

# Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben [Fortsetzung und Schluss]

Autor(en): **Hammer, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **19 (1921)**

Heft 6

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-186804>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Prof. C. ZWICKY, Zürich, Bergstr. 131

Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre,  
Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □  
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern  
(erscheinend am zweiten Dienstag  
jeden Monats)  
und 12 Inseraten-Bulletins  
(erscheinend am vierten Dienstag  
jeden Monats)

No. 6  
des XIX. Jahrganges der  
„Schweiz. Geometerzeitung“.  
14. Juni 1921

Jahresabonnement Fr. 12.—  
(unentgeltlich für Mitglieder)

Inserate:  
50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

## Schweizerischer Geometerverein.

### Mitteilung des Zentralvorstandes.

XVII. Hauptversammlung vom 18. Juni 1921 in Baden.

Erweiterung der Traktandenliste durch den rechtzeitig eingereichten Antrag des bernischen Geometervereins:

„Es ist die Mitgliederzahl des Zentralvorstandes auf neun zu erhöhen, um den Wünschen des Vereins der angestellten Geometer betreffs einer Vertretung im Zentralvorstand entgegenkommen zu können.“

Küsnacht, den 25. Mai 1921.

Der Zentralvorstand.

## Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von E. Hammer, Stuttgart.

(Fortsetzung und Schluß.)

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} v_{\alpha} = - 3'', 18 \\ v_{\beta} = + 0'', 82 \\ v_{\gamma} = + 10'', 33 \\ v_a = + 1,44 \text{ mm} \\ v_b = + 17,34 \text{ „} \\ v_c = - 8,21 \text{ „} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Die } v \text{ in (51) weichen im Ma-} \\ \text{ximum um 1 Einheit, von den} \\ \text{Eggertschen ab.} \\ \text{8. Andere Rechnung mit den} \\ \text{Eggertschen Bedingungsgleichun-} \\ \text{gen (38). Bevor auf den Grund} \end{array}$$

für die Anwendung der Gleichungen (45) in 7. näher eingegangen wird, mag noch darauf hingewiesen werden, daß man sich die Rechnung mit dem System (38) dadurch etwas erleichtern kann, daß man bei der zweimaligen Anwendung des Sinus-Satzes logarithmische Differenzen verwendet. *Eggert* hat dies nur deshalb nicht getan, weil diese Rechnungsweise, die später bei Ausgleichung von Triangulationsaufgaben eine so große Rolle spielt, a. a. O. noch nicht erklärt ist. Schreibt man die zwei letzten Gleichungen (38) in der Form

$$(52) \frac{a \cdot \sin \beta}{b \cdot \sin \alpha} = 1 \quad \text{und} \quad (53) \frac{a \cdot \sin \gamma}{c \cdot \sin \alpha} = 1,$$

so wird für 6-stellige logarithmische Rechnung das Linear-machen dieser zwei Gleichungen auf dem in (54) und (55) angezeigten Weg erreicht, wobei die neben die Logarithmen gesetzten logarithmischen Differenzen sich auf +1 mm Aenderung der Seiten und +1" Aenderung der Winkel in Ein<sub>6</sub> beziehen. Diese Zahlen sind so entstanden, daß nicht nur die neben dem gebrauchten Logarithmus stehenden Logarithmen oder Diff. 10" verwendet sind, sondern bei den Zahlenlogarithmen das Zehnfache der Nachbardifferenzen durch Ablesen der *über* und *unter* dem gesuchten Logarithmus stehenden Zahlen, bei den log. sin das Zehnfache durch Abzählen, wie oft auf fünf Zeilen nach oben und nach unten die *zwei* Zahlen vorkommen, um die es sich höchstens handeln wird; z. B. steht bei log. sin  $\gamma = 9.433\ 189$  die Zahl 74 Ein<sub>6</sub> für 10", es kommt aber auf den je 5 Zeilen darüber und darunter 75 7-mal, 74 nur 3-mal vor, es ist also für 10" schärfer 74,7, für 1" 7,47 zu nehmen. Man erhält so ohne jede nennenswerte Mehrarbeit die Aenderung für 1" fast stets bis auf 1 Ein<sub>2</sub> richtig. Die Rechnung mit *allen* Zahlen für die zwei letzten Bedingungsgleichungen ist die folgende [die gemessenen Stücke siehe in (35)]:

(54)	a	4.899 306	5.50	a	4.899 306	5.50	(55)
	sin $\beta$	9.841 368	-2.18	sin $\gamma$	9.433 189	7.47	
	Z	4.740 674		Z	4.332 495		
	b	5.065 975	3.73	c	4.658 021	9.55	
	sin $\alpha$	9.674 653	3.93	sin $\alpha$	9.674 653	3.93	
	N	4.740 628		N	4.332 674		
Z : N	$w_2 = +46$	Ein <sub>6</sub>	Z : N	$w_3 = -179$	Ein <sub>6</sub>		

Die erste Bedingungsgleichung bleibt dieselbe wie in (45) und (47); das System der Koeffizienten aller drei Bedingungsgleichungen der  $v$  wird also das in (56) angegebene. Um hier wieder einmal zu zeigen, daß die Durchmultiplikation einer Bedingungsgleichung mit einer beliebigen Konstanten an der Wirksamkeit dieser Gleichung und am ganzen Ausgleichungsverfahren nichts ändert, sollen, um die Koeffizienten der drei Gleichungen einander anzunähern und somit die Rechnung etwas bequemer zu machen, die Koeffizienten von II. und III.

(56)

	$v_\alpha$	$v_\beta$	$v_\gamma$	$v_a$	$v_b$	$v_c$	$w$
I.	+1,00	+1,00	+1,00	.	.	.	-8,0
II.	-3,93	-2,18	.	+5,50	-3,73	.	+46
III.	-3,93	.	+7,47	+5,50	.	-9,55	-179
$\frac{1}{g}$	2	2	2	3	6	1	

(57)

	$v_\alpha$	$v_\beta$	$v_\gamma$	$v_a$	$v_b$	$v_c$	$w$	(k)
I.	1	1	1	.	.	.	-8,0	-1,28
II.	-0,79	-0,44	.	+1,10	-0,75	.	+9,2	-3,88
III.	-0,79	.	+1,49	+1,10	.	-1,91	-35,8	+4,36
$\frac{1}{g}$	2	2	2	3	6	1		

noch mit 5 durchdividiert werden, so daß als System sich ergibt (57), in dem rechts noch gleich die sich aus der Auflösung der in (58) angedeuteten Normalgleichungen sich ergebenden Werte der drei Korrelaten beige setzt sind, nämlich die in (59) zusammengestellten Zahlen:

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} 6,00 k_1 - 2,46 k_2 + 1,40 k_3 - 8,0 = 0 \\ \quad \quad \quad 8,64 \quad + 4,88 \quad + 9,2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 12,98 \quad - 35,8 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} k_3 = +4,36 \\ k_2 = -3,88 \\ k_1 = -1,28 \end{array} \right. (59)$$

Damit wird (60)  $[g v v] = -[w k] = 181$ ; die Ausrechnung der einzelnen  $v$  gemäß (57) liefert das System (61), aus dem nochmals zur Probe gebildet wird:

$$(61) \left\{ \begin{array}{l} v_\alpha = -3'',32 \\ v_\beta = +0'',87 \\ v_\gamma = +10'',43 \\ v_a = +1,55 \text{ mm} \\ v_b = +17,46 \text{ } \\ v_c = -8,35 \text{ } \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Summe und dazu} \\ -8'',0 = 0'',02 \\ \text{statt } 0, \end{array} \right. (62) [g v v] = 181, \text{ übereinstimmend mit (60) und auch mit (50) oder mit (39); auch die einzelnen } v \text{ stimmen}$$

innerhalb der Rechnungsgenauigkeit überein mit (51) und mit (39). Die *gleichförmige* Verteilung der 8" des Winkelschlußfehlers, die man bei dem „Näherungs-Ausgleichungsverfahren“ zuerst vorzunehmen pflegt, um erst nachher die Seitenfehler nach dem linearen Schlußfehler zu verteilen (wodurch jene gleichförmige Verteilung des  $w_\beta$  wieder zerstört wird), wird durch die *gemeinsame* Ausgleichung von Seiten und Winkeln stärker gestört, als es bei dem Näherungsverfahren zu geschehen pflegt.

9. *Anwendung des Verfahrens der Gleichungen (45) auf allgemeine Fälle: geschlossenes Polygon.* Der Grund für Annahme der zwei letzten Gleichungen (45) statt der zwei letzten Gleichungen (38) (*jene* bedeuten, um dies zu wiederholen: die Projektionen der Dreiecksseiten der vorigen Aufgabe auf zwei zueinander senkrechte Richtungen, die einer Dreiecksseite und die Richtung der zu der Seite gehörigen Höhe, müssen je = 0 sein; die zwei letzten Gleichungen (38) dagegen benützen die Projektionen der Dreiecksseiten auf zwei nicht zueinander senkrechte Richtungen) ist der, daß dieses Verfahren am einfachsten auch anwendbar und übersichtlich bleibt bei der Ausgleichung eines *mit überschüssigen Stücken gemessenen, geschlossenen Polygons* und ebenso *eines angeschlossenen Polygonzugs*.

Bleiben wir zunächst beim *geschlossenen Polygon*: Es seien in einem n-Eck alle n Winkel und alle n Seiten gemessen. Da das n-Eck durch  $(2n - 3)$  unabhängige Stücke einfach vollständig bestimmt ist (es können also unter diesen Stücken nicht alle n Winkel sein, da diese durch eine Bedingungsgleichung verbunden sind), so müssen bei Messung aller  $2n$  Stücke des Polygons 3 unabhängige Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Sie sagen aus: 1. die ausgeglichenen Winkel des Polygons müssen als Summe eine ganze Zahl mal  $180^\circ$  geben; 2. und 3. die Projektionen des mit ausgeglichenen Winkeln und Seiten konstruierten Polygons auf zwei nicht parallele und hier am besten und einfachsten *senkrecht* zueinander stehende Richtungen müssen je gleich 0 sein; d. h., es müssen die Gleichungen bestehen: (63) I.  $\Sigma \underline{\beta} = p \cdot 180^\circ$ , wo  $p = (n - 2)$  oder  $(n + 2)$ , wenn als Polygonwinkel in jedem Punkt der Winkel zwischen dem vorhergehenden Punkt links und dem folgenden Punkt rechts gilt und diese Numerierung *gegen* oder *mit* dem Uhrzeigersinn ohne Auslassung um das Polygon geht;

(64)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{II. } \Sigma (\underline{s} \cdot \cos \underline{\alpha}) = 0 \\ \text{III. } \Sigma (\underline{s} \cdot \sin \underline{\alpha}) = 0 \end{array} \right.$  wenn  $\underline{s}$  die ausgeglichenen Polygoneseiten bedeuten und  $\underline{\alpha}_k$  der mit den ausgeglichenen  $\underline{\beta}$  berechnete Richtungswinkel von  $\underline{s}_k$  in einem beliebig anzunehmenden System rechtwinkliger Koordinaten ist. Es ist auch hier gleich darauf hinzuweisen, daß zwischen dem *geschlossenen Polygon* und dem *angeschlossenen Polygonzug* kein grundsätzlicher Unterschied vorhanden ist; auch in dem letzten bestehen, wenn in allen Eckpunkten, An- und Abschlußpunkt mitgerechnet, der Polygonwinkel gemessen ist, und wenn alle Polygonseiten gemessen sind, *drei* Bedingungsgleichungen von der Form (63) und (64), wobei nur die fest gegebenen Werte der rechten Seiten dieser Gleichungen anders lauten.

Wir wollen nun die Gleichungen (63) und (64) auf das einfache Beispiel eines Vierecks anwenden, in dem alle Seiten und alle Winkel gemessen sind wie folgt (vgl. Figur 3).

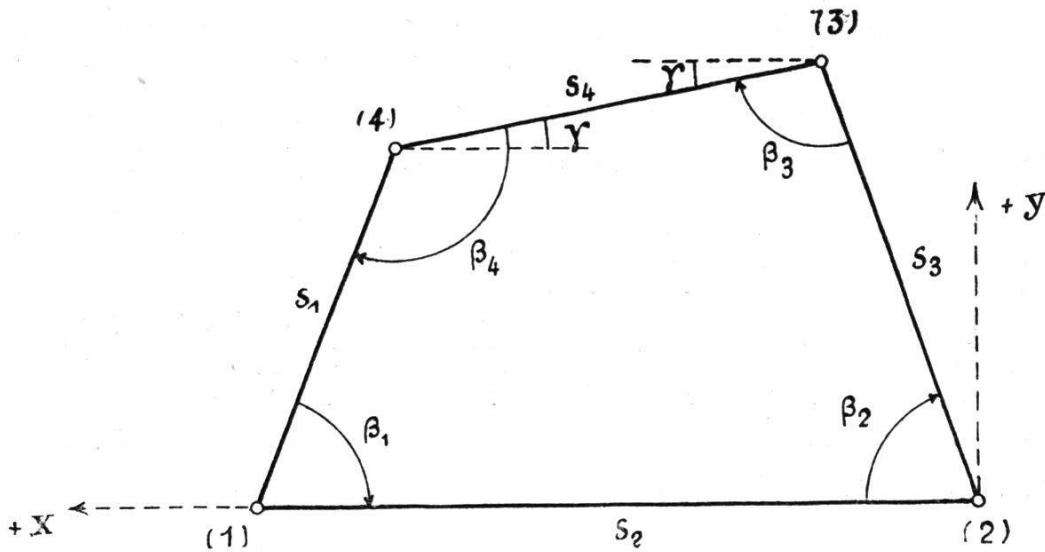


Fig. 3.

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = 97,28 \\ s_2 = 182,49 \\ s_3 = 119,79 \\ s_4 = 110,47 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \beta_1 = 68^{\circ} 08,1' \\ \beta_2 = 71^{\circ} 24,4' \\ \beta_3 = 96^{\circ} 25,2' \\ \beta_4 = 124^{\circ} 03,3' \end{array} \quad (65)$$

Bei der Längenmessung ist geschätzt worden, daß der Messung der Strecke 100 m der mittlere Fehler  $\pm 2$  cm zuzuschreiben sei, und bei der Winkelmessung, daß dem einzelnen  $\beta$  der Winkelfehler  $\pm 1/2'$  anhafte. Die *Gewichtseinheit* beziehe sich bei den Seiten auf den Fehler  $\pm 1$  cm, bei den Winkeln auf  $\pm 1'$ .



Jedes der  $\beta$  hat also das Gewicht 4; bei den Seiten wollen wir von den Gewichtsunterschieden in den Seiten 97 m, 120 m, 110 m ganz absehen, d. h. ihre mittleren Fehler zu  $\pm 2$  cm, ihre Gewichte zu  $\frac{1}{4}$  ansetzen, bei  $s_2$  als mittlern Fehler  $\pm 2\frac{1}{2}$  bis 3 cm schätzen,  $g$  zu  $\frac{1}{8}$  annehmen. Die Bedingungsgleichungen, die (63) und (64) entsprechen, können wir, wenn die zwei letzten die Projektion auf die Seite  $s_2$  und auf die dazu senkrechte Richtung ausdrücken sollen, ferner zunächst  $\gamma$  den Winkel bezeichnen, den  $s_4$  mit  $s_2$  bildet, gemäß der Figur so anschreiben:

$$\begin{aligned} (66) & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\beta}_1 + \underline{\beta}_2 + \underline{\beta}_3 + \underline{\beta}_4 - 360^\circ = 0 \\ \underline{s}_1 \cos \underline{\beta}_1 + \underline{s}_3 \cos \underline{\beta}_2 + \underline{s}_4 \cos \underline{\gamma} - \underline{s}_2 = 0 \\ \underline{s}_1 \sin \underline{\beta}_1 + \underline{s}_4 \sin \underline{\gamma} - \underline{s}_3 \sin \underline{\beta}_2 = 0 \end{array} \right. \\ (67) & \\ (68) & \end{aligned}$$

wobei noch aus der Figur entnommen wird und in die zwei letzten Gleichungen noch einzusetzen ist (69)  $\underline{\gamma} = 180^\circ - (\underline{\beta}_2 + \underline{\beta}_3)$ .

Bei einer so einfachen Figur wie einem Viereck können natürlich an sich außer den durch Projektion der Figur auf zwei Achsenrichtungen sich ergebenden zwei Bedingungsgleichungen noch eine ganze Anzahl *anderer* Beziehungen zwischen den  $s$  und den  $\beta$  verwendet werden; es mögen von ihnen angeführt werden:

$$\begin{aligned} \underline{s}_1 \underline{s}_2 \sin \underline{\beta}_1 + \underline{s}_3 \underline{s}_4 \sin \underline{\beta}_3 &= \underline{s}_2 \underline{s}_3 \sin \underline{\beta}_2 + \underline{s}_4 \underline{s}_1 \sin \underline{\beta}_4; \text{ sodann} \\ \underline{s}_2^2 + \underline{s}_3^2 - 2 \underline{s}_2 \underline{s}_3 \cos \underline{\beta}_2 &= \underline{s}_4^2 + \underline{s}_1^2 - 2 \underline{s}_4 \underline{s}_1 \cos \underline{\beta}_4, \text{ ebenso} \\ \underline{s}_1^2 + \underline{s}_2^2 - 2 \underline{s}_1 \underline{s}_2 \cos \underline{\beta}_1 &= \underline{s}_3^2 + \underline{s}_4^2 - 2 \underline{s}_3 \underline{s}_4 \cos \underline{\beta}_3. \end{aligned}$$

Indessen ist die Anwendung der obigen Gleichungen (67) und (68) jedenfalls einfacher.

Bezeichnen wir nun die gesuchten Verbesserungen der Seiten mit  $v$  und dem Index der Seite, die gesuchten Verbesserungen der Winkel mit  $v'$  und dem der Winkecke entsprechenden Akzent, womit demnach

$$(70) \left( \begin{array}{l} \underline{s}_1 = s_1 + v_1 \\ \underline{s}_2 = s_2 + v_2 \\ \underline{s}_3 = s_3 + v_3 \\ \underline{s}_4 = s_4 + v_4 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \underline{\beta}_1 = \beta_1 + v' \\ \underline{\beta}_2 = \beta_2 + v'' \\ \underline{\beta}_3 = \beta_3 + v''' \\ \underline{\beta}_4 = \beta_4 + v'''' \end{array} \right) \quad (71) \quad \begin{array}{l} \text{zu setzen ist, und also wird} \\ (72) \quad \underline{\gamma} = 180^\circ - (\beta_2 + v'' + \beta_3 + v''') \\ \qquad \qquad \qquad = 12^\circ 10,4' - v'' - v''', \end{array}$$

so erhält man durch Linearmachen der Gleichungen (67) und (68) diese in den  $v$ -Formen:

$$\begin{aligned}
 (67') \quad & s_1 \cos \beta_1 + v_1 \cos \beta_1 - s_1 \sin \beta_1 \frac{v'}{\rho} + s_3 \cos \beta_2 + v_3 \cos \beta_2 \\
 & - v_3 \sin \beta_2 \frac{v''}{\rho} + s_4 \cos \gamma + v_4 \cos \gamma + s_4 \sin \gamma \frac{v'''}{\rho} + s_4 \sin \gamma \frac{v''''}{\rho} \\
 & - s_2 - v_2 = 0. \\
 (68') \quad & s_1 \sin \beta_1 + v_1 \sin \beta_1 + s_1 \cos \beta_1 \frac{v'}{\rho} + s_4 \sin \gamma + v_4 \sin \gamma \\
 & - s_4 \cos \gamma \frac{v''}{\rho} - s_4 \cos \gamma \frac{v'''}{\rho} - s_3 \sin \beta_2 - v_3 \sin \beta_2 \\
 & - s_3 \cos \beta_2 \frac{v''}{\rho} = 0.
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die  $s_k$  in *cm*, ebenso die  $v_k$  in *cm*, die  $v^k$  in ' zu nehmen, also  $\rho = 3438'$  zu setzen. Die 5-stellige Rechnung der kein  $v$  enthaltenden Größen  $w_2$  und  $w_3$  dieser Gleichungen ist in (73) angegeben.

$s_1 \cos \beta_1 = 3\,622,9$	$s_1 \sin \beta_1 = 9\,028,1$
$s_3 \cos \beta_2 = 3\,819,5$	$s_4 \sin \gamma = 2,329,5$
$s_4 \cos \gamma = 10\,798,5$	11 357,6
$18\,240,9$	$-s_3 \sin \beta_2 = 11\,353,7$
$-s_2 = -18\,249,0$	$w_3 = +3,9$
$w_2 = -8,1$	(73)

Die Koeffizienten der  $v$  in (67') und (68') können durchaus mit dem Rechenschieber (und auch ohne Benützung einer Tabelle der natürlichen Funktionswerte  $\sin$  und  $\cos$  bei Verwendung der *S*-Teilung der Zungenrückseite) berechnet werden. Man erhält für die Koeffizienten die hier angeschriebenen Zahlen:

Gleichung (67')	Gleichung (68')
Koeff. v. $v'$ : $-\frac{s_1 \sin \beta_1}{3438} = -2,62$	Koeff. v. $v'$ : $= \frac{s_1 \cos \beta_1}{3438} = +1,05$
" " $v''$ : $\dots = -3,31 + 0,68 = -2,63$	" " $v''$ : $\dots = -3,14 - 1,11 = -4,25$
" " $v'''$ : $= s_4 \frac{\sin \gamma}{3438} = +0,68$	" " $v'''$ : $-\frac{s_4 \cos \gamma}{3438} = -3,14$
Koeff. v. $v_1$ : $\cos \beta_1 = +0,37$	Koeff. v. $v_1$ : $\sin \beta_1 = +0,93$
" " $v_2$ : $= -1,00$	" " $v_2$ : $= 0$
" " $v_3$ : $\cos \beta_2 = +0,32$	" " $v_3$ : $-\sin \beta_2 = -0,95$
" " $v_4$ : $\cos \gamma = +0,98$	" " $v_4$ : $+\sin \gamma = +0,21$
(74)	(75)

Die Zusammenstellung der Koeffizienten der Bedingungsgleichungen der  $v$  findet sich damit in (76), die Ablesung der Koeffizienten der Normalgleichungen der Korrelaten in (77). Die Auflösung der Normalgleichungen (77) gibt die Zahlen (78):



Bedingung	v'	v''	v'''	v''''	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	w	k
(76) I (a)	1	1	1	1	.	.	.	.	+1,0	(-1,22)
II (b)	-2,62	-2,63	+0,68	.	+0,37	-1,00	+0,32	+0,98	-8,1	(+0,486
III (c)	+1,05	-4,25	-3,14	.	+0,93	.	-0,95	+0,21	+3,9	(-0,487
$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	4	8	4	4		

$$(77) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{aa}{g} \right] = 1 \quad \left[ \frac{ab}{g} \right] = -1,14 \quad \left[ \frac{ac}{g} \right] = -1,58, \\ \left[ \frac{bb}{g} \right] = 16,37 \quad \left[ \frac{bc}{g} \right] = +2,54 \\ \left[ \frac{cc}{g} \right] = 14,51 \end{array} \right.$$

$$(78) \left\{ \begin{array}{l} k_3 = -0,487 \\ k_2 = +0,486 \\ k_1 = -1,22 \end{array} \right. \quad \text{Diese Zahlen sind wieder in (76) sogleich rechts beigesetzt.}$$

Es wird also  $[g v v] = -[w k] = 7,05$  (79).

Bildet man die einzelnen v, so erhält man die folgenden Werte (80):

Die v bedeuten bei den Winkeln ', bei den Seiten cm, siehe oben.

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} v' = -0',75 \\ v'' = -0',11 \\ v''' = +0',16 \\ v'''' = -0',30 \\ \hline v_1 = -1,08 \text{ cm} \\ v_2 = -3,89 \text{ } \\ v_3 = +2,47 \text{ } \\ v_4 = +1,49 \text{ } \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \Sigma + 1',0 = 0 \\ \text{sie geben quadriert} \\ \text{und je mit den zugehörigen } \frac{1}{g} \text{ dividiert} \end{array} \right.$$

$$[g v v] = 7,04 \quad (81)$$

übereinstimmend mit (79).

Rechnet man mit den *verbesserten* Winkeln und Seiten, die in (82) bis auf 0',01 in den Winkeln, auf 0,1 cm = 1 mm in den Seiten angeschrieben sind (also sachlich übertrieben genau), irgendwelche weitere Probe aus, z. B. eine der Gleichungen vor (10), so findet man keinen Widerspruch mehr. Dies muß sich auch zeigen, wenn nun die Koordinaten der Ecken in Beziehung auf irgend ein System berechnet werden, z. B. mit der Annahme :  $x_2 = y_2 = 0,000$ ;  $y_1 = 0,000$ ; R W. (2,1) =  $0^\circ 0' 00''$  also  $\alpha_2 = (1,2) = 180^\circ 0' 0''$  (d. h. der Nullpunkt des Systems in der Ecke 2, Richtung 2—1 als +x-Richtung)

$$(82) \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\beta}_1 = 68^\circ 07',35 & \underline{s}_1 = 97,269 \text{ m} \\ \underline{\beta}_2 = 71^\circ 24',29 & \underline{s}_2 = 182,451 \text{ »} \\ \underline{\beta}_3 = 96^\circ 25',36 & \underline{s}_3 = 119,815 \text{ »} \\ \underline{\beta}_4 = 124^\circ 03',00 & \underline{s}_4 = 110,485 \text{ »} \\ \hline \Sigma \underline{\beta} = 360^\circ 00',00 & \end{array} \right.$$

Es ergeben sich mit diesen verbesserten  $\beta$  und  $s$  folgende Richtungswinkel und Koordinaten:

$$(83) \left\{ \begin{array}{lll} \underline{\alpha}_1 = 291^\circ 52' 39'' & \underline{x}_2 = 0,000 & \underline{y}_2 = 0,000 \\ \underline{\alpha}_2 = 180 \text{ angenommen} & \underline{x}_3 = 38,206 & \underline{y}_3 = 113,560 \\ \underline{\alpha}_3 = 71^\circ 24' 17'' & \underline{x}_4 = 146,207 & \underline{y}_4 = 90,264 \\ \underline{\alpha}_4 = 347^\circ 49' 39'' & \underline{x}_1 = 182,451 & \underline{y}_1 = 0,000 \end{array} \right.$$

und das Viereck „schließt“ damit auf das mm genau.

Es ist hier nicht ohne Interesse, mit diesem Ergebnis unseres Vierecks zu vergleichen, was das früher (und bis heute) gebräuchliche, ja allein übliche „Näherungs“-Verfahren der Ausgleichung eines solchen überbestimmten, nämlich mit  $2n$  Stücken gemessenen Polygons liefert. Dieses Verfahren besteht bekanntlich darin, daß man in dem Polygon den Winkelwiderspruch  $w_\beta$  (Abweichung der  $\Sigma\beta$  von ihrem Sollwert) gleichförmig verteilt, sodann mit den gemessenen Seiten und den aus den „verbesserten“ Winkeln  $\beta$  sich ergebenden Richtungswinkeln die Koordinaten der Eckpunkte in dem angenommenen Achsen-system berechnet, und so den linearen Schlußfehler, zunächst getrennt  $w_x$  und  $w_y$  feststellt und diese  $w_x$  und  $w_y$  „zweckmäßig“ verteilt. In der Regel wird dann nicht weiter beachtet, daß durch die Verteilung der  $w_x$  und  $w_y$  die Richtungswinkel der einzelnen Seiten, und damit also auch die „verbesserten“ Polygonwinkel, wieder verändert werden; das Endergebnis der Rechnung sind eben nicht verbesserte Werte der  $\beta$  oder  $s$ , sondern „näherungsweise ausgeglichene“ Koordinaten der Polygonecken. Das im vorstehenden behandelte Vierecksbeispiel ist dem „Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie“ von *Hammer*, Band I, Leipzig, 1911, entnommen; Seite 438 ebenda finden sich nach Abzug von je  $0',25 = 15''$  an jedem gemessenen Winkel zur Verteilung von  $w_\beta$  und mit der Annahme  $(\alpha_2) = 180^\circ 0' 0''$  die folgenden Werte  $\alpha$  der einzelnen Richtungswinkel:  $(\alpha_1) = 291^\circ 52' 10''$ ,  $(\alpha_2) = 180^\circ 0' 0''$ ,  $(\alpha_3) = 71^\circ 24' 10''$ ,

$(\alpha_4) = 347^\circ 49' 05''$ , Werte, die von den oben in (83) berechneten endgültigen der strengen Ausgleichung in  $\alpha_1$  um  $0',5$ , in  $\alpha_4$  fast  $0',6$  abweichen. Als Koordinaten der Ecken werden damit und mit den nicht verbesserten Seiten berechnet [s. (84)]:

$$\left. \begin{array}{ll} (x_1) = 182,49 & (y_1) = 0,00 \\ (x_2) = 0,00 & (y_2) = 0,00 \\ (x_3) = 38,20 & (y_3) = 113,53 \\ (x_4) = 146,18 & (y_4) = 90,22 \end{array} \right\} (84)$$


---


$$\left. \begin{array}{ll} (x_1) = 182,41_5 & (y_1) = -0,06 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = 182,46 & y_1 = 0,00 \\ x_2 = 0,00 & y_2 = 0,00 \\ x_3 = 38,21 & y_3 = 113,56 \\ x_4 = 146,22 & y_4 = 90,26 \end{array} \right\} (85)$$

Es zeigt sich also ein Widerspruch von  $7\frac{1}{2}$  cm in der Abszisse und von 6 cm in der Ordinate, oder linear ein Schlußfehler von  $9\frac{1}{2}$  cm; die „übliche“ Verteilung dieses  $w_x$  und  $w_y$  und damit des Schlußfehlers gibt am angegebenen Orte als

endgültige Koordinaten der Ecken die Zahlen (85). Rechnet man hiernach die *nach* der „angenäherten“ Fehlerverteilung vorhandenen Richtungswinkel, so findet man (endgültig) die Werte  $\alpha_1 = 291^\circ 52', 5$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ 0' 0''$  angenommen;  $\alpha_3 = 71^\circ 24', 2$ ,  $\alpha_4 = 347^\circ 49', 6$ , also Zahlen, die mit den oben in (83) berechneten  $\alpha$  der strengen Ausgleichung gut stimmen, und ebenso zeigen sich die Seitenlängen nach der empirischen Ausgleichung durchaus innerhalb 1 cm mit (82) übereinstimmend.

Diese früher fast allgemein übliche Art der Näherungsausgleichung, erst Verteilung von  $w_\beta$ , dann Berechnung von  $w_x$  und  $w_y$  und Verteilung auch dieser Widersprüche, liefert in der Tat recht annehmbare Ergebnisse, und es ist wenig Grund dazu vorhanden, sie gemäß einem neuerdings mehrfach gemachten Vorschlage zugunsten einer andern Näherungsmethode zu ändern, die *nicht* erst  $w_\beta$  verteilt, sondern mit den nicht „verbesserten“  $\beta$  die Koordinaten der Polygonecken berechnet und die so sich zeigenden  $w_x'$ ,  $w_y'$  wegschafft.

**10. Weiteres über das strenge Verfahren in 9. Angeschlossener Polygonzug.** Wenn jenes alte Annäherungsverfahren der Ausgleichung eines Polygons verlassen werden soll, so ist das strenge Verfahren 9. an seine Stelle zu setzen. Der Rechnungsaufwand wird ja bei großer Seitenzahl des Polygons damit etwas groß, schon bei dem oben behandelten Viereck nicht ganz unbedeutend;

immerhin sind in jedem Fall eines geschlossenen  $n$ -Ecks, dessen sämtliche  $n$  Winkel und sämtliche  $n$  Seiten gemessen sind, nur *drei Bedingungsgleichungen* vorhanden, und die Berechnung der Koeffizienten der einzelnen  $v$  in den zwei letzten dieser Bedingungsgleichungen (in der ersten kommen nur die  $v$  der Winkel vor und alle Koeffizienten sind 1), nämlich in  $\Sigma (s \cdot \cos \alpha)$  soll = 0,  $\Sigma (s \cdot \sin \alpha)$  soll = 0, braucht nicht so umständlich gemacht zu werden, wie es oben in 9. absichtlich geschehen ist. Ich sehe hier auch davon ab, allgemein gültige *Regeln* zur Ableitung dieser Koeffizienten der  $v_\beta$  und der  $v_s$  in diesen zwei Projektions-Bedingungsgleichungen anzugeben; diese Regeln sind nicht allzu verwickelt, und die ganze Rechnung wird nicht allzu mühsam, wenn  $n$  nicht über 6 oder auch 8 geht. (Vergleiche zu dem bisher im Abschnitt II. Enthaltenen unter anderm auch den Aufsatz von Janko, „Die Ausgleichung von Abschlußfehlern und die Bestimmung von zulässigen maximalen Abschlußfehlern in Dreiecken und geschlossenen Polygonen“, Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, XVII, 1920, Seite 1 ff.; man kann dem Verfasser nicht überall beipflichten.)

Dagegen mag nochmals mit einigen Worten darauf hingewiesen werden, daß zwischen der strengen Ausgleichung eines *angeschlossenen Zugs* und der eines *geschlossenen Polygons* (nach 9.) gar kein grundsätzlicher Unterschied besteht. Führt der *angeschlossene Zug* von dem gegebenen Festpunkte I (z. B. Dreieckspunkt)  $(x_I \ y_I)$  als Anfangspunkt nach dem ebenfalls fest gegebenen Endpunkt II (z. B. wieder Dreieckspunkt)  $(x_{II} \ y_{II})$  und sind außer in den eigentlichen Polygonpunkten 1, 2, 3, ... auch in I und II Polygonwinkel gemessen (in I zwischen einem seitlich des Zugs in großer Entfernung weiter gegebenen Festpunkt A mit den Koordinaten  $x_a \ y_a$  und dem ersten Zugpunkt 1, in II zwischen dem letzten Zugpunkt und dem ebenso seitlich gegebenen Festpunkt B mit den Koordinaten  $x_b \ y_b$ ), so ist auch die Figur A, I, 1, 2, ... II, B, A ein *geschlossenes Polygon*, in dem *alle* Seiten gemessen oder fest gegeben ( $\overline{AB}$ ), und auch alle Polygonwinkel gemessen oder fest gegeben (die in A und B) sind. Oder wenn man nicht auf dieses *geschlossene Polygon* zurückgreifen will: Es sind auch in diesem *angeschlossenen Zug* *drei* und *nur drei* Bedingungsgleichungen für die strenge Ausgleichung vorhanden, nämlich:

I)  $\Sigma \underline{\beta}$  (die Winkel in I und II mit eingerechnet)  
 = RW. (II B) — RW. (I A) + k . 180°, wo k eine *ganze*

Zahl ist, die leicht festgestellt werden kann; ferner

II)  $\Sigma (\underline{s} \cdot \cos \underline{\alpha}) = \underline{x_{II} - x_I}$ ,      III)  $\Sigma (\underline{s} \cdot \sin \underline{\alpha}) = \underline{y_{II} - y_I}$ ,

wo die rechten Seiten dieser Gleichungen II und III ebenfalls fest gegebene Werte sind und die *ausgeglichenen* Seitenlängen mit  $\underline{s}$ , die zugehörigen ausgeglichenen RW. mit  $\underline{\alpha}$  bezeichnet werden, d. h.  $\underline{s}_k = s_k + v_k$ ,  $\underline{\alpha}_k = \alpha_k + v'^k$  gesetzt wird. Die einzige, bei *vielen* Polygonpunkten (*langen* Zügen) etwas umständliche Arbeit ist die, die Wirkung der Verbesserungen der Richtungswinkel  $\alpha$  in den Verbesserungen der Polygonwinkel  $\beta'$ ,  $\beta''$  ... auszudrücken. Schwierig aber ist die *strenge* Ausgleichung des *angeschlossenen* Polygonzugs keineswegs; auch sind stets nur *drei* Normalgleichungen aufzulösen, *drei* Korrelaten zu bestimmen. Diese strenge Ausgleichung ist deshalb von *Eggert* in der letzten Zeit mehrfach empfohlen worden. Sie setzt freilich auch noch voraus, daß man über die mittlern Fehler der Längenmessung und der Polygonwinkelmessung *a priori* gut unterrichtet ist, weil sonst die Gewichte nicht den wirklichen Verhältnissen entsprechend angesetzt werden können und deshalb die im Vergleich mit der „genäherten“ Ausgleichung vermehrte Rechenarbeit wenig lohnend erscheinen muß.

### Fiches et registres cadastraux.

Il est une question importante à étudier et qui présente la particularité d'intéresser autant les géomètres-conservateurs que les géomètres privés et que le public en général, c'est celle qui a trait au remplacement du système de registres cadastraux par celui des fiches.

Afin de démontrer plus facilement les désavantages que présente l'utilisation des registres tels qu'on les admet aujourd'hui, nous ne pouvons mieux faire que de résumer brièvement quels sont les registres qui peuvent être mis en usage en vue de la conservation.

On doit admettre tout d'abord la nécessité d'un registre, dit des numéros suivis, sur lequel on indique, pour chaque commune, la série continue et ininterrompue des parcelles dans leur