frac{2\,e \cos i}{d'} + \frac{e^2}{d'^2}$$