Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Band: 34 (1936)

Heft: 3

Artikel: Essai sur la théorie vectorielle des moindres carrés [suite et fin]

Autor: Bachmann, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-195954

Das ankommende Abwasser passiert zuerst einen Sandfang mit Rechen, in welchem es von schwereren mineralischen und den leichteren sperrigen Stoffen befreit wird. Dann gelangt es in die eigentliche Kläranlage. Dieselbe besteht aus einem rechteckigen Becken, in welches zwei Absetz- oder Klärrinnen eingebaut sind, deren Wände nach unten dachförmig zusammenlaufen und der Länge nach einen Schlitz offen lassen. Das Abwasser tritt unter Tauchwänden in die Absetzrinnen ein und durchfließt dieselben mit ganz geringer Geschwindigkeit. Dabei scheiden sich die im Abwasser vorhandenen ungelösten Schmutzstoffe aus, sinken zu Boden und rutschen durch den Bodenschlitz in den Faulraum. Das so geklärte Wasser fließt dann unter einer Tauchwand hindurch nach dem Ablaufkanal und durch diesen dem Altbach zu.

Der im Faulraum sich ansammelnde Schlamm macht dort einen längeren Faulprozeß durch, wobei, hauptsächlich durch die Tätigkeit von Kleinlebewesen, ein Abbau der organischen Stoffe stattfindet. Der Schlamm geht dabei in eine geruchlose Masse über, welche in einfacher Weise mittels Wasserüberdruck aus dem Faulraum nach einem seitlichen Schlammkanal abgelassen werden kann, von wo er mit natürlichem Gefälle nach dem Pumpensumpf fließt. Von hier kann der Schlamm mittels einer Pumpenanlage entweder direkt nach einer Zapfstelle oder nach den Schlammteichen gepumpt werden, wo er leicht bis zur Stichfestigkeit trocknet.

Der Schlamm besitzt den Dungwert eines guten Stallmistes und wird zweifellos von den Landwirten gerne abgeholt werden.

Die Anlage ist so projektiert, daß sie später leicht erweitert werden kann.

Essai sur la théorie vectorielle des moindres carrés.

(Suite et fin.)

La propagation des erreurs.

Avant de passer au cas général, je considère la fonction

$$Y = AL \quad \text{avec}$$

$$A = z_1\, a_1 + z_2\, a_2 + \ldots . + z_n\, a_n$$

$$L = z_1\, l_1 + z_2\, l_2 + \ldots . + z_n\, l_n$$

Donnons à L un accroissement ΔL

$$Y + \Delta Y = AL + A \cdot \Delta L$$

$$\Delta Y = A \cdot \Delta L$$

$$(\Delta Y)^2 = (A \cdot \Delta L)^2$$

ou bien en posant $\Delta Y = \mu_y$ et $\Delta L = \mu = \pm z_1 \mu_1 \pm z_2 \mu_2 \pm \ldots .$

$$\mu_y{}^2 = (A\mu)^2$$

Si nous introduisons A et μ avec leurs composantes, on obtient:

$$\mu_y^2 = (a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_2 + \ldots\ldots + a_n\,\mu_n)^2$$
$$\approx (a_1\,\mu_1)^2 + (a_2\,\mu_2)^2 + \ldots\ldots + (a_n\,\mu_n)^2$$

Nous négligeons les doubles produits parce que nous admettons que les erreurs sont de nature accidentelle

$$\mu_y^2 = (a_1\,\mu_1)^2 + (a_2\,\mu_2)^2 + \ldots\ldots + (a_n\,\mu_n)^2$$

Considérons à présent le cas général:

$$Y = F\,(L)$$
$$Y + \Delta Y = F\,(L) + F'\,(L)\,\Delta L$$
$$\Delta Y = F'\,(L) \cdot \Delta L$$

Nous voyons par là que le cas général peut être ramené au cas $Y = AL$. La solution est immédiate.

$$\underline{\mu_y^2 = \Big\{F'\,(L)\,\mu\Big\}^2}$$

$$F'\,(L) = z_1\,\frac{\partial F}{\partial l_1} + z_2\,\frac{\partial F}{\partial l_2} + \ldots\ldots + z_n\,\frac{\partial F}{\partial l_n}$$

$$\mu = \pm\, z_1\,\mu_1 \pm z_2\,\mu_2 \pm \ldots\ldots \pm z_n\,\mu_n$$

$$\therefore\; F'\,(L)\,\mu = \pm\,\frac{\partial F}{\partial l_1}\,\mu_1 \pm \frac{\partial F}{\partial l_2}\,\mu_2 \pm \ldots\ldots \pm \frac{\partial F}{\partial l_n}\,\mu_n$$

$$\mu_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\,\mu_1\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\,\mu_2\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\,\mu_n\right)$$

Calcul de l'erreur moyenne de la moyenne arithmétique.

La moyenne arithmétique est donné par

$$x = \frac{1}{n}\,z\,L$$

L'erreur moyenne de l'une quelconque des n mesures est

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2}{n-1}}$$

Pour trouver l'erreur à craindre sur la moyenne arithmétique, nous n'avons qu'à appliquer la loi de la propagation des erreurs.

$$\frac{dx}{dL} = \frac{1}{n}\,z$$

$$\mu_x^2 = \left(\frac{dx}{dL}\,\mu\right)^2 = \frac{1}{n^2}\,z^2\,\mu^2 = \frac{1}{n}\,\mu^2$$

$$\underline{\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}}$$

Remarque:

Pour la recherche de l'erreur moyenne dans le cas d'observations d'inégale précision, la méthode vectorielle diffère très peu de la méthode ordinaire et c'est pour cette raison que je ne la traite pas.

Les observations médiates.

Considérons le cas de trois inconnues, les observations ayant le même poids. Nous avons l'équation aux erreurs:

$$v = ax + by + cz + l$$

avec

$$\begin{aligned} a &= z_1\, a_1 + z_2\, a_2 + \ldots . + z_n\, a_n \\ b &= z_1\, b_1 + z_2\, b_2 + \ldots . \\ c &= \ldots . \\ l &= \ldots . \end{aligned}$$

C'est une équation vectorielle à n dimensions. Introduisons des nombres vectoriels du second ordre

$$A = z_1\, a + z_2\, b + z_3\, c \qquad \text{II}^{\text{ième}} \text{ ordre}$$

$$X = z_1\, x + z_2\, y + z_3\, z \qquad \text{I}^{\text{ier}} \text{ ordre}$$

L'équation aux erreurs devient:

$$v = AX + l$$

Il nous faut déterminer X de façon à ce que v^2 soit minimum, donc

$$v^2 = (AX)^2 + (AX)\, l + l^2$$

$$\frac{dv^2}{2\,dx} = (AX)\, A + Al = 0$$

$$\underline{(AX + l)\, A = 0}$$

C'est donc l'équation normale. Si nous introduisons A et X avec leurs composantes, on obtient:

$$(ax + by + cz + l)\,(z_1\, a + z_2\, b + z_3\, c) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} aax + aby + acz + al &= 0 \\ abx + bby + bcz + bl &= 0 \\ acx + bcy + ccz + cl &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le cas d'observation d'inégale précision se traite absolument de la même façon si l'on pose:

$$\begin{aligned} a &= z_1 \sqrt{p_1}\, a_1 + z_2 \sqrt{p_2}\, a_2 + \ldots . \\ b &= \ldots . \end{aligned}$$

Remarque:

Si l'équation aux erreurs n'est pas linéaire, on la développe en série; le développement étant absolument le même que pour le cas d'une seule variable.

$$\begin{aligned} v &= F\,(X) + l \\ v &= F\,(X_0 + \Delta X) + l \\ v &\approx F\,(X_0) + F'\,(X_0)\, \Delta X + l \end{aligned}$$

La dérivée $F'(X_0)$ s'appelle le gradient de $F(x)$ et on l'emploic surtout dans le calcul vectoriel à trois dimensions.

$$F'(X_0) = \text{grad } F(X_0) = \Delta F(X_0)$$

Observations conditionnelles.

Pour fixer les idées, considérons le cas de 4 observations l_1, l_2, l_3, l_4 et de trois équations de condition; on a:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

ou bien sous forme vectorielle

$$\begin{cases} AX + a_0 = 0 \\ BX + b_0 = 0 \\ CX + c_0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} X &= z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 + z_4 x_4 \\ A &= z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + z_4 a_4 \\ B &= z_1 b_1 + \ldots . \\ C &= z_1 c_1 + \ldots . \end{aligned}$$

Les trois équations de condition peuvent être remplacées par une seule équation vectorielle qui est:

$$KX + m = 0$$

en posant:

$$\begin{aligned} K &= z_1 A + z_2 B + z_3 C \\ m &= z_1 a_0 + z_2 b_0 + z_3 c_0 \end{aligned}$$

Dans ce cas on a en effet:

$$KX + m = z_1 AX + z_3 BX + z_3 CX + z_1 a_0 + z_2 b_0 + z_3 c_0 = 0$$

c. q. f. d.

Introduisons à présent les valeurs observées, soit l_1 l_2 .... l_n
Nous avons:

$$X = L + v$$

$$KL + m = w \qquad w = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$$

$$K(L + v) = -m$$

$$\therefore \underline{K v + w = 0}$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de condition aux corrections. Il nous faut donc déterminer v de façon à ce que l'équation de condition soit vérifiée et qu'on ait en outre, en considérant des observations de même poids: v^2 = minimum. Les conditions à remplir sont donc

$$Kv + w = 0$$

$$v^2 = \text{Minimum}$$

Nous formons l'équation suivante:

$$F = v^2 + \lambda\,(Kv + w)$$

avec $\lambda = z_1\,\lambda_1 + z_2\,\lambda_2 + z_3\,\lambda_3$

v doit donc vérifier les conditions suivantes:

$$F' = 0$$
$$Kv + w = 0$$

donc

$$2v + \lambda K = 0$$
$$Kv + w = 0$$

Posons pour simplifier $\lambda = -2k$ ce qui nous donne:

$$v = kK$$

et en introduisant la valeur de v dans la seconde équation:

$$\underline{K \cdot (kK) + w = 0} \qquad \text{équation corrélative}$$

Cette équation nous permettra de trouver k et à l'aide de $v = kK$ nous détermineront v, ce qui nous permettra de trouver l'inconnue X au moyen de la relation $X = L + v$. Nous retrouvons facilement les formules classiques en introduisant K, k et w avec leurs composantes; on a:

$$K = z_1\,A + z_2\,B + z_3\,C$$
$$k = z_1\,k_1 + z_2\,k_2 + z_3\,k_3$$
$$w = z_1\,w_1 + z_2\,w_2 + z_3\,w_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} AAk_1 + ABk_2 + ACk_3 + w_1 = 0 \\ ABk_1 + BBk_2 + BCk_3 + w_2 = 0 \\ ACk_1 + BCk_2 + CCk_3 + w_3 = 0 \end{array}\right.$$

Lausanne, le 2 janvier 1936. *W. Bachmann.*

Ueber eine neue selbstreduzierende Kippregel der Firma Kern & Cie., A.-G., Aarau.

Von *W. Leemann*, Kantonsgeometer, Zürich.

An verschiedenen *Tachymeter-Theodoliten** sind z. T. schon vor längerer Zeit Einrichtungen zur direkten Ablesung der reduzierten Entfernungen und Höhenunterschiede an vertikal aufgestellter Latte angebracht worden, dagegen fehlte es bis heute an einer selbstreduzierenden *Kippregel*. Die Firma *Kern & Cie.* hatte zwar bereits im Jahre 1918 auf Anregung des Verfassers einen „Autoréducteur" für den Meßtisch konstruiert, doch vermochte sich dieses Instrument nicht durchzusetzen. Der Grund hiefür dürfte vornehmlich darin gelegen haben,

* Vgl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrg. 1898, S. 241, 1900, S. 32, 1902, S. 21 (Tachymeter Hammer-Fennel) und Jahrg. 1931, S. 579, sowie 1932, S. 38 (Theodolit Butenschön).