Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 36 (1938)

Heft: 2

Artikel: Zur Berechnung der Flächenverzerrung bei der winkeltreuen Zylinderprojektion

Autor: Kobold, F. v.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-197291

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

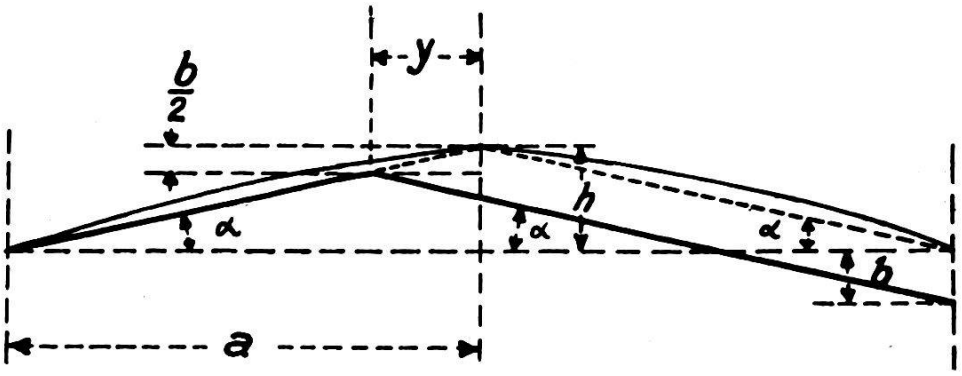
Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine ähnliche Aufgabe ergibt sich, wenn bei einer Straße die beiden Randsteine im nämlichen Profil nicht auf gleicher Höhe sind. Wenn die Ueberhöhung b ist, so erhalten wir die Verschiebung y des Scheitels von der Straßenachse nach Figur 2:

$$y = \frac{a\,\frac{b}{2}}{h} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{h}{a}} = \frac{\frac{b_{cm}}{2}}{\%}$$

Fig. 2.



wobei $\frac{h}{a}$ das Quergefälle darstellt. Es ergibt sich demnach für die Verschiebung die jedem Arbeiter leicht zu behaltende Formel:

Verschiebung von der Achse gegen den höher gelegenen Randstein = halbe Ueberhöhung in cm geteilt durch Anzahl %. Zum Beispiel: Ueberhöhung = 10 cm, Quergefälle = 4 %; also Verschiebung $\frac{5}{4} = 1.25$ m. Zugleich ist der Scheitel um $h - \frac{b}{2}$ höher als der höhere Wasserlauf gelegen.

Zürich, den 27. Januar 1938.

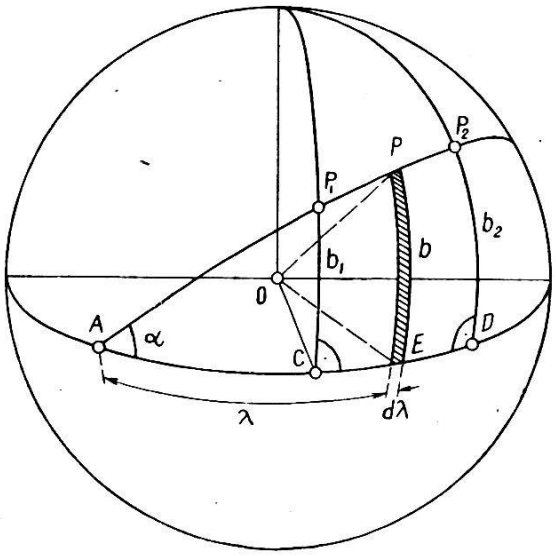
Henri Huber, Adj. d. Str.-Insp.

Zur Berechnung der Flächenverzerrung bei der winkeltreuen Zylinderprojektion.

Von Dipl.-Ing. *F. v. Kobold*, Bern.

Herr Kantonsgeometer Leemann hat in einer im Jahrgang 1934 dieser Zeitschrift veröffentlichten Studie untersucht, welche Verzerrung ein auf der Kugel gelegenes Flächenstück durch winkeltreue Projektion auf einen die Kugel berührenden Zylinder erleidet. Der Gedankengang dieser Herleitung, die von einem sogenannten Kugeltrapez ausgeht, ist kurz folgender:

Von der in Figur 1 dargestellten Kugelfläche P_1CDP_2 wird vorausgesetzt, daß ihre Grundlinie CD im Berührungskreis des Zylinders und ihre Seiten b_1 und b_2 in dazu senkrechten Großkreisen liegen. Auch der Bogen P_1P_2 sei ein Stück eines Großkreises. Dieses Kugeltrapez erscheint auf dem abgewickelten Zylinder als ebene Fläche $P_1'C'D'P_2'$ (Figur 2), die durch die Geraden $P_1'C'$, $C'D'$, $D'P_2'$ und das leicht gekrümmte Bogenstück $P_1'P_2'$ eingeschlossen wird. Für alle Berechnungen mit ebenen Koordinaten wird der Bogen $P_1'P_2'$ durch die Gerade $P_1'P_2'$ ersetzt, indem man die Winkel bei P_1' und P_2', die der winkeltreuen Projektion wegen gleich den sphärischen Winkeln bei P_1 und P_2 sind, um die Beträge d_1 und d_2 — sogenannte Azimutreduktionen — verkleinert. Demgemäß werden auch für alle Flächenrechnungen die projizierten Großkreisbogen durch Gerade ersetzt, so daß dem Bogen P_1P_2 des Kugeltrapezes die Gerade $P_1'P_2'$ in der ebenen Projektion entspricht. Die Differenz zwischen dem rektifizierten, ebenen Trapez und dem Kugeltrapez ist die zu untersuchende Flächenverzerrung.



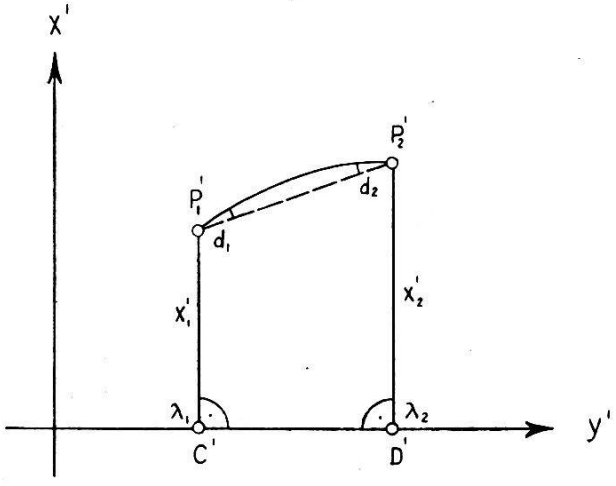
Figur 1

Die Winkelsumme des Kugeltrapezes, die in dem nicht rektifizierten Zylindertrapez erhalten bleibt, beträgt:

$$2\,\pi + \epsilon$$

worin ϵ den sphärischen Exzeß bedeutet, der sich bekanntlich aus dem Flächeninhalt F berechnen läßt zu

$$\text{arc}\,\epsilon = \frac{F}{R^2}$$



Figur 2

Anderseits beträgt die Winkelsumme des nicht rektifizierten Zylindertrapezes

$$2\,\pi + d_1 + d_2$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Beziehung

$$F_K = R^2\,(d_1 + d_2)$$

Setzt man hier die Ausdrücke für d_1 und d_2, wie sie Jordan III oder Rosenmund geben, ein, so erhält man die Kugel-

trapezfläche ohne weiteres als Summe der ebenen Trapezfläche und der gesuchten Verzerrung.

Diese, von Herrn Leemann gegebene Lösung ist äußerst elegant, sie setzt aber die Richtigkeit der nicht einfach herzuleitenden Formeln für d_1 und d_2 voraus.

Man kann die gesuchte Flächenverzerrung auch auf elementarerem, allerdings umständlicherem Wege herleiten, indem die Differenz der Flächeninhalte des Zylinder- und des Kugeltrapezes direkt gebildet wird. Dies soll im folgenden gezeigt werden. — Dabei genügt bei den Reihenentwicklungen die Mitnahme von Gliedern bis und mit der dritten Ordnung, und ferner sei der Kugelradius zunächst gleich eins angenommen.

1. *Berechnung der Fläche des Kugeltrapezes.*

Das Kugeltrapez CDP_2P_1 setzt sich aus unendlich vielen Kugel-Differentialtrapezen von der Grundlinie $d\lambda$ und der mittlern Höhe b zusammen. Die Fläche eines solchen läßt sich leicht berechnen. Bildet man nämlich eine beliebige, auf der Kugel gelegene Fläche auf einen, die Kugel berührenden Zylinder so ab, daß alle Projektionsstrahlen senkrecht zur Zylinderachse stehen, so sind Originalfläche und Abbildung einander flächengleich. Dieser Satz, der aus den Elementen der Stereometrie hervorgeht, soll mit der Tissot'schen Indikatrix wie folgt bestätigt werden.

Bekanntlich sind Abbildung und Original einander flächengleich, wenn das Produkt der Vergrößerungsverhältnisse für die zwei Hauptachsen eines beliebigen Punktes gleich eins ist. Da sich Meridian und Parallelkreis auch in der Projektion rechtwinklig schneiden, stellen sie die Hauptachsen dar.

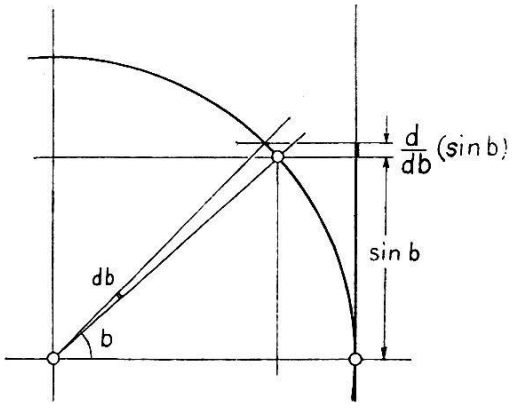
Das Vergrößerungsverhältnis im Meridian wird (siehe Figur 3)

$$B = \frac{db \cos b}{db} = \cos b,$$

und das Vergrößerungsverhältnis im Parallelkreis ergibt

$$A = \frac{d\lambda}{d\lambda \cos b} = \frac{1}{\cos b},$$

das Produkt der beiden ist somit gleich eins.



Figur 3

Die Kugeldifferentialtrapeze werden daher durch die flächentreue Abbildung zu Zylinder-Differentialtrapezen von der Grundlinie $d\lambda$ und der mittlern Höhe sin b, ihr Inhalt beträgt also

$$dF_K = \sin b \cdot d\lambda$$

und der Inhalt des Kugeltrapezes wird daher

$$F_K = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin\, b \cdot d\lambda \tag{1}$$

Es werde nun der Winkel, den der Großkreis durch P_1 und P_2 mit dem Grundkreis einschließt, mit a bezeichnet und die Länge λ vom Scheitelpunkt A aus gezählt. Dann folgt aus dem rechtwinkligen, sphärischen Dreieck APE für b, das in Gleichung (1) als Funktion von λ einzusetzen ist

$$\operatorname{tg}\, b = \sin\, \lambda \operatorname{tg}\, a$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\operatorname{tg}\, a = a$$

und entwickelt b und λ in Reihen, so wird

$$\operatorname{tg}\, b = b + \frac{b^3}{3} + \ldots = a\lambda - \frac{a\lambda^3}{6} + \ldots \tag{2a}$$

$$b = a\lambda - \frac{a\lambda^3}{6} - \frac{a^3\lambda^3}{3} \tag{2b}$$

Damit erhält man für den in (1) benötigten sin b

$$\sin\, b = a\lambda - \frac{a\lambda^3}{6} - \frac{a^3\lambda^3}{2} \tag{2c}$$

und der Inhalt des Kugeltrapezes wird nach (1)

$$F_K = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(a\lambda - \frac{a\lambda^3}{6} - \frac{a^3\lambda^3}{2}\right) d\lambda$$

Die Integration ergibt

$$F_K = \frac{a}{2}(\lambda^2{}_2 - \lambda^2{}_1) - \frac{a}{24}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) - \frac{a^3}{8}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) \tag{3}$$

Da für $\lambda = 0$ auch $F = 0$ sein muß, beträgt die Integrationskonstante 0.

2. *Berechnung der Fläche des Zylindertrapezes.*

Nach Figur 2 wird die ebene Zylindertrapezfläche $C'D'P_2'P_1'$

$$F_Z = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)(x_2' + x_1') \tag{4}$$

worin nach dem Gesetz für die winkeltreue Zylinderprojektion zu setzen ist:

$$x_1' = \int_0^{b_1} \frac{db}{\cos\, b} \qquad x_2 = \int_0^{b_2} \frac{db}{\cos\, b} \tag{4a}$$

$$x' = \int \frac{db}{\cos\, b} = \int \left(1 + \frac{b^2}{2} - \ldots.\right) db = b + \frac{b^3}{6} \ldots.$$

Der Inhalt der Trapezfläche wird somit

$$F_Z = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\left\{(b_2 + b_1) + \frac{1}{6}(b^3{}_2 + b^3{}_1)\right\} \qquad (5)$$

3. *Berechnung der Trapezflächenverzerrung ΔF.*

Die Differenz der Ausdrücke (5) und (3) gibt die gesuchte Flächenverzerrung

$$F_Z - F_K = \Delta F = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\left\{(b_2 + b_1) + \frac{1}{6}(b^3{}_2 + b^3{}_1)\right\}$$

$$- \frac{a}{2}(\lambda^2{}_2 - \lambda^2{}_1) + \frac{a}{24}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) + \frac{a^3}{8}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) \qquad (6)$$

Unter Berücksichtigung, daß für Glieder höherer Ordnung $a \cdot \lambda = b$ gesetzt werden darf, folgt aus (2b)

$$a(\lambda_2 + \lambda_1) = (b_2 + b_1) + \frac{a}{6}(\lambda^3{}_2 + \lambda^3{}_1) + \frac{1}{3}(b^3{}_2 + b^3{}_1)$$

Hier läßt sich das Glied mit a^3 in folgender Art umformen

$$\frac{a^3}{8}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) = \frac{a^3}{4}\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda^2{}_2 + \lambda^2{}_1) =$$

$$= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{8}\left\{b^3{}_2 + b_1 b^2{}_2 + b_2 b^2{}_1 + b^3{}_1\right\}$$

Damit gehen die vom Kugeltrapez herrührenden Glieder über in

$$- \frac{a}{2}(\lambda^2{}_2 - \lambda^2{}_1) + \frac{a}{24}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) + \frac{a^3}{8}(\lambda^4{}_2 - \lambda^4{}_1) =$$

$$= - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}(b_2 + b_1) - \frac{a}{12}\lambda^4{}_2 - \frac{a}{12}\lambda_2 \lambda^3{}_1 + \frac{a}{12}\lambda^3{}_2 \lambda_1 + \frac{a}{12}\lambda^4{}_1$$

$$+ \frac{a}{24}\lambda^4{}_2 \qquad - \frac{a}{24}\lambda^4{}_1$$

$$- \frac{1}{3}\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}(b^3{}_2 + b^3{}_1) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{8}(b^3{}_2 + b_1 b^2{}_2 + b_2 b^2{}_1 + b^3{}_1)$$

$$= - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}(b_2 + b_1) - \frac{a}{24}\left[(\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^3\right]$$

$$- \frac{1}{3}\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}(b^3{}_2 + b^3{}_1) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{8}(b^3{}_2 + b_1 b^2{}_2 + b_2 b^2{}_1 + b^3{}_1)$$

Schließlich wird die Differenz ΔF

$$\Delta F = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)(b_2 + b_1) + \frac{1}{24}(\lambda_2 - \lambda_1)(2\,b^3{}_2 + 2\,b^3{}_1)$$

$$- \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)(b_2 + b_1) - \frac{1}{24}(\lambda_2 - \lambda_1)(4\,b^3{}_2 + 4\,b^3{}_1)$$

$$+ \frac{1}{24}(\lambda_2 - \lambda_1)(3\,b^3{}_2 + 3\,b^3{}_1) +$$

$$+ \frac{1}{24}(\lambda_2 - \lambda_1)(3\,b_1\,b^2{}_2 + 3\,b_2\,b^2{}_1) - \frac{1}{24}(b_2 + b_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^3$$

$$\Delta F = + \frac{1}{24}(\lambda_2 - \lambda_1)\left\{(b^3{}_2 + b^3{}_1) + 3\,b_1\,b^2{}_2 + 3\,b_2\,b^2{}_1\right\}$$

$$- \frac{1}{24}(b_2 + b_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^3$$

$$\Delta F = \frac{1}{24}\left\{(\lambda_2 - \lambda_1)(b_2 + b_1)^3 - (b_2 + b_1)(\lambda_2 - \lambda_1)^3\right\} \qquad (7)$$

Die Gleichung (7) gibt die Flächenverzerrung als Funktion von Länge und Breite für eine Kugel vom Radius 1. Für eine Kugel vom Radius R ist der Ausdruck mit R^2 zu multiplizieren, und wenn man ferner y' und x' einführt an Stelle der λ und b, entsprechend den Ausdrücken

$$y' = \lambda \cdot R \qquad\qquad x' = R\left(b + \frac{b^3}{6} \ldots .\right)$$

so wird die Flächenverzerrung

$$\Delta F = \frac{1}{24\,R^2}\left\{(y'_2 - y'_1)(x'_2 + x'_1)^3 - (x'_2 + x'_1)(y'_2 - y'_1)^3\right\} \qquad (8)$$

vollständig übereinstimmend mit der von Herrn Leemann angegebenen Formel.

Im Anschluß an eine Studie von Herrn Stadtgeometer Bertschmann über die praktisch auftretenden Beträge der Flächenverzerrung hat Herr Prof. Dr. Baeschlin im Jahrgang 1935 dieser Zeitschrift die Flächenverzerrung eines Rechteckes untersucht. Man kann die dort ermittelten Ausdrücke auch leicht aus den soeben dargelegten herleiten.

Vernachlässigt man nämlich in (8) das zweite Glied, so lautet der Ausdruck für die Flächenverzerrung eines Rechteckes, dessen Seiten parallel zu der x- und y-Achse liegen, und dessen Ecken infolgedessen die Koordinaten

$$y_a, x_a \quad - \quad y_b, x_a \quad - \quad y_b, x_b \quad - \quad y_a, x_b$$

haben

$$\Delta F = \frac{1}{24\,R^2}(y_B - y_A)\,(2\,x_B)^3 - \frac{1}{24\,R^2}(y_B - y_A)\,(2\,x_A)^3$$

$$= \frac{1}{3\,R^2}(y_B - y_A)\,(x^3{}_B - x^3{}_A)$$

$$= \frac{1}{3\,R^2}(y_B - y_A)\,(x_B - x_A)\,(x^2{}_B + x_B\,x_A + x^2{}_A)$$

Das Verhältnis des Zylinderrechtecks zum Kugelrechteck wird daher

$$\frac{Fz}{F_K} = 1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 + \frac{1}{3\,R^2}(x^2{}_B + x_B\,x_A + x^2{}_A) \qquad (9)$$

identisch mit Formel (6) von Herrn Prof. Baeschlin.

An Stelle dieser strengen Formel hat Herr Stadtgeometer Bertschmann die Differentialrechteckverzerrung für den Mittelpunkt des Rechteckes verwendet. Ein Kugeldifferentialrechteck von den Seitenlängen

$$d\lambda \cdot \cos b,\ db$$

geht durch winkeltreue Projektion entsprechend den Gleichungen (4b) über in ein Rechteck von den Seiten

$$d\lambda,\ \frac{db}{\cos b}$$

Das Differentialflächenverhältnis wird daher

$$f = \frac{d\lambda \cdot db}{d\lambda \cdot db \cdot \cos^2 b} \sim \frac{1}{1 - b^2} \sim 1 + b^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2}$$

Wendet man diese Formel auf endliche Flächen an, indem man

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

setzt, so wird

$$fx_m = 1 + \frac{1}{4\,R^2}(x^2{}_B + 2\,x_B\,x_A + x^2{}_A) \qquad (10)$$

Bildet man nun die Differenz zwischen der genauen Formel (9) und der genäherten (10), so wird der Fehler der Rechteckverzerrung, der wegen der Anwendung der Differentialformel auf endliche Flächen entsteht

$$\delta\Delta F = \frac{Fz}{F_K} - fx_m = \frac{1}{12\,R^2}(x_B - x_A)^2 \qquad (11)$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem von Herrn Prof. Baeschlin gegebenen Schlußausdruck.

Der Gauß'sche Beweis des Satzes von Legendre.

Von den zahlreichen Beweisen, die über den *Satz von Legendre* in der Fachliteratur zu finden sind, dürfte unzweifelhaft derjenige am interessantesten sein, den *Carl Friedrich Gauß* erstmals seinem ehe-