

Kartengenauigkeit

Autor(en): **Cueni, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **25 (1927)**

Heft 10

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-190207>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule (beurl.). — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats	No. 10 des XXV. Jahrganges der „Schweiz. Geometerzeitung“.	Abonnemente: Schweiz . . . Fr. 12.— jährlich Ausland . . . „ 15.— „
Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile	11. Oktober 1927.	Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Kartengenauigkeit.

Von *B. Cueni*, Ingenieur.

Jede Karte ist als Erzeugnis menschlicher Tätigkeit infolge der Unvollkommenheit der Sinne und Instrumente fehlerhaft. Die Maße ihrer Genauigkeit abzuleiten, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Um die Untersuchung nicht über das Gebiet der Kartographie hinaus auszudehnen, wird eine Begrenzung des Problems vorgenommen in dem Sinne, daß das Original in großem Maßstab, aus dessen Reduktion die zu untersuchenden Karten erhalten wurden, als fehlerfrei betrachtet wird. Damit sind die Fehler, die jeder Landesaufnahme anhaften, und über deren Größe zahlreiche Untersuchungen Aufschluß geben, ausgeschaltet. Als Fehler im Sinne dieser Abhandlung gelten somit die Differenzen zwischen Original und Karte.

Die nachfolgenden Ausführungen stellen einen Versuch dar, sowohl die zufälligen als auch die systematischen Fehler (man denke beispielsweise an den Papiereingang) zu ermitteln, um hierauf die Frage nach der Genauigkeit von auf der Karte erhobenen Ausmessungen (Distanzen, Azimute) zu beantworten. Die dabei auftretenden Ausgleichsrechnungen erfolgen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Es wird vorausgesetzt, daß die zu untersuchenden Karten das rechtwinklige, ebene Koordinatennetz (Kilometernetz) tragen, wie das bei den neuern Ausgaben offizieller schweizerischer Kartenwerke der Fall ist. Das Gradnetz kann in den den schweizerischen Karten zugrunde gelegten Projektionen nicht verwendet werden. Wohl aber eignen sich für derartige Genauigkeitsuntersuchungen die Gradnetze derjenigen Karten, die in normaler Zylinderprojektion entworfen worden sind, da in diesen die Meridiane und Parallelkreise rechtwinklig sich schneidende gerade Linien sind.

A. Netzpunktgenauigkeit und Netzverzerrung.

Das Kilometernetz wird neben dem zufälligen Fehler der Netzknotenpunkte auch zwei systematischen Fehlereinflüssen unterworfen sein:

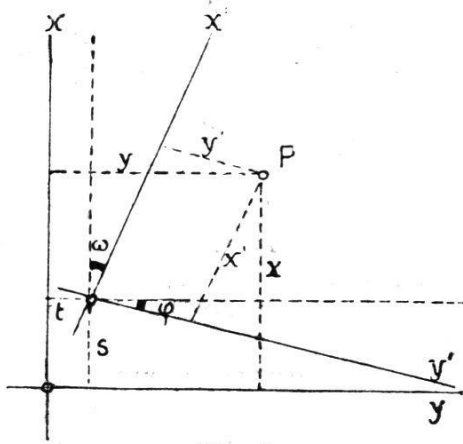


Fig. 1.

Der Längenverzerrung in den Axenrichtungen und der Anorthogonalität. Als Hilfsmittel, diese Fehler des Netzes zu bestimmen, kommt der Koordinatograph in Frage, mit dem alle Netzknotenpunkte aufgenommen werden. In Figur 1 sind die Verhältnisse veranschaulicht. Die gestrichelten Koordinaten sind der Karte, die andern dem Koordinatographen zugehörig. t , s und ω sind Orientierungsunbekannte der beiden Koordinatensysteme und nur von untergeordnetem Interesse, $(\omega - \varphi)$, die Abweichung vom rechten Winkel, sowie die Längenverzerrungen n und m in den Axenrichtungen die eigentlichen Unbekannten, deren Kenntnis erwünscht ist. Die Transformationsformeln für diese beiden Koordinatensysteme lauten:

$$\left. \begin{aligned} y &= t + y' \cdot \cos \varphi + x' \cdot \sin \omega \\ x &= s - y' \cdot \sin \varphi + x' \cdot \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei ω den Winkel zwischen den x -Achsen, φ denjenigen zwischen den y -Achsen bezeichnen möge. Sind ferner n und m die Längenverzerrungen in der y' - und x' -Richtung, so hat man

$$\left. \begin{aligned} y &= t + y' \cdot n \cdot \cos \varphi + x' \cdot m \cdot \sin \omega \\ x &= s - y' \cdot n \cdot \sin \varphi + x' \cdot m \cdot \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für jeden Netzknotenpunkt ergibt sich ein solches Gleichungspaar mit den sechs Unbekannten

$$s, t, \omega, \varphi, m, n$$

Fehlerhaft sind die Netzknotenpunkte, somit ihre Koordinaten y' , x' , und diese sollen nun als Beobachtungen aufgefaßt werden. Die Ablesungen am Koordinatographen (y , x) sind als fehlerfrei zu betrachten, wenn man zu einer Lösung dieser Ausgleichungsaufgabe gelangen will.

Zur Berechnung der Näherungswerte der Unbekannten sind die Gleichungen (2) günstiger als die nach y' und x' aufgelösten Beobachtungsgleichungen. Man findet sie aus den Gleichungsparen dreier Punkte wie folgt:

$$\begin{aligned} y + x &= (t + s) + y' \cdot n \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi) + x' \cdot m \cdot (\sin \omega + \cos \omega) & (3 \text{ Gl.}) \\ y - x &= (t - s) + y' \cdot n \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) + x' \cdot m \cdot (\sin \omega - \cos \omega) & (3 \text{ Gl.}) \end{aligned}$$

In vereinfachter Form:

$$\left. \begin{aligned} (y + x) &= A + y' \cdot B + x' \cdot C \\ (y - x) &= D + y' \cdot E + x' \cdot F \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aus den ersten drei Gleichungen rechnet man mit geringer Mühe die neuen Unbekannten A , B , C , aus den letzten D , E , F , die hierauf

in der folgenden Weise zur Bestimmung der Unbekannten $t, s, \varphi, \omega, n, m$ verwertet werden.

$$t = \frac{A + D}{2}, \quad s = \frac{A - D}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E - B}{E + B}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{C + F}{C - F}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} (B^2 + E^2)}, \quad m = \sqrt{\frac{1}{2} (C^2 + F^2)}$$

In den Ausdrücken für n und m hat natürlich nur das positive Vorzeichen einen Sinn.

Aus (2) findet man mit leichten Umformungen, die hier übergangen werden, die Beobachtungsgleichungen

$$y' = \frac{(y - t) \cos \omega - (x - s) \sin \omega}{n \cdot \cos (\omega - \varphi)} = \frac{Z}{N}$$

$$x' = \frac{(y - t) \cdot \sin \varphi + (x - s) \cos \varphi}{m \cdot \cos (\omega - \varphi)} = \frac{Z'}{N'}$$

Diese beiden Ausdrücke müssen noch auf lineare Form gebracht werden, was im Nachfolgenden nach Taylor geschieht. Den Näherungswerten $s_0, t_0, \omega_0, \varphi_0, n_0, m_0$ seien die plausibelsten Verbesserungen $\sigma, \tau, \Omega, \Phi, \nu, \mu$ zugeordnet.

$$y' = \frac{Z_0}{N_0} - \frac{\cos \omega_0}{N_0} \cdot \tau + \frac{\sin \omega_0}{N_0} \cdot \sigma +$$

$$\frac{N_0 \left\{ -(y - t_0) \sin \omega_0 - (x - s_0) \cos \omega_0 \right\} + n \cdot \sin (\omega_0 - \varphi_0) Z_0}{N_0^2} \cdot \Omega$$

$$- \frac{Z_0 \cdot n_0 \sin (\omega_0 - \varphi_0)}{N_0^2} \cdot \Phi - \frac{Z_0 \cdot \cos (\omega_0 - \varphi_0)}{N_0^2} \cdot \nu.$$

$$y' \cdot N_0 = Z_0 - \cos \omega_0 \cdot \tau + \sin \omega_0 \cdot \sigma - \left\{ (y - t_0) \cdot \sin \omega_0 + \right.$$

$$\left. (x - s_0) \cos \omega_0 - \operatorname{tg} (\omega_0 - \varphi_0) Z_0 \right\} \cdot \Omega - \operatorname{tg} (\omega_0 - \varphi_0) Z_0 \cdot \varphi - \frac{Z_0}{n_0} \nu.$$

$$x' = \frac{Z'_0}{N'_0} - \frac{\sin \varphi_0}{N'_0} \cdot \tau - \frac{\cos \varphi_0}{N'_0} \cdot \sigma + \frac{Z'_0 \cdot m_0 \cdot \sin (\omega_0 - \varphi_0)}{N'_0{}^2} \cdot \Omega +$$

$$\frac{N'_0 \left\{ (y - t_0) \cos \varphi_0 - (x - s_0) \sin \varphi_0 \right\} - m_0 \cdot \sin (\omega_0 - \varphi_0) Z'_0}{N'_0{}^2} \cdot \Phi$$

$$- \frac{Z'_0 \cdot \cos (\omega_0 - \varphi_0)}{N'_0{}^2} \cdot \mu.$$

$$x' N'_0 = Z'_0 - \sin \varphi_0 \cdot \tau - \cos \varphi_0 \cdot \sigma + \operatorname{tg} (\omega_0 - \varphi_0) \Omega + \left\{ (y - t_0) \cos \varphi_0 \right.$$

$$\left. - (x - s_0) \sin \varphi_0 - \operatorname{tg} (\omega_0 - \varphi_0) Z'_0 \right\} \cdot \Phi - \frac{Z'_0}{m_0} \cdot \mu.$$

Einfacher geschrieben hat man nun folgende Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{aligned} v_{y'} &= (y_0' - y') - \frac{a}{N_0} \cdot \tau + \frac{b}{N_0} \cdot \sigma - \frac{c}{N_0} \cdot \Omega - \frac{d}{N_0} \cdot \phi - \frac{e}{N_0} \cdot \nu. \\ v_{x'} &= (x_0' - x') - \frac{a'}{N_0'} \cdot \tau - \frac{b'}{N_0'} \cdot \sigma + \frac{c'}{N_0'} \cdot \Omega + \frac{d'}{N_0'} \cdot \phi - \frac{f'}{N_0'} \cdot \mu. \end{aligned} \right\} (4)$$

Die Vergleichung mit obenstehenden Formeln zeigt die Bedeutung der Koeffizienten $\frac{a}{N_0}, \frac{b}{N_0}, \dots, \frac{a'}{N_0'}, \frac{b'}{N_0'}, \dots$, deren Berechnung sich

außerordentlich einfach gestalten läßt, wenn man den Koordinatographen dem Kartennetz gut anpaßt, die Koordinatensysteme also nahezu zusammenfallen läßt. $\sin \omega_0, \sin \varphi_0$ und $\operatorname{tg}(\omega_0 - \varphi_0)$ werden wenig von Null, $\cos \omega_0, \cos \varphi_0$ wenig von Eins verschieden sein, was die logarithmische Berechnung überflüssig und die Anwendung des Rechenschiebers auf der ganzen Linie möglich macht. Da N_0 und N_0' wenig von Eins abweichen, bieten auch sie keine Schwierigkeiten.

Aus den Fehlergleichungen (4) werden nun in der üblichen Weise die Normalgleichungen hergeleitet und die letzteren nach dem Gaußschen Algorithmus aufgelöst. Die ermittelten plausibelsten Verbesserungen liefern dann mit den Näherungswerten die definitiven Werte für die Unbekannten:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \tau & , & & \varphi &= \varphi_0 + \Phi \\ s &= s_0 + \sigma & , & & n &= n_0 + \nu \\ \omega &= \omega_0 + \Omega & , & & m &= m_0 + \mu \end{aligned} \quad (5)$$

Man hat nun nicht nur über Orientierung und Verzerrung des Kartennetzes Aufschluß, sondern es ergibt sich bei einer kleinen Ueberlegung weiter der mittlere Fehler der Netzkpunkte in den Axenrichtungen, der im mittleren Gewichteinheitsfehler nach der Ausgleichung zu erblicken ist (m_1).

Mit (5) kennt man das Koordinatensystem, das dem vorliegenden gedruckten auf der Karte am besten angepaßt ist; es ist ein schiefwinkliges mit verschiedenen Längenverzerrungen in den beiden Axenrichtungen. Man ist auch in der Lage, zu jedem Netzkpunkt auf der Karte die Verbesserungen der ausgewerteten Fehlergleichungen zuzufügen, um zum Netzkpunkt des am besten sich anschmiegenden Systems zu gelangen.

Beispiele: Diese Untersuchung des Netzes wurde an zwei neuen Karten, die das Gebiet der Gemeinden Wallenstadt und Flums in den Maßstäben 1 : 25 000 und 1 : 40 000 umfassen, und die auf photo-mechanischem Wege als Kartenproben erstellt wurden, angewendet. Nachstehend folgen die Ergebnisse.

Anzahl der Netzschnittpunkte	. . .	60
„ „ Fehlergleichungen	. . .	120
„ „ Normalgleichungen	. . .	6

Maßstab	$m,$	$\epsilon = (\omega - \varphi)$	n	m
1 : 25 000	± 0.012 cm	$-1'55'' \pm 25''$	0.9986 ± 0.00009	0.9985 ± 0.00008
1 : 40 000	± 0.009 cm	$+0'56'' \pm 30''$	0.9994 ± 0.00011	0.9996 ± 0.00010

Für $(\omega - \varphi)$ muß der mittlere Fehler nach $M^2 = m^2\omega + m^2\varphi$ noch berechnet werden, da nur die mittleren Fehler von ω und φ aus der Ausgleichung hervorgehen.

$$1 : 25\ 000 \quad M(\omega - \varphi) = \pm\sqrt{17^2 + 18^2} = \pm 25''$$

$$1 : 40\ 000 \quad M(\omega - \varphi) = \pm\sqrt{20^2 + 22^2} = \pm 30''$$

B. Genauigkeit der Punktlage bezüglich des Netzes.

Dabei handelt es sich um die Ermittlung des Unterschiedes der Lagen im umgebenden Netzquadrat entsprechender, leicht und eindeutig definierbarer Punkte in Original und Karte. Sind x, y die Koordinaten eines Punktes im Original, bezogen auf das umgebende Netzquadrat, x', y' diejenigen des entsprechenden Punktes in der Karte, so kann aus n Punkten durch Bildung der Unterschiede $\epsilon_x = x - x', \epsilon_y = y - y'$ der mittlere Fehler nach den Formeln

$$m'_x = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon_x \epsilon_x]}{n}}, \quad m'_y = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon_y \epsilon_y]}{n}}$$

für jede der beiden Axenrichtungen gerechnet werden, der uns, da der Zeichner keine Richtung bevorzugt, das Maß der Punktgenauigkeit in beliebiger Richtung in bezug auf das Netz darstellt. An seinem Zustandekommen wirken sowohl der Kartenzeichner (oder Stecher, Lithograph) als auch die Reproduktion (Druck) mit. Fehler aus Maßstabänderungen werden in der Weise ausgeschaltet, daß die erhobenen Koordinaten auf den Sollwert der Netzquadratseiten ausgeglichen werden.

Die Ausmessungen geschehen am besten mit Transversal-Glastafeln, die auf Hundertstelsmillimeter abzulesen gestatten. Die aus dem Original 1 : 10 000 erhobenen Maße können bei Annahme eines mittleren Messungsfehlers von $\frac{2}{100}$ Millimetern als fehlerfrei, die der Karten als nur wenig beeinflußt angesehen werden. Da aber die ϵ für die Berechnung des mittleren Fehlers nur in ganzen Metern anzugeben sind, ist eine Berücksichtigung des Messungsfehlers mit der Glastafel wegzulassen. Man kann sich übrigens unter Benutzung der Formel $m'^2 = m_{Gl}^2 + m_K^2$ leicht darüber Rechenschaft geben, daß m' durch den mittleren Messungsfehler m_{Gl} nicht fühlbar beeinflußt wird.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei den farbigen Druckplatten (rot, grün, blau, braun), da sich hier zu den Fehlern ϵ noch der systematische Fehler s der Druckplattenverschiebung beigesellt. Diese Verschiebung aus den wenigen farbigen und den schwarzen Netzschmittpunkten zu bestimmen, wird zu ungenau ausfallen. Ihre Er-

mittlung geschieht am besten indirekt aus den Lagedifferenzen v entsprechender Punkte (wie für die Schwarzplatte) durch Summation der v und Division durch die Anzahl der Punkte n :

$$\frac{[v]}{n} = \frac{[\epsilon + s]}{n} = \frac{[\epsilon]}{n} + \frac{n \cdot s}{n}, \quad \text{wobei } \frac{[\epsilon]}{n} = 0 \text{ wird.}$$

Außer dem wahrscheinlichsten Wert der Verschiebung s erhält man die vom systematischen Fehler befreiten Lagedifferenzen, aus denen sich der mittlere Fehler leicht berechnen läßt $\left(m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n-1}} \right)$.

Nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchungen an Karten des Gebietes Wallenstadt-Flums in drei verschiedenen Maßstäben. Dazu ist noch zu bemerken, daß die den fünf Originalblättern entsprechenden Teile, aus denen sich jedes Kartenblatt zusammensetzt, getrennt behandelt sind und die für jedes von ihnen ermittelten mittleren Fehler nach der Formel für die Zusammenfassung derselben zu den Schlußwerten der Tabelle führen. Entsprechend diesen Zusammensetzungen der Karten aus fünf Teilen ergeben sich natürlich verschiedene Plattenverschiebungen, deren maximale für jeden Maßstab und jede Farbe angeführt ist.

Mittlere Fehler und maximale Druckplattenverschiebungen in den Axenrichtungen (in Metern).

Maßstab	schwarz		rot		grün		blau		braun	
	Zuf.	Syst.	z.	s.	z.	s.	z.	s.	z.	s.
1:25.000 m ¹	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
	2.4	—	2.6	— 5.1	2.6	+5.2	3.0	+10.5	2.7	+6.2
1:40.000 m ¹	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
	3.6	—	3.8	— 9.1	3.5	—4.9	3.8	+ 6.5	3.4	+6.2
1:50.000 m ¹	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
	5.0	—	3.8	—18.1	3.5	+5.9	5.5	+ 6.3	3.3	—8.7

m' = mittlerer Punktfehler in beliebiger Richtung, bezogen auf das Netz.

Die mittleren Fehler der einzelnen Farbplatten stimmen nicht in jedem Maßstab gut überein, was sich daraus erklären läßt, daß nicht alle systematischen Bestandteile ausgeschieden sind, so der Fehler aus dem bewußten Miteinbeziehen der starken Lageänderung von Objekten an den Straßen (weil Straßen verbreitert dargestellt sind), der Einfluß der verschiedenen Zeichner und verschiedenen Bedingungen für die Zeichnungsausführung. Im Maßstab 1 : 50 000 treten diese Fehlereinflüsse besonders deutlich in Erscheinung. Die Karte 1 : 50 000 wurde im selben großen Maßstab wie 1 : 40 000 gezeichnet und dann photographisch verkleinert, sollte also den gleichen mittleren Fehler (in Metern) aufweisen. Dies trifft bei der roten, grünen und braunen Platte

zu, nicht aber bei der schwarzen und blauen. Während bei der schwarzen Druckplatte die oben genannten Fehlerquellen in Frage kommen, kann man sich bei der blauen Platte ohne die genaue Kenntnis ihrer Entstehung bloß Mutmaßungen über den Grund des größeren mittleren Fehlers hingeben.

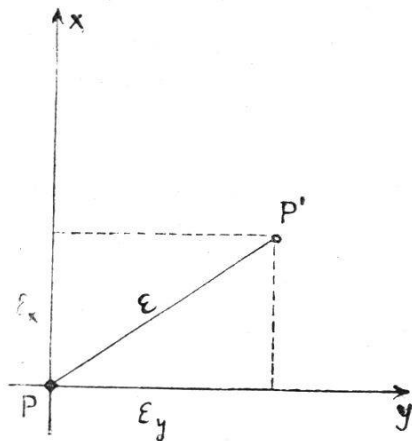
Die Anzahl der Punkte, die zur Bestimmung der Werte obestehender Tabelle diene, ist für

	schwarz	rot	grün	blau	braun
1 : 25 000	48	71	32	19	35
1 : 40 000	62	72	45	54	35
1 : 50 000	55	63	34	43	33

Eine willkommene Vergleichung gestatten die auf jeder Karte dargestellten trigonometrischen Punkte, die einen mittleren Fehler liefern, der auch die Fehler des Originals umfaßt. Er beträgt für

1 : 25 000	±2.1 m
1 : 40 000	±3.9 m
1 : 50 000	±5.1 m

Die Uebereinstimmung ist eine recht befriedigende, wenn man in Betracht zieht, daß diese mittleren Fehler aus der geringen Anzahl von 16—21 trigonometrischen Punkten berechnet sind.



Der mittlere Punktfehler in der Ebene. Die durch Messung bestimmten ϵ_x, ϵ_y der vorausgehenden Betrachtung sind die Projektionen der Punktabweichungen von der Soll-lage auf willkürlich gewählte Richtungen (Axenrichtungen des Koordinatensystems). In nebenstehender Figur sei P der Punkt des fehlerfrei angenommenen Originals, P' der entsprechende Punkt der Karte. Es ist nun ohne weiteres ersichtlich, daß der mittlere Punktfehler in der Ebene (zum Unterschied des mittleren Punktfehlers in einer Richtung)

sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$m'_E = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon_x \epsilon_y] + [\epsilon_y \epsilon_y]}{n}}$$

Er nimmt mit Beschränkung auf die schwarze Druckplatte folgende Werte an:

1 : 25 000	±3.5 m
1 : 40 000	±5.1 m
1 : 50 000	±7.0 m

(Schluß folgt.)

Die Vorschläge für eine neue Landeskarte.

Von Dr. M. Zeller, Ingenieur, Bern.

Seit Jahren schon wird von einer neuen Landeskarte gesprochen, ohne daß es bisher gelungen wäre, die Wünsche der verschiedenen