

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Band:** 33 (1935)

**Heft:** 8

**Artikel:** Zur Fehlerfortpflanzung in überbestimmten Quadratketten

**Autor:** Kasper, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-195323>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les coefficients  $K'$  et  $K''$  sont constants pour un équipement photogrammétrique donné, et ne peuvent être déterminés avec certitude que par des essais.

Le tableau ci-dessous donne une première idée des résultats qui peuvent être atteints au moyen de la chambre aérienne Wild de focale 16.5 cm et de l'autographe Wild. Nous avons admis  $K' = 0.20$  et  $K'' = 0.10$ .

$L$ (km)	Hauteur de vol relative $H$ (m)						
	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
2	$\mu$ (m) = 1.1	1.2					
4	2.6	2.3	2.2	2.2	2.4		
6	5	4	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
8	7	6	5	5	4.5	4.5	4.5
10	10	8	7	7	6	6	6
12	13	11	9	9	8	7	7
14	17	14	12	11	10	9	9
16	20	17	14	13	12	11	10
18	24	20	17	15	14	13	12
20	.....	23	20	18	16	15	14
22	.....	.....	23	21	19	18	17
24	.....	.....	.....	24	22	20	19
26	.....	.....	.....	.....	24	22	21
28	.....	.....	.....	.....	.....	25	24
30	.....	.....	.....	.....	.....	.....	26

Il ressort de ce tableau que pour une densité de repères donnée la précision *augmente* en général lorsqu'on augmente la hauteur de vol. Cette augmentation de hauteur de vol s'accompagne d'autre part d'une diminution rapide des frais occasionnés par le lever. Il est donc clair que l'on cherche à voler le plus haut possible. La limite est généralement fixée par le plafond de l'avion disponible. Il peut arriver cependant que l'on doive adopter une hauteur de vol inférieure aux possibilités de l'avion, afin de pouvoir identifier avec certitude, sur les négatifs, les détails à restituer. (Schluß folgt.)

## Zur Fehlerfortpflanzung in überbestimmten Quadratketten.

Von Dr. H. Kasper, Brünn.

Unter der Voraussetzung unabhängiger, gleichgewichtiger Winkelmessungen soll die in der Figur dargestellte Kette hinsichtlich der Gewichtsverhältnisse untersucht werden. Die einzelnen Anreihungselemente der Kette sind Quadrate mit beiden Diagonalen.

Da in jüngster Zeit eine ähnliche Abhandlung über den Rautenzug von Prof. *Buchholtz*<sup>1</sup> erschienen ist, die sehr ausführlich jede einzelne Rechenoperation schildert, ist hier unter Hinweis auf diese Arbeit eine knappe Fassung möglich.

Die allen Untersuchungen dieser Art zu Grunde liegende Formel für die Gewichtsreziproke lautet nach Gauss

$$Q = \frac{1}{G} = [\varphi\varphi] - \frac{[a\varphi]^2}{[aa]} - \frac{[b\varphi \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots, \quad (1)$$

in welcher  $\varphi$  die Koeffizienten der linearen Darstellung der zu untersuchenden Funktion  $\Phi$ , also die partiellen Ableitungen von  $\Phi$  nach den Beobachtungsgrößen darstellen. Die vorgelegte Kette soll zunächst als frei von einer Basis ausgehend betrachtet werden; ferner soll sie durch eine zweite fehlerfreie Längen-, bzw. Azimut-(Richtungs-)Messung des letzten Netzstabes versteift werden.

Die Bedingungsgleichungen in einfachster Form lauten:

- a)  $1_i + 2_i + 3_i + 4_i + 5_i + 6_i + 7_i + 8_i - 360^\circ = 0;$
- b)  $2_i + 3_i - 6_i - 7_i = 0;$
- c)  $1_i - 4_i - 5_i + 8_i = 0;$
- d)  $\frac{\sin 1_i \sin 3_i \sin 5_i \sin 7_i}{\sin 2_i \sin 4_i \sin 6_i \sin 8_i} = 1;$  wobei  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  ist.

Zu diesen  $3n$  Winkel- und  $n$  Seitengleichungen kommen noch eine Basis- und eine Azimutbedingung:

- e)  $\prod_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\sin 1_i \sin 3_i}{\sin 6_i \sin 8_i} \right) = 1;$
- f)  $\sum_{i=1}^{i=n} (1_i + 2_i + 7_i + 8_i) - n \cdot 180^\circ = 0.$

Aus den Bedingungsgleichungen resultieren die  $(4n + 2)$  Verbesserungsbedingungsgleichungen:

- a)  $v_{i1} + v_{i2} + v_{i3} + v_{i4} + v_{i5} + v_{i6} + v_{i7} + v_{i8} + w_i' = 0;$
- b)  $v_{i2} + v_{i3} - v_{i6} - v_{i7} + w_i'' = 0;$
- c)  $v_{i1} - v_{i4} - v_{i5} + v_{i8} + w_i''' = 0;$
- d)  $v_{i1} - v_{i2} + v_{i3} - v_{i4} + v_{i5} - v_{i6} + v_{i7} - v_{i8} + w_i'''' = 0;$
- e)  $\sum_{i=1}^{i=n} (v_{i1} + v_{i3} - v_{i6} - v_{i8}) + W_1 = 0;$
- f)  $\sum_{i=1}^{i=n} (v_{i1} + v_{i2} + v_{i7} + v_{i8}) + W_2 = 0;$

deren Koeffizienten allgemein mit  $a_i, b_i, c_i, d_i, e, f$  und den entsprechenden Indices bezeichnet werden. Die Koeffizienten sind entweder Null oder  $\pm 1$ . Bildet man die Normalgleichungskoeffizienten, so verschwinden alle mit Ausnahme folgender:  $[a_i a_i] = [d_i d_i] = 8; [a_i f]^* = [d_i e]^* = [b_i b_i] = [c_i c_i] = 4; [c_i f]^* = [b_i e]^* = 2; [ee] = [ff] = 4n$  (2)

<sup>1</sup> Prof. Dr. A. Buchholtz, Zur Fehlertheorie des Rautenzugs, Intern. Archiv für Photogramm., VIII. Bd., 1. Hälfte 1934.

Die in (1) auftretenden Koeffizienten werden durch Reduktion der vorstehenden gebildet, wobei zu beachten ist, dass hiebei nur  $[ee]$  und  $[ff]$  ihren Wert ändern, weil außer den in (2) mit Stern bezeichneten alle unsymmetrischen Koeffizienten verschwinden. Dasselbe gilt auch von den Gewichtskoeffizienten.  $[a_i\varphi]$ ,  $[b_i\varphi]$ ,  $[c_i\varphi]$ ,  $[d_i\varphi]$  bleiben bei der Reduktion unverändert, nur  $[e\varphi]$  und  $[f\varphi]$  ändern ihren Wert. Weiters ist noch zu beachten, daß die beiden letzteren sich gegenseitig nicht beeinflussen, da  $[ef]$  und dessen Reduktionen gleich Null sind. Es muß demnach festgestellt werden, daß Basis- und Azimuteinfluß in der Gewichtsreziproke  $Q$  voneinander vollkommen unabhängig sind. Durch die stufenweise Reduktion erhält man bei Zusammenfassung gleichartiger Glieder:

$$\begin{aligned}
 [ee \cdot 4n] &= [ee] - \sum_n \left( \frac{[b_i e]^2}{[b_i b_i]} + \frac{[d_i e]^2}{[d_i d_i]} \right) = 4n - 3n = n; \\
 [ff \cdot (4n + 1)] &= [ff] - \sum_n \left( \frac{[a_i f]^2}{[a_i a_i]} + \frac{[c_i f]^2}{[c_i c_i]} \right) = 4n - 3n = n; \\
 [e\varphi \cdot 4n] &= [e\varphi] - \sum_n \left( \frac{[b_i e][b_i \varphi]}{[b_i b_i]} + \frac{[d_i \varphi][d_i e]}{[d_i d_i]} \right) = \\
 &= [e\varphi] - \frac{1}{2} \sum_n ([b_i \varphi] + [d_i \varphi]) \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } [f\varphi \cdot (4n + 1)] = [f\varphi] - \frac{1}{2} \sum_n ([a_i \varphi] + [c_i \varphi]) \tag{4}$$

Und schließlich

$$\begin{aligned}
 Q &= [\varphi\varphi] - \frac{1}{8} \sum_n ([a_i \varphi]^2 + 2[b_i \varphi]^2 + 2[c_i \varphi]^2 + [d_i \varphi]^2) - \\
 &\quad - \frac{[e\varphi \cdot 4n]^2}{n} - \frac{[f\varphi \cdot (4n + 1)]^2}{n} \tag{5}
 \end{aligned}$$

Das vorletzte Glied stellt den Basiseinfluß  $B$  vor, das letzte den Azimuteinfluß  $A$ .

Hiemit ist die Gewichtsformel für eine beliebige Funktion  $\Phi$  vorbereitet.

Nun wird das Koordinatengewicht des Endpunktes  $P$  der Kette untersucht. Die Koordinaten werden aus dem Koordinatenursprung durch den gestreckten Zug  $OP$  entwickelt. Es ist

$$\Phi_1 = x = [s \cos \omega]; \quad \Phi_2 = y = [s \sin \omega].$$

In diesen Formeln müssen die  $s$  und deren Richtungswinkel  $\omega$  durch die gemessenen Winkel ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 s_i &= b \left( \prod_{\nu=1}^{\nu=i-1} \frac{\sin 1_\nu \sin 3_\nu}{\sin 6_\nu \sin 8_\nu} \right) \frac{\sin 3_i}{\sin 8_i} = (s) \\
 \omega_i &= \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} (1_\nu + 2_\nu + 7_\nu + 8_\nu) + 1_i + 2_i - (i - 1) \cdot 180^\circ = (90^\circ).
 \end{aligned}$$

Bei der Linearmachung der Funktionen erweist es sich als zweckmäßig anstatt  $i$  eine neue Ordnungszahl  $m$  einzuführen, daß  $i + m = n + 1$ .  $m$  zählt nämlich zweckmäßiger das Vorkommen der einzelnen Beobachtungsgrößen in den partiell abgeleiteten Summengliedern von  $x$  bzw.  $y$ . Die partiellen Ableitungen von  $\Phi$  nach den Beobachtungsgrößen werden allgemein mit  $\varphi_{i1}$  bis  $\varphi_{i8}$  entsprechend der Winkelbezeichnung benannt.

Zunächst  $\Phi_1$ : Durch partielle Differentiation und Einsetzen der Näherungswerte ergibt sich:

$$\varphi_{i1} = \varphi_{i2} = -ms; \varphi_{i3} = \varphi_{i4} = \varphi_{i5} = \varphi_{i6} = 0; \varphi_{i7} = \varphi_{i8} = -(m-1)s.$$

Die entsprechende Multiplikation mit den gleichbezeichneten Koeffizienten der Verbesserungsbedingungsgleichungen und nachfolgende Summierung liefert:

$$[a_i\varphi] = -(4m-2)s; [b_i\varphi] = -s; [c_i\varphi] = -(2m-1)s; [d_i\varphi] = 0;$$

$$[e\varphi] = -\sum_{m=n}^{m=1} (s) = -ns; [f\varphi] = -\sum_{m=n}^{m=1} (4m-2)s = -2n^2s; [\varphi\varphi] = \sum_{m=n}^{m=1} (4m^2-4m+2)s^2.$$

Eingesetzt in (3), (4) und (5) wird

$$Q_x = s^2 \sum_n (4m^2-4m+2) - \frac{1}{8} s^2 \sum_n \left\{ (4m-2)^2 + 2 + 2(2m-1)^2 \right\} - B_x - A_x =$$

$$= s^2 \sum_n (m^2-m+1) - B_x - A_x = \frac{n^3 + 2n}{3} s^2 - B_x - A_x \quad (6)$$

$$\text{mit dem Basiseinfluß } B_x = \frac{1}{n} \left\{ -ns + \frac{1}{2} \sum_n s \right\}^2 = \frac{1}{n} \left( -ns + \frac{ns}{2} \right)^2 = \frac{n}{4} s^2 \quad (7)$$

$$\text{und dem Azimuteinfluß } A_x = \frac{1}{n} \left\{ -2n^2s - \sum_n (2m-1)s \right\}^2 = \frac{n^3}{4} s^2 \quad (8)$$

Die Ergebnisse sind in der Tabelle auf Seite 213 enthalten. Ohne  $B_x$  und  $A_x$  erhält man Formeln für freie Ketten; mit  $B_x$  allein den Fall des Basisanschlusses etc.

Nun wird gleicherweise  $\Phi_2 = y$  behandelt. Es ist

$$\varphi_{i1} = (m-1)s; \varphi_{i2} = \varphi_{i4} = \varphi_{i5} = \varphi_{i7} = 0; \varphi_{i3} = ms; \varphi_{i6} = -(m-1)s; \varphi_{i8} = -ms$$

und dementsprechend

$$[a_i\varphi] = 0; [b_i\varphi] = (2m-1)s;$$

$$[c_i\varphi] = -s; [d_i\varphi] = (4m-2)s; [e\varphi] = \sum_n (4m-2)s = 2n^2s; [f\varphi] = -\sum_n s = -ns$$

und schließlich

$$Q_y = \frac{n^3 + 2n}{3} s^2 - B_y - A_y; B_y = \frac{n^3}{4} s^2; A_x = \frac{n}{4} s^2 \quad (9)$$

Außer den Koordinaten des Endpunktes soll noch die zu  $b$  parallele Seite  $b_k$  und deren Azimut  $\alpha_k$  zur Untersuchung herangezogen werden (Genauigkeitsbestimmung eines einzelnen Stabes).

$$\Phi_3 = b_k = \prod_{i=1}^{i=k} \frac{\sin 1_i \sin 3_i}{\sin 6_i \sin 8_i} = (s); \Phi_4 = \alpha_k = \sum_{i=1}^{i=k} (1_i + 2_i + 7_i + 8_i) - k \cdot 180^\circ = (0)$$

Für  $\Phi_3$  wird  $\varphi_{i1} = \varphi_{i3} = s$ ;  $\varphi_{i2} = \varphi_{i4} = \varphi_{i5} = \varphi_{i7} = 0$ ;  $\varphi_{i6} = \varphi_{i8} = -s$   
 und  $[a\varphi] = [c\varphi] = [f\varphi] = 0$ ;  $[b\varphi] = 2s$ ;  $[d\varphi] = 4s$ ;  $[e\varphi] = 4ks$ ;

$$Q_b = 4ks^2 - \frac{1}{8} \sum_k (8s^2 + 16s^2) - B_b - A_b = ks^2 - B_b - A_b;$$

$$B_b = \frac{k^2}{n} s^2; A_b = 0 \tag{10}$$

Für  $\Phi_4$  ist  $\varphi_{i1} = \varphi_{i2} = \varphi_{i7} = \varphi_{i8} = 1$ ;  $\varphi_{i3} = \varphi_{i4} = \varphi_{i5} = \varphi_{i6} = 0$ ,  
 was zu  $Q_a = k - B_a - A_a$  führt, wobei  $B_a = 0$ ;  $A_a = \frac{k^2}{n}$  ist.  $(11)$

Das Untersuchungsergebnis ist zusammengestellt in der

**Tabelle der reziproken Gewichte:**

	Gewichtsreziproke von			
	x	y	$b_k$	$\alpha_k$
Freie Kette	$\frac{n^3+2n}{3} s^2$		$ks^2$	$k$
Kette mit Basisbedingung	$\frac{4n^3+5n}{12} s^2$	$\frac{n^3+8n}{12} s^2$	$k(1-\frac{k}{n})s^2$	$k$
Kette mit Azimutbedingung	$\frac{n^3+8n}{12} s^2$	$\frac{4n^3+5n}{12} s^2$	$ks^2$	$1-\frac{k}{n}$
Kette mit Basis- und Azimutbedingung	$\frac{n^3+5n}{12} s^2$		$k(1-\frac{k}{n})s^2$	$1-\frac{k}{n}$

Man gelangt also in allen Fällen zu sehr einfachen, instruktiven Gewichtsformeln, welche auch gestatten, über die Gestalt der Fehlerellipse in  $P$  gewisse wesentliche Aussagen zu machen:

a) für *freie Ketten* erhält man *Fehlerkreise*;<sup>2</sup>

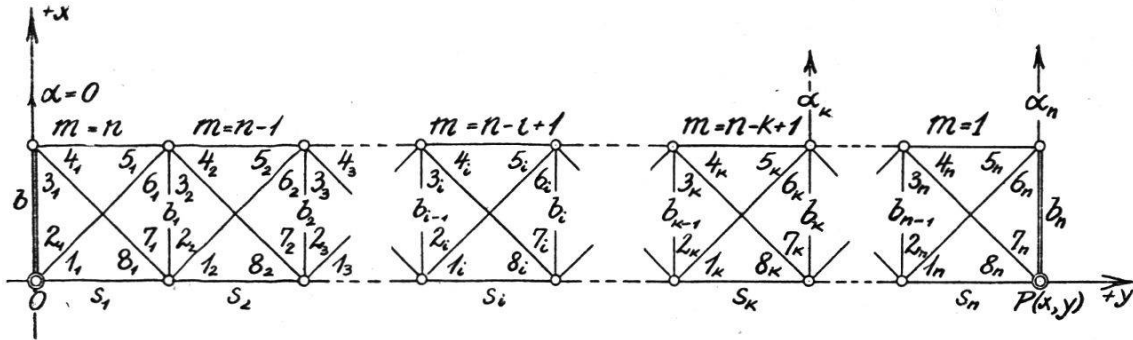
b) die *Basisbedingung* verkleinert die Fehler in der *Kettenlänge* und den einzelnen *Netzstäben*  $b_k$ , beeinflusst jedoch die Querkomponente in viel *geringerem* Ausmaß, das Azimut  $\alpha_k$  des Stabes  $b_k$  überhaupt nicht. Es entsteht daher im Punkte  $P$  eine Fehlerellipse, deren Hauptachse für wachsendes  $n$  mit der Querrichtung der Kette, also der  $x$ -Achsenrichtung zusammenfällt.

c) Die *Azimutbedingung* verkleinert hingegen den *Querfehler* und den Fehler von  $\alpha_k$ , jedoch nur unwesentlich den Fehler der Kettenlänge und überhaupt nicht den des Stabes  $b_k$ . Wichtig ist die Feststellung, daß *die Azimuteinflüsse zahlenmäßig den Basiseinflüssen gleich* sind, nur die *Wirkungsrichtung* ist eine andere. Die Fehlerellipsen sind kongruent, doch fällt die Hauptachse in diesem Falle bei wachsendem  $n$  mit der  $y$ -Achse zusammen. Die Berechnung des mittleren Punktfehlers

<sup>2</sup> Vgl. Dr. Schütz, Fehlerellipsen in schematischen Dreiecksketten, Z. f. Vermessungswesen 1927.

führt demnach im Falle b) und c) zum gleichen Wert. Das mittlere Lagegewicht von  $P$  entsteht in beiden Fällen durch Addition von  $Q_x$  und  $Q_y$  und ist  $Q_P = \frac{5n^3+13n}{12} s^2$ .

d) Im vierten Falle, der *gleichzeitigen Basis- und Azimutbedingung*, stellen sich wegen der Wechselbeziehung zwischen beiden Bedingungen wiederum *Fehlerkreise* ein.



Würde man nun noch unter gleichen Bedingungen eine *Kette gleichseitiger Dreiecke* behandeln, so gelänge man zu vollkommenen Analogien. Läßt man in beiden Fällen  $n$  so lange wachsen bis  $n^2$  und  $n$  gegen  $n^3$  in den Gewichtsformeln vernachlässigt werden können, so zeigt es sich, daß in sämtlichen Fällen das Verhältnis der reziproken Gewichte zwischen den Quadratketten und den erwähnten Dreiecksketten 3:4 beträgt. Die gleichartigen Gewichte verhalten sich daher wie 4:3, stehen also in gleichem Verhältnis wie der jeweilige Arbeitsaufwand einer gleichgewichtigen Winkelmessung. In den Quadratketten sind  $8n$ , in den Dreiecksketten von gleicher Seiten- und Gesamtlänge  $6n$  Winkel zu messen. Der Genauigkeitsgewinn bei Quadratketten wird daher durch den größeren Arbeitsaufwand kompensiert.

### † Louis Bourgeois

1871—1935

Dimanche 23 juin est décédé à Reconvilier d'une maladie de cœur notre collègue Louis Bourgeois, géomètre d'arrondissement. Un grand nombre des ses collègues et amis l'ont accompagné à sa dernière demeure, ainsi que les délégués du comité de la section bernoise et du comité central des Géomètres suisses. Un collègue du Jura adressa à notre ami un dernier adieu au nom de tous, et retraça la carrière bien remplie de celui qui disparaît.

Louis Bourgeois est né en 1871 à Bex, sa commune d'origine. Ayant un goût prononcé pour les mathématiques, il renonça aux études d'instituteur qu'il avait commencées pour faire celles de géomètre au technicum de Winterthour et il eut son diplôme de géomètre vaudois en 1893. Il débuta à Delémont chez le géomètre Froidevaux. A la mort de celui-ci, il en termina les travaux, puis, également, ceux du géomètre Lehmann, de Porrentruy, qui était parti pour l'Amérique. Sur les



