Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur

Autor(en): **Werkmeister, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **22 (1924)**

Heft 11

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-188548

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	**No. 11** des **XXII. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **11. November 1924**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur.

Von Dr.-Ing. *P. Werkmeister*, Eßlingen a. N.

Steht eine Größe y in einem bekannten Zusammenhang mit einer Größe x, und ist diese mit einem mittleren Fehler Δx behaftet, so kann man den entsprechenden mittleren Fehler Δy von y entweder analytisch oder graphisch bestimmen. Die analytische Ermittlung von Δy, bestehend in der Herleitung einer den Zusammenhang zwischen Δy und Δx zum Ausdruck bringenden *Fehlerformel*[1] setzt voraus, daß der Zusammenhang zwischen y und x in analytischer Form gegeben ist; die graphische Ermittlung von Δy erfordert, daß der Zusammenhang zwischen y und x in geometrischer Form bekannt ist. Die graphische Bestimmung des Fehlers Δy besteht im Grundgedanken in der Herstellung einer durch den gegebenen Fehler Δx bestimmten Figur, die im folgenden als *Fehlerfigur*[2] bezeichnet wird[3]. An

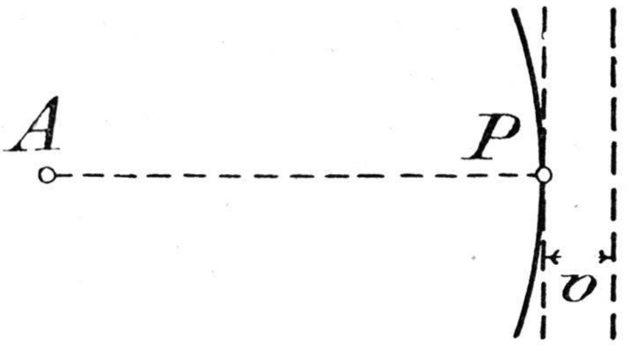
[1] Man kann solche Formeln auch als Differenzenformeln bezeichnen; sie als Differentialformeln zu bezeichnen ist nicht zu empfehlen mit Rücksicht darauf, daß es sich bei den mittleren Fehlern nicht um unendlich kleine Größen oder Differentiale, sondern um endlich kleine Größen oder Differenzen handelt.

[2] Bezeichnet man die Veränderungen von x und y nicht als Fehler, sondern als Differenzen, so kann man die Fehlerfigur als Differenzenfigur bezeichnen.

[3] Ueber graphische Fehlerbestimmung vgl. *P. Werkmeister*, Graphische Ermittlung des mittleren Fehlers einer Funktion von Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1915, Seite 113.

Hand einer solchen, auf Grund von gewissen geometrischen Näherungen sich ergebenden Fehlerfigur kann man auch in einfacher Weise die betreffenden Fehlerformeln herleiten; wie dies geschieht, soll im nachstehenden gezeigt werden[4].

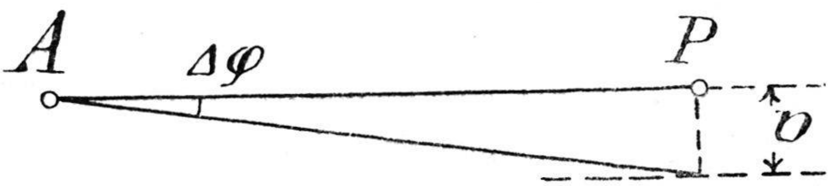
Die bei der Herstellung von „Fehlerfiguren" in Frage kommenden *geometrischen Näherungen* sind die drei folgenden:



Figur 2.

1. Liegt ein Punkt P (Figur 1) auf einem Kreis um einen Punkt A, so darf man in der näheren Umgebung von P an die Stelle des Kreises dessen Tangente in P treten lassen; einer Veränderung des Kreishalbmessers um Δ r entspricht dann eine Parallelverschiebung der Tangente um v $= \Delta$ r.

2. Liegt ein Punkt P (Figur 2) auf einer von einem Punkt A



Figur 2.

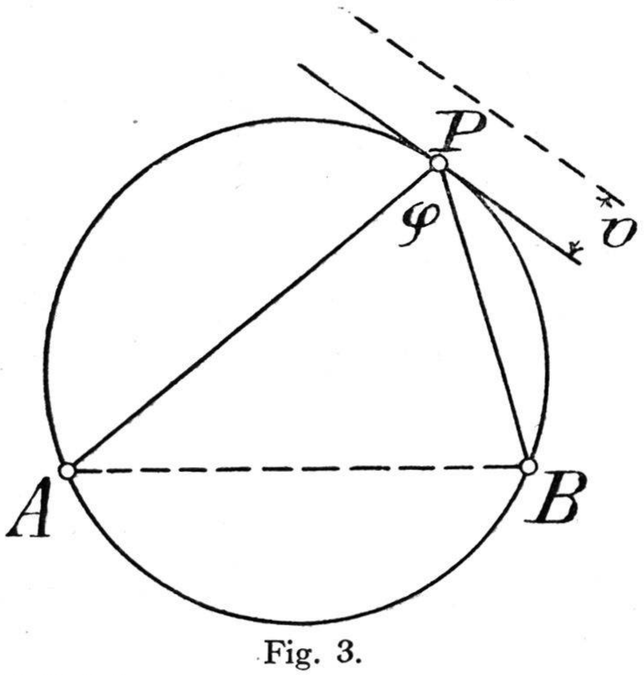


Fig. 3.

ausgehenden Geraden, und verändert man deren Richtung um einen kleinen Winkel $\Delta\ \varphi$, so darf man in der Nähe von P an die Stelle der um A gedrehten Geraden die Paɹallele zu A P treten lassen im Abstand v $= \frac{\Delta\ \varphi}{\rho}\ \overline{A\,P}$, wobei $\rho = \frac{180^0}{\pi}$ ist.

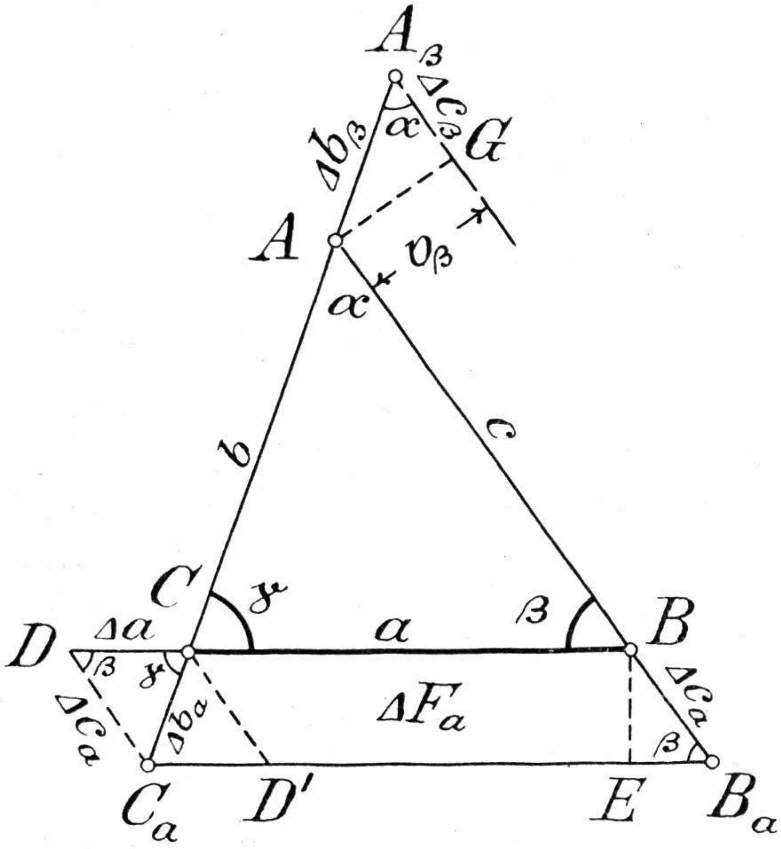
[4] Auf die Vorteile einer solchen Herleitung von Fehlerformeln ist auch hingewiesen in *F. Hartner—E. Dolezal.* Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie. 1. Band. 9. Auflage, Seite 7.

3. Liegt ein Punkt P (Figur 3) auf einem durch einen Peripheriewinkel φ bestimmten Kreis über zwei Punkten A und B, so darf man in der näheren Umgebung von P an die Stelle des Kreises dessen Tangente in P treten lassen; verändert man den Winkel φ um einen kleinen Winkel $\Delta\,\varphi$, so entspricht dem eine Parallelverschiebung der Tangente um $v = \frac{\Delta\,\varphi}{\rho}\;\frac{\overline{PA} \times \overline{PB}}{\overline{AB}}$, wobei $\rho = \frac{180^0}{\pi}$ ist.

A. *Fehlerformeln des schiefwinkligen Dreiecks*[5].

1. *Gegeben die Seite* a *und die Winkel* β *und* γ.

a) Gegeben ein Fehler $\Delta\,a$ von a; gesucht die durch $\Delta\,a$ an den Seiten b und c sowie der Fläche F hervorgerufenen Fehler $\Delta\,b_a$, $\Delta\,c_a$ und $\Delta\,F_a$.



Figur 4.

Zeichnet man an Stelle des durch die gegebenen Stücke a, β und γ bestimmten Dreiecks ABC (Fig. 4) ein neues Dreieck mit der Seite $a + \Delta\,a$ und den Winkeln β und γ, so erhält man mit $CD = \Delta a$ und $D\,C_a$ parallel A B das Dreieck $A\,B_a\,C_a$; die Unterschiede zwischen den Seiten und der Fläche dieses neuen Dreiecks und denen des Dreiecks A B C sind die zu bestimmenden Fehler $\Delta\,b_a$, $\Delta\,c_a$ und $\Delta\,F_a$. Aus der Aehnlichkeit des Fehlerdreiecks $C_a\,D\,C$ mit dem Dreieck A B C erhält man unmittelbar die Fehlerformeln

[5] Vgl. *E. Hammer.* Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 4. Auflage. Seite 425.

$$\Delta\, b_a = \frac{b}{a}\,\Delta\, a \quad \text{und} \quad \Delta\, c_a = \frac{c}{a}\,\Delta a.$$

Zieht man C D′ parallel A B, und beachtet man dann, daß die Fläche des kleinen Dreiecks C D′ C_a im Vergleich zu der des Parallelogramms B B_a D′ C vernachlässigt werden darf, so zeigt sich, daß $\Delta\, F_a$ dargestellt ist durch die Fläche des genannten Parallelogramms; für diese erhält man

$$\Delta\, F_a = a \times B\,E \text{ oder mit } B\,E = \Delta\, c_a \sin\beta$$

$$\Delta\, F_a = a \sin\beta\, \Delta\, c_a.$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von $\Delta\, c_a$ den oben gefundenen Wert, so wird

$$\Delta\, F_a = c \sin\beta\, \Delta\, a \text{ oder mit } c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\Delta\, F_a = a\,\frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha}\,\Delta\, a.$$

b) Gegeben ein Fehler $\Delta\,\beta$ an β; gesucht die durch $\Delta\,\beta$ an b, c und F hervorgerufenen Fehler $\Delta\, b_\beta$, $\Delta\, c_\beta$ und $\Delta\, F_\beta$.

Vergrößert man bei dem durch die Stücke a, β und γ bestimmten Dreieck A B C (Figur 4) den Winkel β um $\Delta\,\beta$, so entspricht dem in der näheren Umgebung von A eine Parallelverschiebung von B A um $v_\beta = \frac{\Delta\beta}{\rho}\, c$, und man erhält so an Stelle von A den Punkt A_β auf der Verlängerung von C A. Beschreibt man den Kreis um B durch A, und läßt man an Stelle dieses Kreises seine Tangente oder die Senkrechte in A zu A B treten, so ergibt sich das Fehlerdreieck A A_β G, in welchem A $A_\beta = \Delta\, b_\beta$ und A_β G $= \Delta\, c_\beta$ ist. Mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks A A_β G findet man

$$\Delta\, b_\beta = \frac{v_\beta}{\sin\alpha} \qquad \text{und} \qquad \Delta\, c_\beta = \frac{v_\beta}{\operatorname{tg}\alpha},$$

oder nach Einsetzung des oben angegebenen Wertes für v_β

$$\Delta\, b_\beta = \frac{c}{\sin\alpha}\,\frac{\Delta\,\beta}{\rho} \quad \text{und} \quad \Delta\, c_\beta = \frac{c}{\operatorname{tg}\alpha}\,\frac{\Delta\,\beta}{\rho}.$$

Setzt man noch $c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, so erhält man

$$\Delta\, b_\beta = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin^2\alpha}\,\frac{\Delta\,\beta}{\rho} \quad \text{und} \quad \Delta\, c_\beta = a\,\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,\sin\gamma}{\sin\alpha}\,\frac{\Delta\,\beta}{\rho}.$$

Der Flächenfehler ΔF_β ist dargestellt durch die Fläche des Dreiecks $A A_\beta B$ mit der Grundlinie $A B = c$ und der Höhe gleich $A G = v_\beta = \frac{\Delta \beta}{\rho} c$; es ist somit

$$\Delta F_\beta = \frac{1}{2} c^2 \frac{\Delta \beta}{\rho} \text{ oder mit } c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\Delta F_\beta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} \frac{\Delta \beta}{\rho}.$$

c) Gegeben ein Fehler $\Delta \gamma$ an γ; gesucht die durch $\Delta \gamma$ an b, c und F hervorgerufenen Fehler Δb_γ, Δc_γ und ΔF_γ.

Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar

$$\Delta b_\gamma = a \frac{\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \frac{\Delta \gamma}{\rho}, \quad \Delta c = a_\gamma \frac{\sin \beta}{\sin^2 \alpha} \frac{\Delta \gamma}{\rho}$$

$$\text{und } \Delta F_\gamma = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \frac{\Delta \gamma}{\rho}.$$

2. *Gegeben die beiden Seiten* b *und* c *und ihr eingeschlossener Winkel* α.

a) Gegeben ein Fehler Δb von b; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δa_b, $\Delta \beta_b$, $\Delta \gamma_b$ und ΔF_b der Seite a, der Winkel β und γ und der Fläche F.

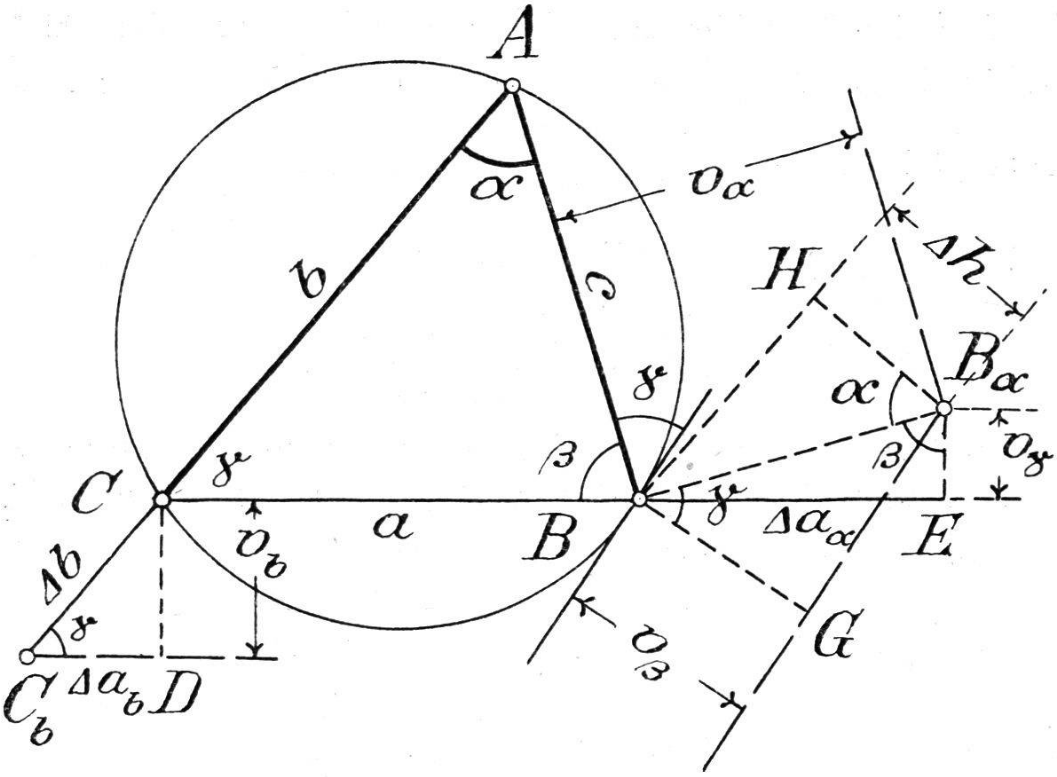
Läßt man in dem Dreieck A B C (Figur 5) nur die Seite b um Δb zunehmen, so erhält man ein Dreieck $A B C_b$, bei dem die Seite $B C_b$ in der Nähe von C_b parallel zu B C angenommen werden darf. Beschreibt man den Kreis um B durch C, und setzt man an Stelle dieses Kreises seine Tangente in C, so erhält man das rechtwinklige Fehlerdreieck $C D C_b$, in dem $D C_b = \Delta a_b$ und $C D = v_b = \frac{\Delta \beta_b}{\rho} a$; damit ergeben sich die Fehlerformeln

$$\Delta a_b = \Delta b \cos \gamma \text{ und } \Delta \beta_b = \frac{v_b}{a} \rho = \frac{\sin \gamma}{a} \rho \Delta b.$$

Da $\Delta \gamma_b = -\Delta \beta_b$, so ist $\Delta \gamma_b = -\frac{\sin \gamma}{a} \rho \Delta b$.

Der Flächenfehler ΔF_b ist dargestellt durch die Fläche des Dreiecks $B C_b C$; es ist somit

$$\Delta F_b = \frac{1}{2} a v_b \text{ oder mit } v_b = \Delta b \sin \gamma$$



Figur 5.

$$\Delta F_b = \frac{1}{2}\, a \sin\gamma\, \Delta b.$$

Setzt man noch $a \sin\gamma = c \sin\alpha$, so findet man

$$\Delta F_b = \frac{1}{2}\, c \sin\alpha\, \Delta b.$$

b) Gegeben ein Fehler Δc; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δa_c, $\Delta \beta_c$, $\Delta \gamma_c$ und ΔF_c von a, β, γ und F.

Aus dem Vorstehenden erhält man unmittelbar

$$\Delta a_c = \Delta c \cos\beta,$$

$$\Delta \beta_c = -\frac{\sin\beta}{a}\, \rho\, \Delta c, \quad \Delta \gamma_c = \frac{\sin\beta}{a}\, \rho\, \Delta c$$

$$\text{und } \Delta F_c = \frac{1}{2}\, b \sin\alpha\, \Delta c.$$

c) Gegeben ein Fehler $\Delta\alpha$; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δa_α, $\Delta \beta_\alpha$, $\Delta \gamma_\alpha$ und ΔF_α von a, β, γ und F.

Vergrößert man nur den Winkel α um $\Delta\alpha$, so geht das Dreieck A B C (Figur 5) über in das Dreieck A B_α C; dabei erhält man den Punkt B_α auf Grund der oben angegebenen Näherungen als Schnittpunkt der Senkrechten zu A B in B mit der Parallelen zu A B im Abstand $v_\alpha = \frac{\Delta\,\alpha}{\rho}\,c$. Fällt man von B_α das dem Kreis um C entsprechende Lot $B_\alpha\,E$ auf C B, so sind in dem rechtwinkligen Fehlerdreieck $B\,B_\alpha\,E$ die Katheten B E $= \Delta\,a_\alpha$ und $B_\alpha\,E = v_\gamma = \frac{\Delta\,\gamma_\alpha}{\rho}\,a$; es ist somit

$$\Delta\,a_\alpha = v_\alpha \sin\beta \text{ und } v_\gamma = v_\alpha \cos\beta$$

$$\text{oder mit } v_\alpha = \frac{\Delta\,\alpha}{\rho}\,c \text{ und } v_\gamma = \frac{\Delta\,\gamma_\alpha}{\rho}\,a$$

$$\Delta\,a_\alpha = c\,\sin\beta\,\frac{\Delta\,\alpha}{\rho} = b\,\sin\gamma\,\frac{\Delta\,\alpha}{\rho}$$

$$\text{und } \Delta\,\gamma_\alpha = -\frac{c}{a}\cos\beta\,\Delta\,\alpha.\text{[6]}$$

Den Fehler $\Delta\,\beta_\alpha$ erhält man entweder als Differenz von $\Delta\,\alpha$ und $\Delta\,\gamma_\alpha$ oder mit Hilfe von v_β; dabei ist v_β der Abstand der beiden parallel anzunehmenden Tangenten in B und B_α an die Umkreise der Dreiecke A B C und $A\,B_\alpha\,C$. In dem rechtwinkligen Dreieck $B\,B_\alpha\,G$ ist $v_\beta = v_\alpha \cos\gamma$, ferner ist nach der in der Einleitung angegebenen Formel $v_\beta = \frac{\Delta\,\beta_\alpha}{\rho}\frac{a\,c}{b}$; hieraus ergibt sich, wenn man noch beachtet, daß $v_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\rho}\,c$ ist

$$\Delta\,\beta_\alpha = -\frac{b}{a}\cos\gamma\,\Delta\,\alpha.\text{[6]}$$

Auf Grund der für $\Delta\,\beta_\alpha$ und $\Delta\,\gamma_\alpha$ gefundenen Werte erhält man zur Probe $\Delta\,\beta_\alpha + \Delta\,\gamma_\alpha = \frac{b}{a}\cos\gamma\,\Delta\,\alpha + \frac{c}{a}\cos\beta\,\Delta\,\alpha = \frac{b\cos\gamma + c\cos\beta}{a}\,\Delta\,\alpha$ oder da $b\cos\gamma + c\cos\beta = a$ ist, $\Delta\,\beta_\alpha + \Delta\,\gamma_\alpha = \Delta\,\alpha$.

Den Flächenunterschied $\Delta\,F_\alpha$ der Dreiecke A B C und $A\,B_\alpha\,C$ erhält man aus $\Delta\,F_\alpha = \frac{1}{2}\,b\,\Delta\,h$, wobei $\Delta\,h$ der zu b als gemeinsamer Grundlinie gehörige Unterschied der Höhen der beiden Dreiecke ist; dabei liest man in dem rechtwinkligen

[6] Das Minuszeichen deutet an, daß bei zunehmendem Winkel α der Winkel γ abnimmt.

Dreieck B_α B H mit der Kathete B H parallel A C für Δ h den Wert $\Delta h = v_\alpha \cos \alpha$ ab. Hiermit findet man

$$\Delta F_\alpha = \frac{1}{2} b\, v_\alpha \cos \alpha \text{ oder mit } v_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\rho} c$$

$$\Delta F_\alpha = \frac{1}{2} b\, c \cos \alpha \frac{\Delta \alpha}{\rho}.$$

3. *Gegeben die Seiten* a *und* b, *und der Gegenwinkel* α *von* a.

a) Gegeben ein Fehler Δ a von a; gesucht die durch Δ a an der Seite c, den Winkeln β und γ und der Fläche F verursachten Fehler Δc_a, $\Delta \beta_a$, $\Delta \gamma_a$ und ΔF_a.

Läßt man in dem Dreieck A B C (Figur 6) ohne b und α zu ändern die Seite a um Δ a zunehmen, so erhält man das Dreieck A B_a C, dessen Ecke B_a auf der Verlängerung von A B und auf dem Kreis um C mit Halbmesser $CD = a + \Delta a$ oder dem Lot in D auf C B liegt. In dem rechtwinkligen Fehlerdreieck B_a B D ist $B B_a = \Delta c_a$ und $B_a D = v_\gamma = \frac{\Delta \gamma_a}{\rho} a$; damit ergeben sich die Fehlerformeln

$$\Delta c_a = \frac{\Delta a}{\cos \beta} \quad \text{und} \quad v_\gamma = \Delta a \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta \gamma_a}{\rho} a \quad \text{oder}$$

$$\Delta \gamma_a = \frac{\operatorname{tg} \beta}{a} \rho\, \Delta a.$$

Wenn bei unverändertem Winkel α der Winkel γ um $\Delta \gamma_a$ zunimmt, so nimmt β um denselben Betrag ab; es ist somit

$$\Delta \beta_a = -\frac{\operatorname{tg} \beta}{a} \rho\, \Delta a.$$

Der Flächenunterschied ΔF_a der Dreiecke A B C und A B_a C ist dargestellt durch die Fläche des Dreiecks B B_a C mit der Grundlinie a und der Höhe v_γ; es ist somit

$$\Delta F_a = \frac{1}{2} a\, v_\gamma \quad \text{oder mit} \quad v_\gamma = \Delta a \operatorname{tg} \beta$$

$$\Delta F_a = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \beta\, \Delta a.$$

(Schluß folgt.)