Bestimmung der Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschneiden

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **19 (1921)**

Heft 2

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-186792

eigentümer erfolgt durch die Schatzungskommission im Verhältnis des Nutzens, der den Beteiligten aus dem Unternehmen erwächst, sofern die Grundeigentümerversammlung nicht beschließt, daß die Kosten proportional der Fläche verteilt werden sollen.

Weicht der relative Kostenaufwand in einer Flurabteilung von demjenigen des übrigen Gebietes bedeutend ab, so hat für diese Flurabteilung die Kostenverteilung gesondert zu geschehen.

Der Landbedarf für die gemeinsamen Anlagen ist von den Grundeigentümern nach Maßgabe des Wertes der beteiligten Grundstücke zu tragen. »

Die nähern Angaben über die Klassenbildung sind der *Vollziehungsverordnung* zuzuweisen. Wir schlagen folgende Fassung vor:

« Werden bei Güterzusammenlegungen die Kosten nicht proportional der Fläche verteilt, so sind die beteiligten Landgüter derart in eine beschränkte Anzahl Klassen zu ordnen, daß die Landgüter, für welche ungefähr ein gleicher mittlerer Nutzen pro Flächeneinheit zu erwarten ist, sich in der gleichen Klasse befinden.

Die relative Zahlungspflicht der Klassen wird proportional dem zu erwartenden mittleren Nutzen pro Flächeneinheit festgelegt.

Die von den Grundeigentümern zu bezahlenden Beiträge ergeben sich durch Multiplikation der beteiligten Fläche des Landgutes mit der Zahlungspflicht der betreffenden Klasse. »

Bestimmung der Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschneiden.

Es seien zwei Punkte A und B in der Ebene gegeben. Nach ein und demselben Punkte P seien die ebenen Azimute mit je einem mittleren Fehler von μ centesimalen Minuten gemessen.

Es soll die Fehlerellipse bei der Bestimmung des Punktes P bestimmt werden.

Wir führen ein spezielles Koordinatensystem mit dem

Halbierungspunkt O der Strecke AB als Nullpunkt und OA als x-Axe ein.

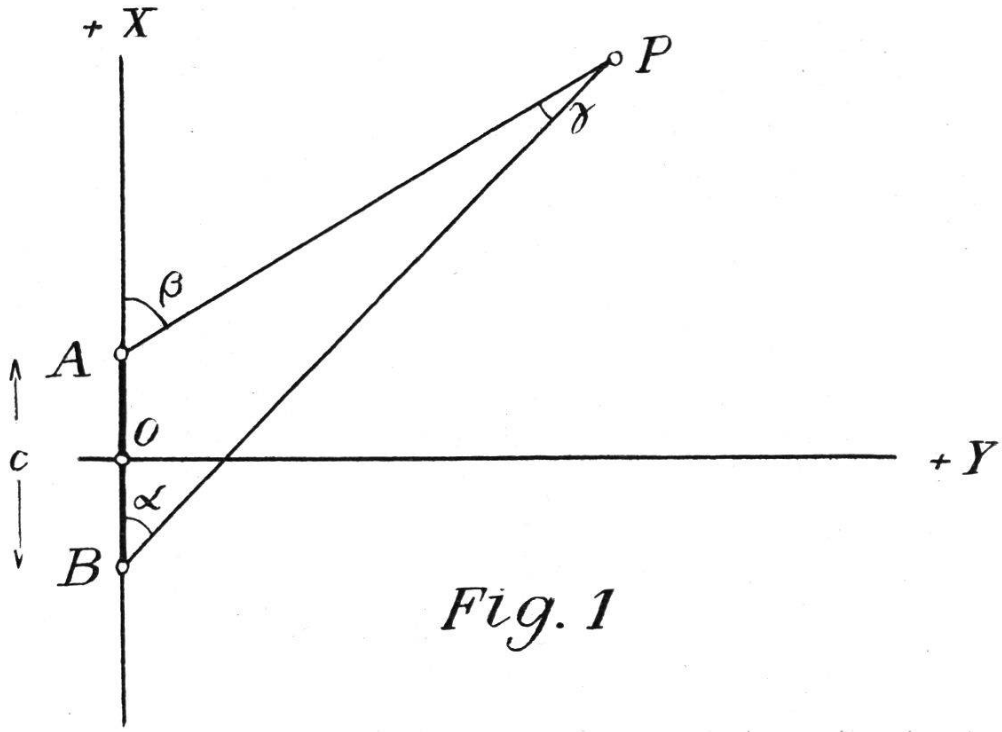

Fig. 1

Sei v_1 die wahrscheinlichste Verbesserung des Beobachtungswertes α, v_2 die analoge Verbesserung des Beobachtungswertes β, während x und y die wahrscheinlichsten Koordinaten von P seien, so haben wir die Beziehungen:

$$\alpha + v_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right) \tag{1}$$

$$\beta + v_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - \frac{c}{2}}\right) \tag{2}$$

Führen wir neue Unbekannte η, ξ durch Einführung der Näherungswerte y_0 und x_0 ein

$$y = y_0 + \eta; \qquad x = x_0 + \xi \tag{3}$$

so haben wir:

$$\alpha + v_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 + \eta}{x_0 + \xi + \frac{c}{2}}\right) \tag{4}$$

$$\beta + v_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 + \eta}{x_0 + \xi - \frac{c}{2}}\right) \tag{5}$$

Die rechten Seiten von (4) und (5) entwickeln wir nach Taylor und erhalten:

$$\alpha + v_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0 + \frac{c}{2}}\right) + \frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)}{\partial x}\,\xi$$

$$+ \frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)}{\partial y}\,\eta + Gl^2 \tag{6}$$

$$\beta + v_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0 - \frac{c}{2}}\right) + \frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - \frac{c}{2}}\right)}{\partial x}\,\xi$$

$$+ \frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x - \frac{c}{2}}\right)}{\partial y}\,\eta + Gl^2 \tag{7}$$

wobei wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen wollen.

$$\frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)^2} \cdot \frac{y}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2} =$$

$$- \frac{y}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x + \frac{c}{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{c}{2}\right)} =$$

$$+ \frac{x + \frac{c}{2}}{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x-\dfrac{c}{2}}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x-\dfrac{c}{2}}\right)^2} \cdot \frac{y}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2} = \tag{10}$$

$$-\frac{y}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-\dfrac{c}{2}}\right)}{\partial y} = +\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x-\dfrac{c}{2}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2} = \tag{11}$$

$$+\frac{x-\dfrac{c}{2}}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}$$

Damit erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$v_1 = \left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0-\dfrac{c}{2}}\right) - \alpha\right\} - \frac{y}{\left(x+\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}\,\xi \tag{12}$$

$$+\frac{x+\dfrac{c}{2}}{\left(x+\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}\,\eta$$

$$v_2 = \left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0-\dfrac{c}{2}}\right) - \beta\right\} - \frac{y}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}\,\xi \tag{13}$$

$$+\frac{x-\dfrac{c}{2}}{\left(x-\dfrac{c}{2}\right)^2 + y^2}\,\eta$$

In allgemeiner Form:

$$v_1 = a_1\,\xi + b_1\,\eta + f_1$$
$$v_2 = a_2\,\xi + b_2\,\eta + f_2$$

Hieraus kann man die Normalgleichungen bilden:

$$[a\,a]\,\xi + [a\,b]\,\eta + [a\,f] = 0 \tag{14}$$

$$[a\,b]\,\xi + [b\,b]\,\eta + [b\,f] = 0 \tag{15}$$

und daraus weiter die Fehlerellipse berechnen.

Seien Q_{11}, Q_{22} und Q_{12} resp. die sogenannten Gewichtskoeffizienten, so gelten bekanntlich die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{r} [a\,a]\,Q_{11} + [a\,b]\,Q_{12} - 1 = 0 \\ [a\,b]\,Q_{11} + [b\,b]\,Q_{12} \pm 0 = 0 \\ \text{und} \qquad\qquad\qquad \\ [a\,a]\,Q_{12} + [a\,b]\,Q_{22} \pm 0 = 0 \\ [a\,b]\,Q_{12} + [b\,b]\,Q_{22} - 1 = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Bezeichnen wir mit N die Neigung einer Axe der Fehlerellipse, so ist bekanntlich

$$\operatorname{cotg} 2\,N = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2\,Q_{12}} \tag{17}$$

[Siehe z. B. Helmert, Ausgleichungsrechnung, 2. Auflage, pag. 307.]

Nun ist aber aus den Gleichungen (16) leicht nachzuweisen, daß

$$\left.\begin{array}{l} Q_{11} = \dfrac{[b\,b]}{[a\,a]\;[b\,b] - [a\,b]^2} \\ Q_{22} = \dfrac{[a\,a]}{[a\,a]\;[b\,b] - [a\,b]^2} \\ Q_{12} = \dfrac{[a\,b]}{[a\,a]\;[b\,b] - [a\,b]^2} \end{array}\right\} \tag{18}$$

Setzt man diese Beziehungen in (17) ein, so folgt

$$\operatorname{cotg} 2\,N = \frac{[b\,b] - [a\,a]}{2\,[a\,b]} \tag{19}$$

Diese Gleichung, wie auch (17), hat bekanntlich zwei Lösungen, die sich um zwei Rechte unterscheiden; nennen wir die beiden Lösungen N_1 und N_2, so unterscheiden sich dieselben um einen Rechten und stellen uns die Neigungen der beiden Axen der Fehlerellipse dar.

Die Halbaxen der mittleren Fehlerellipse sind dann bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\mu}{\rho}\sqrt{Q_{22} + Q_{12}\,\operatorname{cotg} N_1} \\ \text{und} \quad \dfrac{\mu}{\rho}\sqrt{Q_{22} + Q_{12}\,\operatorname{cotg} N_2} \end{array}\right\} \tag{20}$$

oder auch gleichwertig:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mu}{\rho}\sqrt{Q_{11} + Q_{12}\ \mathrm{tg}\ N_1} \\ \frac{\mu}{\rho}\sqrt{Q_{11} + Q_{12}\ \mathrm{tg}\ N_2} \end{array}\right\} \quad (21)$$

Führen wir die Beziehungen (18) ein, so folgt für die Halbaxen der mittleren Fehlerellipse:

$$\frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{[a\,a] + [a\,b]\ \mathrm{cotg}\ N_1}{[a\,a]\ [b\,b] - [a\,b]^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{[a\,a] + [a\,b]\ \mathrm{cotg}\ N_2}{[a\,a]\ [b\,b] - [a\,b]^2}} \quad (22)$$

oder gleichwertig:

$$\frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{[b\,b] + [a\,b]\ \mathrm{tg}\ N_1}{[a\,a]\ [b\,b] - [a\,b]^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{[b\,b] + [a\,b]\ \mathrm{tg}\ N^2}{[a\,a]\ [b\,b] - [a\,b]^2}} \quad (23)$$

(Schluss folgt.)

Kleine Mitteilungen.

Monsieur le rédacteur,

Connaissant votre grande amabilité, je vous saurais gré de bien vouloir insérer la lettre ci-dessous:

Nos bons amis et collègues de la Suisse allemande ne se font aucune idée avec quel plaisir nous aimons à recevoir notre «Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières». Par une lecture assidue, et sans en omettre un article, les géomètres de la Suisse romande, les Tessinois doivent être également du nombre, ont réussi au cours des dernières années, à se perfectionner dans la langue allemande et risquent de devenir de sérieux concurrents pour les travaux à venir. Grâce aux nombreux travaux publiés en allemand, chacun ici comprend et parle à peu près couramment en cette langue. Toutefois il y a une injustice flagrante envers nos collègues de la Suisse allemande, et je m'étonne qu'aucune voix autorisée ne réclame au moins une traduction par mois en français. Vous n'avez pas, chers amis, la chance de pouvoir de temps en temps vous perfectionner dans une langue, qui est intéressante et qui est parlée par de nombreuses personnes. Et bien, nous ne voulons pas que l'on commette à votre égard pareille injustice, nous réclamons pour vous que l'on partage un peu