Herleitung der Flächenformel für den sphärischen Exzess mittels der Differentialgeometerie

Autor(en): **Leemann, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **32 (1934)**

Heft 11

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-194700

Herleitung der Flächenformel für den sphärischen Exzeß mittels der Differentialgeometrie.

Von *W. Leemann*, Kantonsgeometer, Zürich.

In den Lehrbüchern wird die Formel für den sphärischen Exzeß

$$\epsilon'' = \frac{F}{R^2}\,\rho''$$

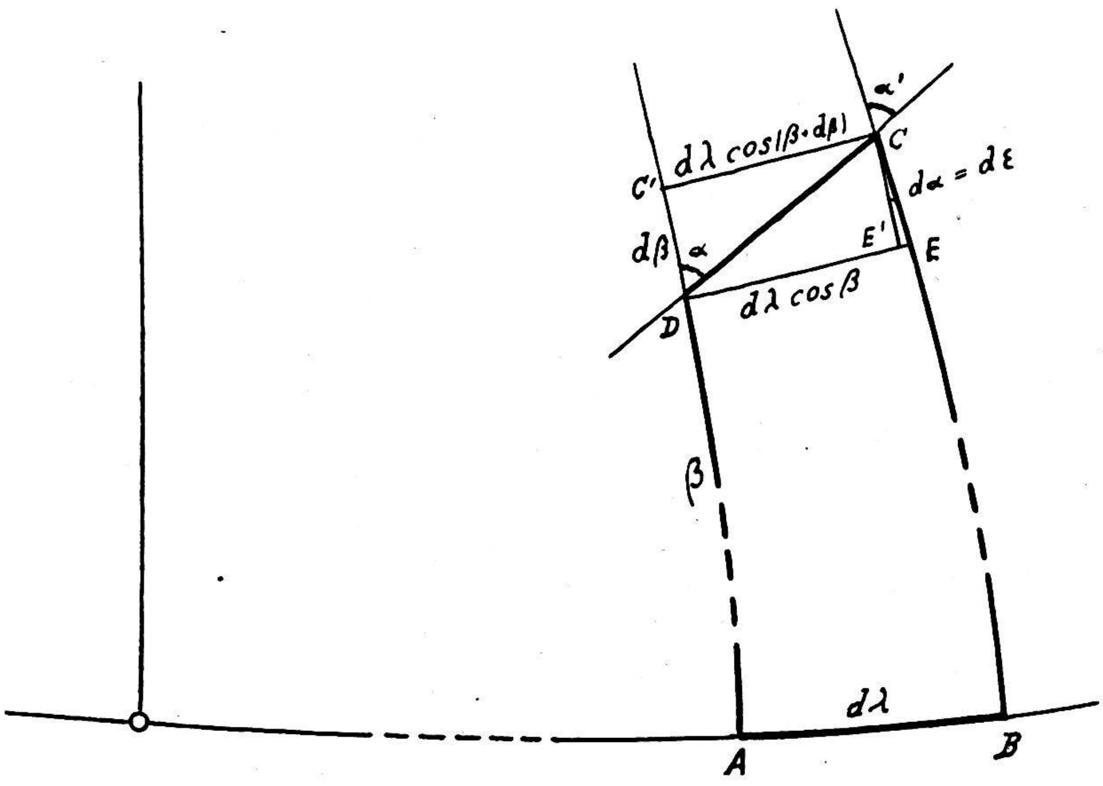
oder für die Einheitskugel ($R = 1$)

$$arc\ \epsilon = F$$

regelmäßig mit Hilfe des Kugelzweieckes hergeleitet. Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, wie man diese Formel auch mittels der Differenzialgeometrie findet.

In untenstehender Figur stellt das durch Großkreise begrenzte Flächenstück $A\ B\ C\ D$ ein Differenzial-Kugeltrapez von der Länge $d\,\lambda$ und der Breite β dar. Sein Flächeninhalt wird mit $d\,F$ und sein sphärischer Exzeß mit $d\,\epsilon$ bezeichnet. Der Kugelradius wird $= 1$ gesetzt.

Die Winkel bei A und B sind rechte. Die Kreisbogen $C'\,C$ und $D\,E$ gehören Parallelkreisen an und sind demnach parallel zu $A\ B$. Der Hilfskreisbogen $C\,E'$ ist parallel zu $C'\,D\,A$.



Der *Flächeninhalt* $d\,F$ des Differenzial-Kugeltrapezes $A\ B\ C\ D$ wird auf folgende einfache Weise erhalten:

Der Inhalt der Differenzialfläche 2. Ordnung $D\ E\ C\ C'$ ist:

$$d\,\beta\ d\,\lambda\ \cos\,\beta$$

Wird hier $d\lambda$ als konstant angesehen, so erhält man durch Integrierung die Inhaltsformel des Differenzialtrapezes $A\,B\,C\,D$. Es ist:

$$\underline{d\,F} = d\lambda\int_0^\beta d\beta\cos\beta = \underline{d\lambda\sin\beta.}\text{*} \qquad (1)$$

Es ist gestattet, bei der Integrierung in dieser Weise vorzugehen, weil das Differenzialtrapez längs dem Großkreisbogen $A\,D$ (oder $B\,C$) flächentreu abgewickelt, bzw. in die Ebene ausgebreitet werden kann.

Der *sphärische Exzeß* $d\epsilon$ des Differenzial-Kugeltrapezes ist nach Figur:

$$\begin{aligned} d\epsilon &= 90^0 + 90^0 + (180 - \alpha) + \alpha' - 360^0 \\ &= \alpha' - \alpha = d\alpha. \end{aligned}$$

Es ist nun ferner:

$$\begin{aligned} E' - E &= d\lambda\cos\beta - d\lambda\cos(\beta + d\beta) \\ &= d\lambda\Big[\cos\beta - \cos(\beta + d\beta)\Big] \\ &= -d\lambda\,d\cos\beta. \end{aligned}$$

In dem als eben zu betrachtenden Dreieck $C\,E'\,E$ ist der Winkel bei E ein rechter. Die Kathete $E' - E$ ist, wie sofort einzusehen ist, eine unendlich kleine Strecke 2. Ordnung, die Kathete $C - E$ eine solche 1. Ordnung. Es darf daher an Stelle von $E' - E$ der Bogen mit dem Radius $C - E$ eingeführt werden. Darnach ist im Dreieck $C\,E'\,E$ zu setzen:

$$d\epsilon = +\rho\,\frac{d\lambda\,d\cos\beta}{d\beta} = -\rho\,d\lambda\sin\beta$$

$$\text{oder } \underline{d\,arc\,\epsilon} = \underline{d\lambda\sin\beta.}\text{**} \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich nun unmittelbar

$$\underline{d\,arc\,\epsilon = d\,F.}$$

In Worten ausgedrückt heißt das: *Im Differenzial-Kugeltrapez ist der arcus des sphärischen Exzesses gleich dem Flächeninhalt.*

* Nebenbei sei darauf hingewiesen, daß für $\beta = 90^0$ diese Formel durch Einführung von R und integrieren zwischen den Grenzen $\lambda = O$ und $\lambda = 2\pi R$ in den Ausdruck für die halbe Kugeloberfläche übergeht. Denn es ist:

$$\int_0^{2\pi R} d\lambda\,R\sin 90^0 = 2\pi R^2.$$

Analog wird die Flächenformel für die Kugelzone erhalten.

** Diese Formel ist auch auf pag. 361 des dritten Bandes von Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Jahrgang 1923, jedoch auf etwas andere Weise abgeleitet.

Da dieser Satz für das Differenzial-Kugeltrapez gilt, so hat er ohne weiteres auch Gültigkeit für das endliche Kugeltrapez. Indem ferner jede durch n Großkreise begrenzte Kugelfläche die Summe von n entsprechenden Kugeltrapezen darstellt, gilt allgemein:

$$\underline{arc\,\epsilon = F.}$$

Zürich, im August 1934.

Eingabe der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik und des Schweiz. Geometervereins an den schweiz. Bundesrat zur Empfehlung der Meliorationen als Mittel zur Krisenbekämpfung.

Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik
Schweizerischer Geometerverein

Neuenburg, Zürich, den 3. Juli 1934.

An den h. Bundesrat der Schweizer. Eidgenossenschaft
BERN

Hochgeehrter Herr Bundespräsident!
Hochgeehrte Herren Bundesräte!

In der Hoffnung, an der Krisenbekämpfung und Arbeitsbeschaffung mithelfen zu können, gestatten sich die Vorstände der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik und des Schweiz. Geometervereins Ihnen, hochgeehrte Herren Bundesräte, einige Vorschläge mit bezug auf die Meliorationen zur wohlwollenden Prüfung zu unterbreiten.

1. Daß die Meliorationen sich ganz vorzüglich für die Arbeitsbeschaffung in Krisenzeiten eignen, wird wohl von keiner Seite bestritten. In der Tat besteht der größte Teil der Meliorationskosten aus Arbeitslöhnen. Nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Kosten betrifft die Beschaffung von Baumaterialien, wie Kies, Steine, Röhren usw., und auch diese werden wiederum mit Hilfe inländischer Arbeitskräfte gewonnen oder hergestellt. Zudem sind die Meliorationen, insbesondere die Weganlagen, Arbeiten einfacher Natur, bei denen jeder gesunde Arbeiter ohne besondere Berufskenntnis beschäftigt werden kann. Die Arbeitsplätze sind außerdem ziemlich dezentralisiert gelegen, so daß keine großen örtlichen Verschiebungen der Arbeitskräfte nötig sind. Im Gegensatz zu den Arbeiten im Hochbaugewerbe sind die Meliorationen teilweise auch im Winter ausführbar. Die Herren Nationalräte Grimm und Rothpletz anerkennen daher richtigerweise in ihrer Expertise, daß die Meliorationen geeignet sind, technisch zweckmäßige und auf längere Dauer berechnete Arbeitsgelegenheit zu schaffen. Mit Recht geben sie auch den Güterzusammenlegungen den Vorzug unter den Notstandsarbeiten landwirtschaftlicher Natur.

Wenn dagegen die Herren Experten Grimm und Rothpletz (S. 89) mit Nachdruck bestreiten, daß der Krise durch Erschließung von Neu-