Der Gauss'sche Beweis des Satzes von Legendre

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **36 (1938)**

Heft 2

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-197292

$$\Delta F = \frac{1}{24 R^2} (y_B - y_A) (2 x_B)^3 - \frac{1}{24 R^2} (y_B - y_A) (2 x_A)^3$$

$$= \frac{1}{3 R^2} (y_B - y_A) (x^3{}_B - x^3{}_A)$$

$$= \frac{1}{3 R^2} (y_B - y_A) (x_B - x_A) (x^2{}_B + x_B x_A + x^2{}_A)$$

Das Verhältnis des Zylinderrechtecks zum Kugelrechteck wird daher

$$\frac{Fz}{F_K} = 1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 + \frac{1}{3 R^2} (x^2{}_B + x_B x_A + x^2{}_A) \tag{9}$$

identisch mit Formel (6) von Herrn Prof. Baeschlin.

An Stelle dieser strengen Formel hat Herr Stadtgeometer Bertschmann die Differentialrechteckverzerrung für den Mittelpunkt des Rechteckes verwendet. Ein Kugeldifferentialrechteck von den Seitenlängen

$$d\lambda \cdot \cos b, \ db$$

geht durch winkeltreue Projektion entsprechend den Gleichungen (4b) über in ein Rechteck von den Seiten

$$d\lambda, \ \frac{db}{\cos b}$$

Das Differentialflächenverhältnis wird daher

$$f = \frac{d\lambda \cdot db}{d\lambda \cdot db \cdot \cos^2 b} \sim \frac{1}{1 - b^2} \sim 1 + b^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2}$$

Wendet man diese Formel auf endliche Flächen an, indem man

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

setzt, so wird

$$f x_m = 1 + \frac{1}{4 R^2} (x^2{}_B + 2 x_B x_A + x^2{}_A) \tag{10}$$

Bildet man nun die Differenz zwischen der genauen Formel (9) und der genäherten (10), so wird der Fehler der Rechteckverzerrung, der wegen der Anwendung der Differentialformel auf endliche Flächen entsteht

$$\delta \Delta F = \frac{Fz}{F_K} - f x_m = \frac{1}{12 R^2} (x_B - x_A)^2 \tag{11}$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem von Herrn Prof. Baeschlin gegebenen Schlußausdruck.

Der Gauß'sche Beweis des Satzes von Legendre.

Von den zahlreichen Beweisen, die über den *Satz von Legendre* in der Fachliteratur zu finden sind, dürfte unzweifelhaft derjenige am interessantesten sein, den *Carl Friedrich Gauß* erstmals seinem ehemaligen Schüler *Christian Ludwig Gerling* am 24. Oktober 1840 mitteilte[1]. Es heißt in jenem Briefe wörtlich:

„Die evidenteste Art, den Legendre'schen Satz zu beweisen ist, daß man die drei Winkel des sphärischen Dreiecks nicht, wie gewöhnlich geschieht, mit A, B, C, sondern mit $A + w$, $B + w$, $C + w$ bezeichnet, so daß $3\,w$ der sogenannte sphärische Excess ist, die Seiten wie gewöhnlich mit a, b, c. Es ist dann nach bekannten Sätzen

$$\sin \frac{1}{2} a^2 = \frac{\sin \frac{3}{2} w \cdot \sin \left(A - \frac{1}{2} w\right)}{\sin (B + w) \sin (C + w)} .$$

$$\cos \frac{1}{2} a^2 = \frac{\sin \left(B - \frac{1}{2} w\right) \cdot \sin \left(C - \frac{1}{2} w\right)}{\sin (B + w) \sin (C + w)} ,$$

woraus leicht (die Zwischenverwandlungen, die von selbst evident sind, übergehe ich) folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot K,$$

wo

$$K = \sqrt[3]{\frac{a^3 \cos \frac{1}{2} a}{8 \sin \frac{1}{2} a^3} \cdot \frac{8 \sin \frac{1}{2} b^3}{b^3 \cos \frac{1}{2} b} \cdot \frac{\sin (A + w) \sin \left(A - \frac{1}{2} w\right)^2}{\sin A^3} \cdot \frac{\sin B^3}{\sin (B + w) \sin \left(B - \frac{1}{2} w\right)}} .$$

Diese Formel ist streng richtig, und man erkennt sogleich, daß jeder der vier Faktoren, woraus K^3 besteht, von der Einheit nur um Größen 4. Ordnung abweicht, wenn a, b, c von der ersten, also w von der zweiten; die Teile von der 4. Ordnung selbst werden:

$$\log \frac{a \sin B}{b \sin A} = \frac{b^4 - a^4}{\pi} + \frac{w\,w}{4} \left(\frac{1}{\sin B^2} - \frac{1}{\sin A^2}\right).\text{“}$$

Dieser knappen Beweisführung fügt Gauß noch bei: „Ich wünsche, daß Sie vorderhand hievon einen öffentlichen Gebrauch nicht machten, da ich bei vorkommender Gelegenheit dies wohl selbst tun möchte, was natürlich unterbleiben wird, wenn es irgendwo sonst schon gedruckt ist.“

Gauß hat dann im Jahre 1841 im *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (herausgegeben von A. L. Crelle) den Beweis in etwas ausführlicherer Form veröffentlicht. Ich gebe seine Ausführungen ebenfalls ungekürzt wieder:

---

[1] Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Christian Ludwig Gerling. Otto Elsner Verlagsgesellschaft m. b. H. Berlin.

„*Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie.* (Von dem Herrn Hofrath, Professor etc. Dr. Gauß in Göttingen.)

Sphärische Dreiecke mit kleinen Seiten darf man wie ebene behandeln, wenn man die sphärischen Winkel jeden um den dritten Theil des ganzen sphärischen Excesses vermindert. Die Befugnis dazu läßt sich ganz elementarisch auf folgende Art nachweisen.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines sphärischen Dreiecks mit $3\,w$; die drei Seiten mit a, b, c, und die ihnen gegenüberstehenden sphärischen Winkel mit $A + w$, $B + w$, $C + w$, so erhalten ein Paar bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin\frac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\frac{3}{2}w \sin\left(A - \frac{1}{2}w\right)}{\sin(B+w)\sin(C+w)},$$

$$\cos\frac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\left(B - \frac{1}{2}w\right)\sin\left(C - \frac{1}{2}w\right)}{\sin(B+w)\sin(C+w)},$$

aus deren Verbindung folgt .

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^6}{\cos\frac{1}{2}a^2} = \frac{\sin\frac{3}{2}w^3 \sin\left(A - \frac{1}{2}w\right)^3}{\sin(B+w)^2\sin\left(B - \frac{1}{2}w\right)\sin(C+w)^2\sin\left(C - \frac{1}{2}w\right)};$$

auf gleiche Weise wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}b^6}{\cos\frac{1}{2}b^2} = \frac{\sin\frac{3}{2}w^3 \sin\left(B - \frac{1}{2}w\right)^3}{\sin(A+w)^2\sin\left(A - \frac{1}{2}w\right)\sin(C+w)^2\sin\left(C - \frac{1}{2}w\right)}.$$

Indem man diese beiden Gleichungen miteinander dividiert und dann die Quadratwurzel auszieht, ergibt sich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^3}{\cos\frac{1}{2}a} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b^3} = \frac{\sin(A+w)\sin\left(A - \frac{1}{2}w\right)^2}{\sin(B+w)\sin\left(B - \frac{1}{2}w\right)^2}.$$

Man kann diese Gleichung auch in die Form setzen

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \sqrt[3]{D},$$

wo zur Abkürzung D anstatt

$$\frac{a^3 \cos\frac{1}{2}a}{8\sin\frac{1}{2}a^3} \cdot \frac{8\sin\frac{1}{2}b^3}{b^3\cos\frac{1}{2}b} \cdot \frac{\sin(A+w)\sin\left(A-\frac{1}{2}w\right)^2}{\sin A^3}$$

$$\cdot \frac{\sin B^3}{\sin(B+w)\sin\left(B-\frac{1}{2}w\right)^2}$$

geschrieben ist. Diese Formel ist strenge richtig: man sieht aber sofort, daß wenn a, b, c sehr klein sind, und als Größen erster Ordnung betrachtet werden, jeder der vier Faktoren, aus denen D zusammengesetzt ist, von der Einheit nur um Größen vierter Ordnung abweicht.

Nach allgemeineren Prinzipien ist dieser Gegenstand abgehandelt, und auf die Dreiecke ausgedehnt, die auf irgend welchen krummen Flächen zwischen kürzesten Linien gebildet werden in meinen Disquisitiones generalis circa superficies curbas.“

(Das letzte Alinea habe ich nur der Vollständigkeit halber hingesetzt. Es dürfte hier kaum weiter in Betracht fallen.)

Wie man sieht, weicht die Gauß'sche Beweisführung von der üblichen, aus den Lehrbüchern allgemein bekannten wesentlich ab. Dort geht man gewöhnlich vom Cosinussatz (oder auch von anderen Sätzen) des sphärischen und ebenen Dreiecks aus und beweist, daß die Unterschiede der entsprechenden Winkel der beiden Dreiecke je einem Drittel des sphärischen Exzesses sehr nahe gleich sind. Gauß hingegen führt von vornherein im sphärischen Dreieck solche Winkel ein, die je um $\frac{1}{3}$ des Exzesses größer sind, als die korrespondierenden Winkel des ebenen Dreiecks. Sodann weist er nach, daß, abgesehen von Größen vierter Ordnung, der Sinussatz des ebenen Dreiecks auch auf das sphärische Dreieck angewendet werden darf.

Der Unterzeichnete glaubte das Vorstehende einem weiteren Leserkreis zur Kenntnis bringen zu sollen, weil die angegebenen Quellen nicht allgemein bekannt und vielen Geometern nicht ohne weiteres zugänglich sind.

Gauß nennt seine Ableitungen „ganz elementarisch“, es sind aber darin doch einige Sprünge vorhanden, die nicht ganz leicht zu überbrücken sind und gewiß den einen oder anderen der Leser zum Studium anregen. Etwas auffallend ist es, daß Gauß in seinem veröffentlichten Beweis die im Briefe an Gerling enthaltene Angabe der Glieder vierter Ordnung, um welche log K von der Null abweicht, wegläßt. Die Herleitung dieser Glieder würde sicher von besonderem Interesse sein. Vielleicht werden durch diese Mitteilungen einige Kollegen dazu aufgemuntert, die fehlende Entwicklung durchzuführen und hier bekannt zu geben.

Zürich, den 31. Dezember 1937. *W. Leemann.*

Nachschrift der Redaktion. Die Schreibweise der Formeln ist im vorstehenden die originell Gauß'sche. Sie weicht von der heute gebräuchlichen etwas ab. Wir schreiben z. B. $\sin\frac{1}{2}a^2 = \sin^2\frac{a}{2}$; $\sin B^3 = \sin^3 B$ etc. Die Größen K und D sind identisch.