

Einführung in die Vektorrechnung und die vektorielle Ausgleichung [Fortsetzung]

Autor(en): **Baeschlin, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **26 (1928)**

Heft 8

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-190802>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule (beurl.). — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats	No. 8 des XXVI. Jahrganges der „Schweiz. Geometerzeitung“.	Abonnemente: Schweiz . . . Fr. 12.— jährlich Ausland . . . „ 15.— „
Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile	14. August 1928	Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Einführung in die Vektorrechnung und die vektorielle Ausgleichung.

Von Prof. F. Baeschlin.

(Fortsetzung.)

Wenn wir den Anfangspunkt des Vektors als fest annehmen, so kommen nur die Aenderungen *b*) und *c*) in Betracht. Der Endpunkt des Vektors erleidet bei gleichzeitigem Auftreten dieser beiden Aenderungen eine vektorielle Verschiebung, die wir nun untersuchen wollen.

Eine differentielle Streckung des Vektors \mathfrak{A} kommt auf eine differentielle Aenderung des Betrages *A*, d. i. dA hinaus, wobei aber die Streckung ein Vektor mit der Richtung von \mathfrak{A} , oder gleichbedeutend von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist.

Die differentielle Streckung ist daher

$$dA \cdot \overline{\mathfrak{A}}.$$

Eine reine Drehung des Vektors \mathfrak{A} um den Winkelbetrag dw ergibt am andern Ende des Vektors eine Querverschiebung, die ihrem Betrage nach gleich ist

$$A \cdot dw.$$

Aber auch diese Querverschiebung ist ein Vektor, dessen Richtung mit der Richtung des zu \mathfrak{A} senkrechten Einheitsvektors $|\mathfrak{A}$ zusammenfällt. Die Querverschiebung ist daher

$$A \cdot dw \cdot |\mathfrak{A}|.$$

$\overline{\mathfrak{A}}$ vermag wegen der Konstanz seiner Länge (eins) lediglich seine Richtung zu ändern. Gemäß Fig. 5 ist die Aenderung bestimmt durch

$$|d\overline{\mathfrak{A}}| \cdot |\mathfrak{A}|.$$

Die Größe $|d\overline{\mathfrak{A}}|$ ist gleichbedeutend mit dw

$$dw = |d\overline{\mathfrak{A}}|$$

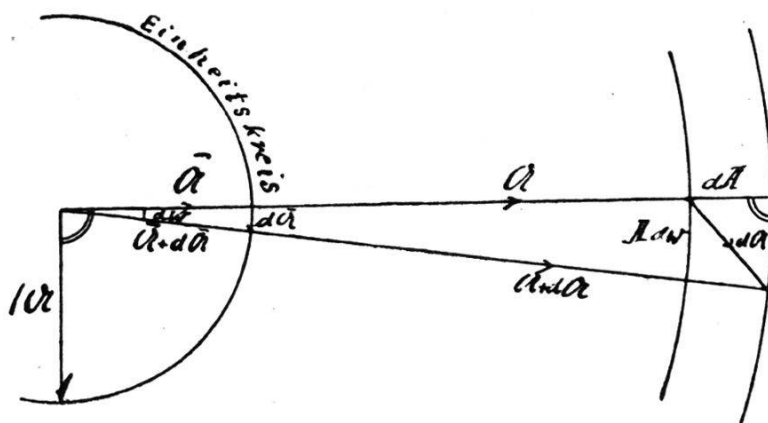


Fig. 5.

Die Gesamtverschiebung dA am Ende des Vektors A setzt sich aus den Elementarverschiebungen $dA \cdot \bar{A}$ und $A \cdot dw \cdot |A|$ im Sinne einer Vektorsumme zusammen (Fig. 5).

Es ist daher

$$(19) \quad dA = dA \cdot \bar{A} + A \cdot dw \cdot |A| = dA \cdot \bar{A} + A \cdot |dA| \cdot |A|.$$

Aus Figur 5 erkennt man sofort:

$$(20) \quad |dA| = \sqrt{(dA)^2 + (A \cdot dw)^2}$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (A, dA) = \frac{A \cdot dw}{dA}$$

Für ebene Vektoren gelten folgende Beziehungen:

$$(21) \quad \begin{aligned} \cos (A, B) &= + \sin (\bar{A}, \bar{B}) & \sin (A, B) &= - \cos (\bar{A}, \bar{B}) \\ \cos (\bar{A}, \bar{B}) &= - \sin (A, B) & \sin (\bar{A}, \bar{B}) &= + \cos (A, B) \\ \cos (B, A) &= + \sin (\bar{B}, \bar{A}) & \sin (B, A) &= + \cos (\bar{B}, \bar{A}) \\ \cos (\bar{B}, \bar{A}) &= - \sin (B, A) & \sin (\bar{B}, \bar{A}) &= - \cos (B, A) \\ \operatorname{tg} (A, B) &= - \operatorname{cotg} (\bar{A}, \bar{B}) & \operatorname{tg} (B, A) &= + \operatorname{cotg} (\bar{B}, \bar{A}) \end{aligned}$$

$$(22) \quad ((\bar{B}, \bar{A})) = ((A, B)) = + \cos (\bar{A}, \bar{B})$$

Für die Variation nach einem Vektor kann man, einer von Prof. E. Müller herrührenden Definition gemäß, festsetzen:

Ist die Zahl F eine Funktion des Vektors A , so sei der Differentialquotient von $F(A)$ nach A jener Vektor, dessen skalares Produkt mit dA gleich der Variation von F ist. Darnach kann man schreiben:

$$(23) \quad dF(A) = \left(\frac{dF(A)}{dA}, dA \right)$$

Für $F = ((A, B))$ als Funktion zweier Vektoren folgt durch sukzessive Variation beider:

$$(24) \quad d((A, B)) = \left(\frac{\partial ((A, B))}{\partial A}, dA \right) + \left(\frac{\partial ((A, B))}{\partial B}, dB \right)$$

Andererseits ist nach früherem

$$d((A, B)) = ((B, dA)) + ((A, dB))$$

Solange als A und B veränderliche, voneinander unabhängige Vektoren sind, folgt aus dem Vergleich der beiden Andrucke

$$(25) \quad \frac{\partial ((A, B))}{\partial A} = + B; \quad \frac{\partial ((A, B))}{\partial B} = \frac{\partial ((B, A))}{\partial B} = + A.$$

Aus (23), (24) und (14) ist die Analogie mit der Differentiation von Zahlenprodukten ersichtlich. Sie erstreckt sich auch auf die implizite Differentiation; es ist

$$(26) \quad \frac{\partial F(\mathfrak{A})}{\partial A} = \left(\frac{\partial F(\mathfrak{A})}{\partial \mathfrak{A}}, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial A} \right)$$

so insbesondere:

$$(27) \quad \frac{\partial (\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle)}{\partial A} = \left(\frac{\partial (\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle)}{\partial \mathfrak{A}}, \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial A} \right) = (\langle \mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{A}} \rangle) = B \cdot \cos(\mathfrak{B} \mathfrak{A}).$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhält man für

$$d\mathfrak{A} = dA \cdot \overline{\mathfrak{A}} + A \cdot dw \cdot \mathfrak{A}$$

setzen wir $A \cdot dw = a$, so ist:

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rangle)}{dA} &= 2 \cdot A \cdot \frac{\partial (\langle d\mathfrak{A}, d\mathfrak{A} \rangle)}{\partial dA} = 2 \cdot dA. \\ \frac{\partial (\langle d\mathfrak{A}, d\mathfrak{A} \rangle)}{da} &= 2 \cdot a \quad \frac{\partial (\langle d\mathfrak{A}, d\mathfrak{A} \rangle)}{\partial |d\overline{\mathfrak{A}}|} = 2 \cdot A^2 \cdot |d\overline{\mathfrak{A}}| \\ &= 2 \cdot A^2 \cdot dw. \end{aligned}$$

Eine lineare Vektorgleichung kann durch skalare Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{A}}$ und mit \mathfrak{A} in je eine lineare Zahlengleichung verwandelt werden. Wir nennen diesen Prozeß „Spalten“ nach dem Vektor \mathfrak{A} . Die Ergebnisse können geometrisch als Projektionen gedeutet werden; die eine bezieht sich auf die Richtung des Multiplikators, die andere auf die zu ihm senkrechte Richtung.

Die bisher betrachteten ebenen Vektoren sind sog. Hamilton'sche Vektoren.

Nun sind aber in der Ebene auch noch andere Vektoren, die sog. Gauß'schen Vektoren im Gebrauch, die aus der Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene folgen.

Sei $a + b i$ eine komplexe Zahl mit dem reellen Bestandteil a und dem imaginären $b i$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist.

C. F. Gauß stellte diese komplexe Zahl bekanntlich als einen Punkt der Ebene dar, indem er zwei senkrechte Koordinatenachsen wählte.

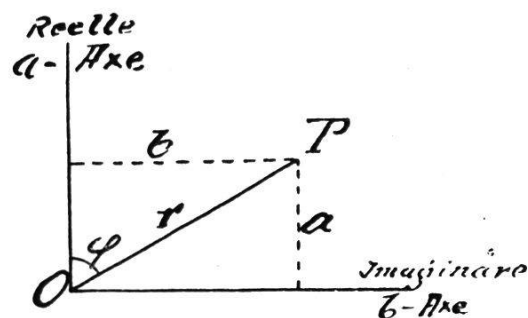


Fig. 6.

Im Hinblick auf die geodätischen Anwendungen wählen wir die reelle Achse nach oben, die imaginäre Achse nach rechts positiv.

Die komplexe Zahl $a + b i$ wird dann dargestellt durch einen Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten a und b .

Diesem Punkt (a, b) kommt der Radiusvektor

$$(29) \quad r = + \sqrt{a^2 + b^2}$$

zu, der mit der $+ a$ -Achse den Winkel φ , die sog. Amplitude, bildet.

Der Strahl r stellt einen ebenen Vektor dar, den wir durch r_φ bezeichnen. r nennen wir den Betrag von $a + b i$, oder r_φ .

Es ist:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 i &= r_1 \varphi_1 \\ a_2 + b_2 i &= r_2 \varphi_2. \end{aligned}$$

Dann ist:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i.$$

Setzen wir:

$$(30) \quad \begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_s \\ b_1 + b_2 &= b_s \end{aligned}$$

Dann ist:

$$(31) \quad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_s + b_s i$$

wieder ein Vektor mit den Komponenten a_s und b_s , dem Betrag r_s und der Amplitude φ_s .

Aus der Fig. 7 erkennt man sofort, daß der Vektor $r_s \varphi_s$ aus den

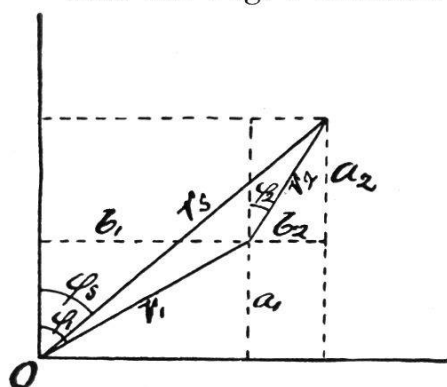


Fig. 7.

Vektoren $r_1 \varphi_1$ und $r_2 \varphi_2$ genau so hervorgeht, wie der Hamilton'sche Vektor

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

aus den Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .

Für die Gauß'schen Vektoren gilt also dasselbe geometrische Additionsgesetz wie für die bisher betrachteten ebenen Hamilton'schen Vektoren.

Die komplexe Zahl

$$a + b i$$

kann, wie man aus Figur 6 erkennt, auch

geschrieben werden:

$$(32) \quad r \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i = a + b i.$$

Nun wird in der Theorie der komplexen Zahlen gezeigt, daß

$$(33) \quad r \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot i = r \cdot e^{i \varphi} = r \varphi$$

ist, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und φ in analytischem Maße ausgedrückt wird.

Daraus ergibt sich ohne weiteres

$$(34) \quad \begin{aligned} r_1 \varphi_1 \cdot r_2 \varphi_2 &= r_1 e^{i \varphi_1} \cdot r_2 e^{i \varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i (\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

Dies ist wieder ein Vektor der hier betrachteten Art mit dem Betrag $(r_1 r_2)$ und der Amplitude $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Das so eingeführte Produkt ist also ein Vektorprodukt. Ein skalares Produkt wird bei den Gauß'schen Vektoren nicht gebildet.

$$(35) \quad \frac{r_1 \varphi_1}{r_2 \varphi_2} = \frac{r_1 e^{i \varphi_1}}{r_2 e^{i \varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i (\varphi_1 - \varphi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \varphi_{1-\varphi_2}$$

Der Quotient zweier Vektoren ist also wieder ein Vektor mit dem Betrag $\left(\frac{r_1}{r_2} \right)$ und der Amplitude $(\varphi_1 - \varphi_2)$.

$$(36) \quad (r_\varphi)^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \varphi} = (r^n)_{n \varphi}.$$

Die n -Potenz des Vektors r_φ ist also wieder ein Vektor mit dem Betrag (r^n) und der Amplitude $(n \varphi)$.

Dies gilt für ganze und gebrochene, positive und negative Exponenten.

Die hier betrachteten Gauß'schen ebenen Vektoren haben gegenüber den Hamilton'schen Vektoren den großen Nachteil, daß sie an ein Koordinatensystem gebunden sind. Solange nur Vektorsummen oder Differenzen auftreten, brauchen wir allerdings das Koordinatensystem nicht.

Die Operation der Summe ist bei Gauß'schen Vektoren vom Koordinatensystem unabhängig, sie ist invariant.

Dies gilt aber nicht mehr von den Operationen des Produktes, des Quotienten und der Potenz.

Der gewaltige Vorteil der Invarianz aller Vektoroperationen, die wir bei den Hamilton'schen Vektoren hervorgehoben haben, geht also bei der Verwendung der Gauß'schen Vektoren verloren.

Dagegen können wir bei Verwendung der Gauß'schen Vektoren durch die Operationen 2. Stufe (Multiplikation, Division) wieder ebene Vektoren erhalten, was bei den Hamilton'schen Vektoren nicht der Fall ist.

Bei den Gauß'schen ebenen Vektoren gibt es kein skalares Produkt. Hingegen kann man so etwas wie ein skalares Quadrat erhalten.

Bekanntlich ist das Produkt zweier konjugierter komplexer Zahlen reell.

$$\begin{aligned} a + b i &= r_\varphi = r \\ a - b i &= r_{-\varphi} = \bar{r} \end{aligned}$$

$$(37) \quad (a + b i) \sqrt{(a-bi)} = a^2 + b^2 = r^2.$$

Bezeichnen wir den zu dem Vektor r konjugierten Vektor mit \bar{r} , so ist:

$$(37 a) \quad r \cdot \bar{r} = r^2.$$

Wenn wir irgendeine Gleichung zwischen Gauß'schen Vektoren haben, so gilt dieselbe Gleichung auch für die konjugierten Vektoren, denn jeder Gauß'sche Vektor kann als komplexe Zahl geschrieben werden; eine Gleichung zwischen komplexen Zahlen zerfällt aber immer in zwei Gleichungen, je eine für die reellen und die imaginären Bestandteile. Daraus ist der vorstehend formulierte Satz ohne weiteres als richtig zu erkennen.

$$\text{Z. B. } r_\varphi + s_\psi = 0.$$

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + s (\cos \psi + i \sin \psi) = 0.$$

Daraus:

$$r \cos \varphi + s \cos \psi = 0$$

$$r \sin \varphi + s \sin \psi = 0.$$

Deshalb ist auch:

$$r (\cos \varphi - i \sin \varphi) + s (\cos \psi - i \sin \psi) = 0.$$

$$\text{also } r_{-\varphi} + s_{-\psi} = 0.$$

Wenn bei der Umformung einer Gleichung zwischen Gauß'schen Vektoren über die Rechnung mit komplexen Zahlen die imaginäre Einheit i endgültig in der Formel bleibt, so kann diese dadurch entfernt werden, wenn man sich vor Augen hält, daß

$$+i = 1 + 90, \text{ und } -i = 1 - 90 \text{ ist.}$$

(38) Wenn z. B. $z \zeta = i \cdot a_a$ ist, so folgt daraus

$$(39) \quad z \zeta = 1 + 90 \cdot a_a = a_a + 90, \text{ oder}$$

$$(40) \quad a_a = \frac{z \zeta}{1 + 90} = z \zeta - 90$$

$$(41) \quad \text{oder es sei } z \zeta = \frac{a_a}{i} = \frac{a_a}{190} = a_a (\alpha - 90) \text{ u. s. f.}$$

Ebenso kann man unangenehme Minuszeichen wegschaffen, wenn man beachtet, daß $-1 = 1180$ ist.

Anwendung der Vektorrechnung auf geodätische Ausgleichungsaufgaben.

Nach dieser allgemeinen Einleitung gehen wir nun dazu über, die Vektorrechnung auf geodätische Ausgleichungsaufgaben anzuwenden.

Es liegen hier zwei prinzipiell verschiedene Bearbeitungen vor.

Oberst K. Friedrich verwendet die Gauß'schen ebenen Vektoren (vide seine Veröffentlichung [3], [7] und [8]).

Hofrat Professor Dr. Ing. Dr. R. Schumann verwendet die ebenen Hamilton'schen Vektoren (vide die Veröffentlichungen [4], [5] und [6]).

Wir wollen zuerst die Schumann'sche Methode kurz darlegen.

Vektorieller Ausgleich ebener geodätischer Netze bei Verschiedenheit der Gewichte für Strecken und Richtungen nach Schumann.

Ich folge im wesentlichen der letzten Veröffentlichung von Schumann [6].

„Jeder Seite eines ebenen Dreieckes kommt Länge und Richtung zu, sie darf mithin als Vektor angesehen werden. Die sämtlichen Vektoren einer Triangulation sollen ein mathematisch mögliches Netz bilden; sind ihre Beträge und die Winkel zwischen ihnen beobachtet, so werden wegen der unvermeidlichen Beobachtungsunsicherheit beim Zusammensetzen zu geschlossenen Figuren kleine Widersprüche (Schlußfehler) entstehen; auch diesen kommt Länge und Richtung zu, von ihnen werden die ersteren kleine Größen sein.

Um zu erreichen, daß die Schlußfehler verschwinden, sowie daß die Dreiecke aneinanderschließen, erteilt man den Seitenvektoren kleine Verbesserungen, denen wiederum Länge und Richtung zukommt; die Beträge dieser Verbesserungsvektoren sind ebenfalls kleine Größen.

Unabhängig von der Definition eines Vektors besteht die Tatsache, daß im allgemeinen wohl Winkel, nicht aber Richtungen gemessen werden können (abgesehen von der Messung mit Boussoleninstrumenten) und hierdurch entsteht zunächst eine grundsätzliche Schwierigkeit. Je drei Vektoren bilden, allein ihren Richtungen nach, stets ein Dreieck

ohne Widerspruch, mögen sie fehlerhaft oder fehlerlos, ausgeglichen oder unausgeglichen sein, ihre Richtungen sind unabhängig voneinander; sie unterliegen keiner Bedingung.

Dagegen liefern drei gemessene *Winkel* im allgemeinen immer einen Widerspruch.“

Schumann will diese grundsätzliche Schwierigkeit dadurch umgehen, daß er die Ausgleichung in Teile zerlegt. Der Netzausgleich soll zunächst den Winkelschluß des einzelnen Dreieckes, und dann erst den Netz-Zusammenschluß umfassen.

Leider führt aber dieses Verfahren nicht zu demselben Resultat, wie wenn die M. d. kl. Qu. auf die gemessenen Elemente angewendet wird. Hierin liegt meines Erachtens der gewichtigste Einwand gegen die Schumann'sche vektorielle Ausgleichung.

Nun ist ja ohne weiteres zuzugeben, daß die M. d. kl. Qu. eine von unendlich vielen möglichen Ausgleichungsprinzipien ist und man sich bei praktischen Rechnungen oft bewußt von ihr emanzipiert, im Interesse der Vereinfachung der Rechnung. Aber ich muß gestehen, daß es mich stößt, wenn ein Ausgleichungsprinzip nicht konsequent angewendet wird, was im vorliegenden Falle zutrifft. Es stößt mich um so mehr, als die gewählte Berechnungsmethode uns einfach *zwingt*, im Sinne Schumanns vorzugehen und wir nicht freiwillig, nach Vergleichung mit den korrekten Ausgleichungsergebnissen, im Interesse der Vereinfachung der Rechnung, auf die letzte Schärfe verzichten.

Ich müßte dann mindestens verlangen, daß die neue Methode bedeutend geringere Rechenarbeit erfordert, als die klassische M. d. kl. Qu. Um den Leser in den Stand zu setzen, selbst beurteilen zu können, ob und in wie weit dies der Fall ist, trete ich hier eingehend auf diese Vektor-Ausgleichung ein. Ich werde am Schlusse des Aufsatzes zeigen, wie ich mir die Anwendung der klassischen Methoden der M. d. kl. Qu. auf das vorliegende Problem vorstelle.

Wir wollen also in Uebereinstimmung mit Schumann den Dreiecksschluß in bekannter Weise, mit oder ohne Rücksicht auf Gewichte, wie sie etwa durch vorausgegangenen Stationsausgleich oder irgendwie erhalten sein können, durchgeführt denken.

Der zweite Teil des Ausgleichs soll dann vektoriell durchgeführt werden.

Als geschlossene, geodätische Figuren treten meist Dreiecke auf; bedeuten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} entweder die wahren oder auch die ausgeglichenen Seiten eines ebenen Dreieckes, so lautet die vektorielle Bedingung für den Dreiecksschluß

$$(42) \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0.$$

Sie ist notwendig und hinreichend.

Beobachtete oder gemessene Größen mögen durch einen obern Strich gekennzeichnet werden; dann tritt an die Stelle der vorigen Gleichung:

$$(43) \quad \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' + \mathfrak{W} = 0,$$

wo $\mathfrak{W} = W \cdot \overline{\mathfrak{W}}$ einen Widerspruchsvektor bedeutet.

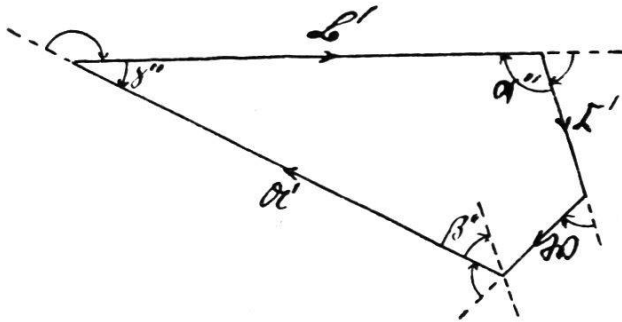
Nun ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + d\mathfrak{A}'; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + d\mathfrak{B}'; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + d\mathfrak{C}'.$$

Dann geht (42) über in

$$(44) \quad d\mathfrak{A}' + d\mathfrak{B}' + d\mathfrak{C}' - \mathfrak{B} = 0.$$

Die drei Fehlervektoren sind die Unbekannten; \mathfrak{B} muß aus bekannten Stücken berechnet werden. Als beobachtet oder gemessen erscheinen die Längen der Dreiecksseiten und die Dreieckswinkel. Für



Figur 8.

einen Vektor \mathfrak{A}' werden gebraucht: Betrag A' und seine Richtung. Für A' ist die Länge der Dreiecksseite zu nehmen; zwischen den Dreieckswinkeln und den Vektorrichtungen bestehen gemäß Figur 8 folgende Beziehungen, wenn α'' , β'' und γ'' die im Dreieck auf 180° abgestimmten Winkel bedeuten.

$$(45) \quad \begin{array}{ll} \sphericalangle (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}') = 180^\circ - \gamma'' & \sphericalangle (\mathfrak{B}' \mathfrak{A}') = 180^\circ + \gamma'' \\ \sphericalangle (\mathfrak{B}' \mathfrak{C}') = 180^\circ - \alpha'' & \sphericalangle (\mathfrak{C}' \mathfrak{B}') = 180^\circ + \alpha'' \\ \sphericalangle (\mathfrak{C}' \mathfrak{A}') = 180^\circ - \beta'' & \sphericalangle (\mathfrak{A}' \mathfrak{C}') = 180^\circ + \beta'' \end{array}$$

Wird der Winkel zwischen \mathfrak{B} und einer Seite, etwa \mathfrak{A}' , bekannt, so sind durch (45) auch $\sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{B}')$ und $\sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{C}')$ bekannt; es wird:

$$(46) \quad \begin{array}{l} \sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') = 180^\circ + \sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{A}') - \gamma'' \\ \sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{C}') = 180^\circ + \sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{A}') + \beta'' \end{array}$$

Zur Berechnung von \mathfrak{B} dient (43); zwei durch Spaltung mittels Vektors erhaltene Gleichungen würden genügen. Zur Kontrolle kann man aus (43) sechs Gleichungen ableiten durch skalare Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{A}'}$, $|\mathfrak{A}'|$, $\overline{\mathfrak{B}'}$, $|\mathfrak{B}'|$, $\overline{\mathfrak{C}'}$ und $|\mathfrak{C}'|$.

Wir erhalten folgendes System:

$$(47) \quad \begin{array}{l} W \cdot \sin (\mathfrak{B} \mathfrak{A}') = + B' \cdot \sin \gamma'' - C' \cdot \sin \beta'' = s_\alpha \\ W \cdot \cos (\mathfrak{B} \mathfrak{A}') = -A' + B' \cos \gamma'' + C' \cos \beta'' = p_\alpha \\ W \cdot \sin (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') = -A' \sin \gamma'' + C' \sin \alpha'' = s_\beta \\ W \cdot \cos (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') = +A' \cos \gamma'' - B' + C' \cos \alpha'' = p_\beta \\ W \cdot \sin (\mathfrak{B} \mathfrak{C}') = +A' \sin \beta'' - B' \sin \alpha'' = s_\gamma \\ W \cdot \cos (\mathfrak{B} \mathfrak{C}') = +A' \cos \beta'' + B' \cos \alpha'' - C' = p_\gamma \end{array}$$

Hieraus folgt für die gesuchten Winkel:

$$(48) \quad \operatorname{tg} (\mathfrak{B} \mathfrak{A}') = \frac{s_\alpha}{p_\alpha}; \quad \operatorname{tg} (\mathfrak{B} \mathfrak{B}') = \frac{s_\beta}{p_\beta}; \quad \operatorname{tg} (\mathfrak{B} \mathfrak{C}') = \frac{s_\gamma}{p_\gamma}.$$

Danach kann W mehrfach bestimmt werden, rechnerisch am sichersten mittels einer Quadrattafel aus $\sqrt{s^2 + p^2}$; s und p sind kleine Größen.

Es würde genügen, einen der drei Winkel zu bestimmen, etwa $\sphericalangle (\mathfrak{B} \mathfrak{A}')$. Mit Hilfe von (46) kann er dreifach bestimmt werden; wie bei W wird man das einfache Mittel weiter benutzen.

Zwei weitere Kontroll-Gleichungen findet man aus (43) durch skalare Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{B}}$ und $|\mathfrak{B}$; dieses Spalten liefert die beiden Gleichungen:

$$(49) \quad \begin{aligned} + A' \cdot \sin (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}) + B' \sin (\mathfrak{B}' \mathfrak{B}) + C' \cdot \sin (\mathfrak{C}' \mathfrak{B}) &= 0 \\ + A' \cdot \cos (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}) + B' \cos (\mathfrak{B}' \mathfrak{B}) + C' \cdot \cos (\mathfrak{C}' \mathfrak{B}) + W &= 0 \end{aligned}$$

Nunmehr kann zum vektoriiellen Ausgleich geodätischer Figuren bei beliebigen Gewichten für die gemessenen Stücke, nämlich Strecken und Winkel, übergegangen werden. (Fortsetzung folgt.)

Näherungskonstruktion für das apollonische Berührungsproblem.

Die Lösung des Problems, die Kreise zu zeichnen, welche drei gegebene Kreise berühren, ist zwar auch direkt, d. h. ohne allmähliche Annäherung möglich, beispielsweise auf dem Umwege der Inversion

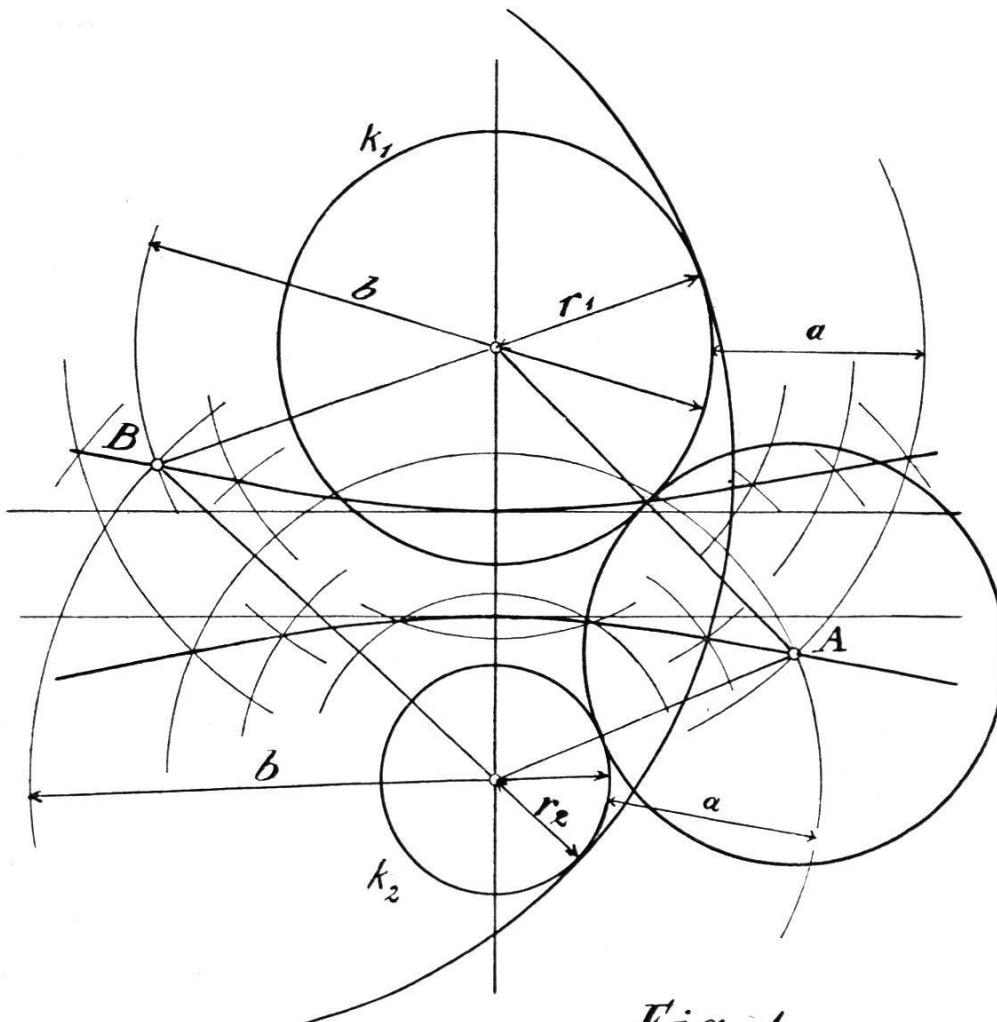


Fig. 1.

mit reziproken Radien. Dabei ist aber eine gewisse Fertigkeit in der Anwendung dieser nicht allgemein bekannten Methode unumgänglich. Eine Aufgabe aus der Praxis führte mich kürzlich auf eine viel einfachere, wenn auch nur angenäherte Lösung. Ob diese schon sonst irgendwo