Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben

Autor(en): **Hammer, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **19 (1921)**

Heft 3

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-186794

$$\pm 2\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4$$

$$\pm 2\left(x+\frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2$$

$$\pm 2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2$$

$$\pm 2\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 y^2 \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^4$$

$$\mp 2\, y^4 \left[\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 \left[\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2\right]^2 = 0.$$

Für Ueberschlagsbetrachtungen genügt es anzunehmen, die große Axe gehe vom Außenpunkt nach der Mitte der Basis c.

Figur 2 zeigt ausgezogen die Kurven für die großen Halbaxen, punktiert die Kurven für die kleinen Halbaxen für den Fall $\mu = 1'$ (Minute centesimal) und $c = 1000$ Meter.

Zollikon, im Oktober 1920. *F. Baeschlin.*

Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von *E. Hammer*, Stuttgart.

Die folgenden Zeilen geben Bemerkungen zu zwei Ausgleichungsaufgaben, die *Eggert* in seine neue, wesentlich erweiterte Bearbeitung des ersten Bandes des *Jordan*schen Handbuchs der Vermessungskunde (7. Auflage, 1920) aufgenommen hat; die eine als einfaches Beispiel für *vermittelnde* Bestimmung zweier Unbekannten bei nichtlinearem Zusammenhang zwischen ihnen und den Messungen, die zweite als ebenso einfaches Beispiel für direkte *bedingte* Messungen. Meine Bemerkungen sind z. T. didaktischer Art, z. T. aber wohl auch für solche Leser von Interesse, die schon weiter in die Ausgleichungsrechnung eingedrungen sind.

I. Die *erste* der genannten Aufgaben (a. a. O. S. 72) ist die Berechnung der Koordinaten eines Lagepunktes in einem System gegebener Punkte durch «mehrfachen Bogenschnitt», wie der in Norddeutschland beliebte Ausdruck lautet. Die Aufgabe ist als ansprechendes einfaches Beispiel für vermittelnde Bestimmung zweier Unbekannten bei zunächst nichtlinearen Verbesserungsgleichungen viel behandelt worden, von *Koll* in der preußischen «Anweisung IX», von *Eggert* a. eben a. O., rechnerisch und graphisch von *Hammer* in «Zeitschrift für Mathematik und Physik» (früher Schlömilch), Band 43, 1898, S. 105 bis 115, rechnerisch von *Dokulil* in der «Oest. Zeitschrift für Vermessungswesen» 1917, S. 65 bis 69, und daraufhin abermals von mir in derselben Zeitschrift, 1917, No. 7/8. Die folgenden Bemerkungen nehmen gelegentlich Bezug auf meine zwei genannten Arbeiten als Hr. I (Z. Math., 1898) und Hr. II (Oest. Z., 1917).

1. Die *Aufgabe* mit den *Eggert*schen Zahlen ist folgende: Von den vier gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 aus mit den Koordinaten wie unten angeschrieben, sind die Strecken L_1, L_2, L_3, L_4 nach dem zu bestimmenden Punkt N gemessen mit

		x	y	gemessene Str.	
	P_1	+ 551,78	+ 899,06	L_1 = 123,81	
(1)	P_2	+ 548,11	+ 824,95	L_2 = 114,59	(2)
	P_3	+ 307,63	+ 850,40	L_3 = 129,25	
	P_4	+ 377,57	+ 955,51	L_4 = 118,78	

den Ergebnissen (2); die Koordinaten von N sind mit ihren m. F. zu bestimmen.

Der *Eggert*sche Näherungspunkt, dessen *kleine* Koordinaten-Korrektionen x und y noch zu ermitteln sind, ist (3) N^0 $x_0 = +\,436{,}95$, $y_0 = +\,852{,}66$. Die Figur 1 zeigt etwa im Maßstab 1 : 3700 die gegenseitige Lage der Punkte. Mit Festhaltung der Rechenschärfe 1 mm in den Strecken L_0 von den gegebenen Punkten nach dem Näherungspunkt N_0 und demnach derselben Schärfe in den *l* der Verbesserungsgleichungen, ferner mit den in (5) angegebenen Zahlenwerten bis auf 1 Einh.$_3$ der Koeffizienten a, b der Unbekannten x, y in den Verbesserungsgleichungen, nämlich der Ausdrücke

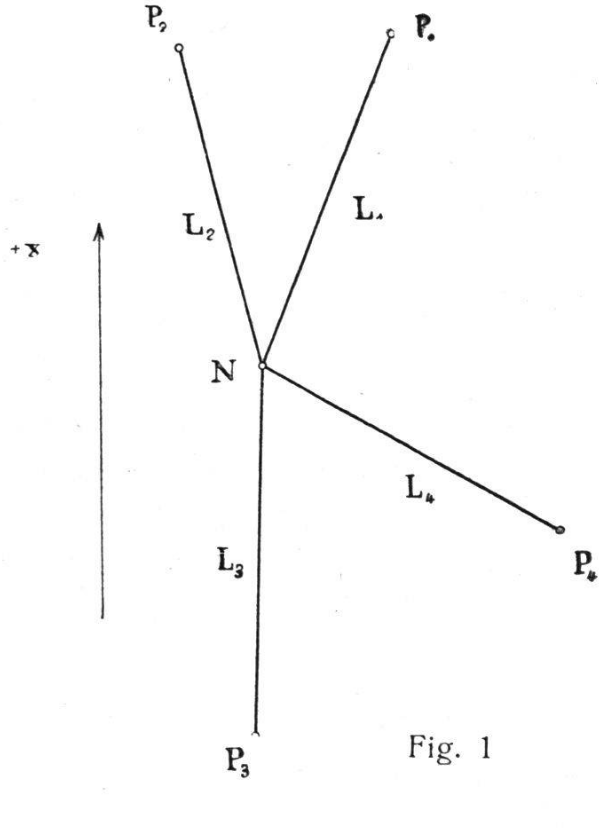

Fig. 1

$$(4)\quad a_1 = -\frac{x_1-x_0}{L_1}, \qquad b_1 = -\frac{y_1-y_0}{L_1}$$

. . . .

(wobei es selbstverständlich gleichgiltig ist, ob in den Nennern die L oder die L_0 gesetzt werden), finden sich a. a. O., die *l* in Metern genommen, die Verbesserungsgleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} v_1 = -0{,}928\,x - 0{,}375\,y + 0{,}040 \\ v_2 = -0{,}970\,x + 0{,}242\,y - 0{,}028 \\ v_3 = +1{,}000\,x + 0{,}017\,y + 0{,}090 \\ v_4 = +0{,}500\,x - 0{,}866\,y - 0{,}019 \end{cases}$$

Die Auflösung der zugehörigen Normalgleichungen, deren Koeffizienten auf 1 Einh.$_4$ angegeben werden, gibt:

$$(6)\quad \begin{cases} x = -0{,}0234\,(m), & y = -0{,}0034\,(m) \\ x_n = 436{,}927 & y_n = 852{,}657 \end{cases}$$

und damit also nach (5) als System der Verbesserungen der Messungen, wieder bis auf ein Millimeter gerechnet,

$$(7)\quad \begin{cases} v_1 = +0{,}062\,(m) \\ v_2 = -0{,}007\ \text{»} \\ v_3 = +0{,}067\ \text{»} \\ v_4 = -0{,}028\ \text{»} \end{cases}$$

Nach Anbringung dieser v an den L nach (2) wird die Uebereinstimmung der $\underline{L}$ (verbesserten Messungen) mit den aus den ausgeglichenen ($x_n\ y_n$) sich ergebenden Abständen des Punktes N von den fest gegebenen Punkten nachgewiesen. Dem Stand der Einführung des Lesers bei *Eggert* an dem a. O. entsprechend, wird dort die Fehlerrechnung, [v v], m_l, m_x, m_y noch nicht beigefügt; ferner ist bei der unbedeutenden Abweichung aller vier Messungen von dem Betrag 120 m in diesem Anfänger-Beispiel von Einführung verschiedener Gewichte für die L abgesehen.

2. *Rechnung mit weniger Dezimalen.* Die Rechnungsgenauigkeit bei *Eggert* ist, wie die vorstehenden Zahlen zeigen, aus naheliegenden Gründen absichtlich größer, als erforderlich wäre. Wir wollen einmal an diesem einfachen Beispiel empirisch untersuchen, wieviel an Genauigkeit der Ergebnisse verloren geht, wenn wir die Rechnungsschärfe, der Genauigkeit der Daten und damit dem praktischen Bedürfnis gemäß, zunächst so verringern, daß für die *Ausgleichung* durchaus der gewöhnliche Rechenschieber ausreicht (vgl. dazu auch Hr. I). Da die Koordinaten der fest gegebenen Punkte auf 1 cm abgerundet sind und diese Zahlen, wenn auch die Koordinaten fehlerfrei bestimmt wären, einen möglichen Maximalfehler von 5 mm haben,

also einer der gegebenen Punkte um bis zu 7 mm von dem Punkte entfernt sein kann, der durch die Koordinatenzahlen bestimmt ist, da ferner die gemessenen L ebenfalls auf 1 cm abgerundet (und sicher nicht bis zu diesem Betrage genau) sind, so ist von vornherein die *Rechnung* mit der Genauigkeit 1 cm (größter Fehler 5 mm) genügend. Mit der Quadrattafel in *Gauß'* fünfstelligen Logarithmentafeln erhält man, bei Annahme der Koordinaten (3) des obigen Näherungspunktes N_0 folgende L_0 mit Abrundung auf 1 cm:

$$(8)\quad \begin{cases} L_{0,1} = 123{,}85 \\ L_{0,2} = 114{,}56 \\ L_{0,3} = 129{,}34 \\ L_{0,4} = 118{,}76 \end{cases}$$

und also für die l, ebenfalls mit Abrundung auf 1 cm und mit dem Centimeter als Längenmaß die Zahlen

$$(9)\quad \begin{cases} l_1 = +4 \\ l_2 = -3 \\ l_3 = +9 \\ l_4 = -2 \end{cases}$$

endlich für die Koeffizienten a und b von x und y in den Verbesserungsgleichungen (10) die folgenden Zahlen, auf 1 Einheit_2 abgerundet; daneben sind gleich die für die Normalgleichungen zu bildenden Zahlen aa, ab, ... gesetzt,

$$(10)\quad \begin{cases} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + l_3 \\ v_4 = a_4\,x + b_4\,y + l_4 \end{cases}$$

alles mit dem gewöhnlichen Rechenschieber und ebenfalls mit Abrundung auf 1 Einheit_2 gerechnet.

	a	b	l (cm)	aa	ab	al	bb	bl	ll
	—0,93	—0,37	+4	0,86	+0,34	—3,72	0,14	—1,48	16
(11)	—,097	+0,24	—3	0,94	—0,23	+2,91	0,06	—0,72	9
	+1,00	+0,02	+9	1,00	+0,02	+9,00	0,00	+0,18	81
	+0,50	—0,86	—2	0,25	—0,43	—1,00	0,74	+1,72	4
				3,05	—0,30	+7,19	0,94	—0,30	110

Die Auflösung der zwei Normalgleichungen mit dem gewöhnlichen Rechenschieber, in leicht verständlicher Anordnung, die nur die notwendig zu schreibenden Zahlen, diese aber ohne jede Weglassung enthält, folgt hier in (12). Die quadratischen Koeffizienten sind mit —— und .... unterstrichen; sonst wird wohl nur noch zu erwähnen sein, daß ich die Reduktion von $[ll]$ auf hier $[ll\cdot 2]$ gerne rechts *neben* die Eliminationsrechnung für die Unbekannten setze: es ist dann allemal von der vorhergehenden $[ll]$-Summe dort, wo ein —— unterstrichener

Anfangskoeffizient steht, das Quadrat des Absolutglieds dividiert durch diesen ___ Koeffizienten abzuziehen, um die $[ll]$ der folgenden Stufe zu finden, z. B. in der linken Hälfte $[ll \cdot 1] = [ll] - (7{,}19^2 : 3{,}05)$, d. h. $93 = 110 - 17$, ebenso $93 = 93 - (0{,}41^2 : 0{,}91) = [ll \cdot 2] = [vv]$.

(12)

$\underline{3{,}05}\,x - 0{,}30\,y + 7{,}19 = 0$	110	$\underline{0{,}94}\,y - 0{,}30\,x - 0{,}30 = 0$	110
$0{,}94 \quad -0{,}30$	*—17*	$3{,}05 \quad +7{,}19$	*—0*
$-0{,}03 \quad +0{,}71$		*$-0{,}10 \quad -0{,}10$*	
$\underline{0{,}91}\,y + 0{,}41 = 0$	93	$\underline{2{,}95}\,x + 7{,}09 = 0$	110
$y = -\frac{0{,}41}{0{,}91} = -0{,}45$ cm	*0*	$x = -\frac{7{,}09}{2{,}95} = -2{,}41$ cm	*—17*
$g_y = 0{,}91$		$g_x = 2{,}95$	
$[ll \cdot 2] = [vv] =$	93	$[ll \cdot 2] = [vv] =$	93

Daß das Gewicht von x und damit von x_n viel größer ausfallen mußte als das von y und damit von y_n, ist ohne Rechnung aus dem Anblick der Figur klar, indem die Bestimmungslinien (Oerter) für N den Messungen gemäß viel mehr der Richtung der Ordinatenachse als der der Abszissenachse sich nähern, und somit die Abszisse x_n schärfer als die Ordinate y_n bestimmt sein muß.

Das Ergebnis von (12), $x = -2{,}4$ cm, $y = -0{,}5$ cm und damit auf Halbcentimeter abgerundet

$$(13) \qquad x_n = 436{,}92_5, \; y = 852{,}65_5$$

stimmt innerhalb dieses $^1/_2$-cm mit dem Ergebnis von *Eggert*, vgl. (6); ebenso ergeben sich für die v aus der vorstehenden Auflösung (wenn wegen der Kontrolle für $[vv] = 93$ zunächst die v auf 1 mm gerechnet werden) die in (14) angeschriebenen Zahlen, die von den *Eggert*schen (oben in (7) angeschrieben) nirgends um mehr als 2 mm abweichen. Die Quadratsumme der v nach (14) gibt hier 93 übereinstimmend mit $[ll \cdot 2]$ der Ausgleichung. Fügen wir hier auch noch die Fehlerrechnung bei, so wird

$$(14) \quad \begin{cases} v_1 = +6{,}4 \text{ cm} \\ v_2 = -0{,}8 \text{ »} \\ v_3 = +6{,}6 \text{ »} \\ v_4 = -2{,}8 \text{ »} \end{cases}$$

(15) m_1 (mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, d. h. hier einer der vier Messungen)

$$m_1 = \sqrt{\frac{93}{4-2}} = \pm 6{,}8 \text{ cm, und damit}$$

$$
(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mittl. Fehler der Abszisse } m_x = m_{x\,n} = \dfrac{6{,}8}{\sqrt{2{,}95}} = \pm 4 \text{ cm u.} \\ \text{»} \quad \text{»} \quad \text{» Ordinate } m_y = m_{y\,n} = \dfrac{6{,}8}{\sqrt{0{,}91}} = \pm 7 \text{ cm} \end{array} \right.
$$

(Fortsetzung folgt.)

Längenbestimmung unzugänglicher Ordinaten bei Koordinatenaufnahmen.

Von Prof. Dr. *H. Löschner*, Brünn, Deutsche Technische Hochschule.

I.

Bei Koordinatenaufnahmen kommt es zuweilen vor, daß einzelne Ordinaten unzugänglich oder nicht gut meßbar sind, beispielsweise, wenn eine Häuserreihe am Steilufer eines breiten Mühlganges vom andern Ufer aus aufzunehmen ist.

Man kommt zunächst auf den Gedanken, das sogenannte „Umlegen der Ordinaten" anzuwenden, das in manchen Lehrbüchern der Vermessungskunde[1] im Anschlusse an die Besprechung der Koordinatenaufnahme vorgeführt wird. Diese Methode besteht im Abstecken rechtwinklig gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe einer Kreuzscheibe oder eines zum Abstecken 45-gradiger Winkel geeigneten Winkelspiegels. Es ist ein Vorwärtsabschneiden unter Einhaltung von Bedingungen in bezug auf die Größe der Winkel. Die Methode erscheint zwar theoretisch sehr einfach und hat den Vorteil, daß die Ordinatenlänge ohne jede Rechnung erhalten wird; sie läßt sich aber in der Praxis oft nicht anwenden, weil ein bequemes Hilfsmittel zur Absteckung 45-gradiger Winkel nur selten zur Verfügung steht. Uebrigens ist zu beachten, daß beim Umlegen einer Ordinate der Freihand-Winkelabstecker in *zwei* Punkten verwendet wird und somit der bei Freihandinstrumenten sehr bemerkenswerte Zentrierungsfehler *zweimal* einwirkt. Ferner ist zu beachten, daß schon bei der gewöhnlichen Koordinatenaufnahme mit nur einmaliger Verwendung des Winkelspiegels die Ordinatenlänge bei genaueren Arbeiten nicht gerne viel über 20 m ausgedehnt wird, und daß beim Umlegen der Ordinaten wegen der Doppel-

---

[1] Vergl. Jordan-Reinhertz, Bd. II, 1904, S. 94; Dolezal's Hand- und Lehrbuch, Bd. I, S. 661.