Der Gauss'sche Beweis des Legendreschen Satzes

Autor(en): **Schmehl, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **36 (1938)**

Heft 4

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-197301

wird beim Radieren glänzend, nimmt aber die Zeichnung gleich gut an. Die radierten Stellen sind gut sichtbar und wirken auf dem ganzen Blatt unansehnlich. Sie können mit Sandstrahlgebläse nachmattiert werden, es besteht aber die Gefahr, daß die nachmattierte Stelle wellig wird. Mineralsäure und Salzsäure greifen das Zellon nicht an, dagegen darf es nicht mit Benzol, Alkohol und Azeton in Verbindung gebracht werden.

Der Vollständigkeit halber seien noch zwei Produkte aus der Kunstharzindustrie erwähnt. Das Plexiglas ist ein Acrylharz und wird in der Chemischen Fabrik Röhm & Haas in Darmstadt fabriziert. Es hat die klare Durchsichtigkeit des Silikatglases, ist leichter im Gewicht und in der Bearbeitung, neigt aber zu Schrammenbildung. Das Astralon ähnelt in seinen Eigenschaften dem Plexiglas, ist aber schwerer und noch weicher als dieses. Es wird in der Dynamit A.-G. vorm. Alfred Nobel & Co. in Troisdorf bei Köln hergestellt. Beide Erzeugnisse haben den Vorteil geringer Entflammbarkeit. Neigung zu Wellung haben die Kunstharze nicht, werden aber, da sie aus organischen Stoffen hergestellt sind, auf Temperatur- und Feuchtigkeitseinflüsse reagieren. Da beide Erzeugnisse eine polierte Oberfläche haben, sind beim Zeichnen die gleichen Gesichtspunkte wegleitend wie beim Zellon. Beide Produkte sind Erzeugnisse der neuesten Zeit, über die Haltbarkeit hat man deshalb noch keine Erfahrungen.

Ich bin mir bewußt, daß ich ein Kapitel angeschnitten habe, das überall wohl bekannt ist und daß ich nicht viel Neues geboten habe. Wenn es mir aber gelingt, durch diesen Aufsatz berufenere Kollegen zu veranlassen, ihre Erfahrungen in der Verwendung der Zeichnungs- und Pauspapiere und ihre Ansprüche, die sie an dieses Material stellen müssen, bekannt zu geben, so gibt dies vielleicht doch den Anreiz zu weiterer Vervollkommnung dieses für unseren Beruf so wichtigen Grundstoffes.

Der Gauß'sche Beweis des Legendreschen Satzes.

Von *H. Schmehl*, Berlin.

Seien a, b zwei Seiten eines kleinen sphärischen Dreiecks, $A + w$, $B + w$ die ihnen gegenüberliegenden entsprechenden Winkel, $3w$ der sphärische Exzeß des Dreiecks, so gilt nach Gauß

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \sqrt[3]{D},$$

worin in guter Näherung

$$\frac{1}{3} \log D = \frac{b^4 - a^4}{\pi} + \frac{w^2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 B} - \frac{1}{\sin^2 A}\right). \qquad (1)$$

Einer Anregung *W. Leemanns*[1] folgend, soll der Ausdruck (1) aus dem exakten Wert

[1] W. Leemann, Der Gauß'sche Beweis des Satzes von Legendre. Diese Zeitschr. *36*, 26—29 (1938).

$$D = \frac{a^3 \cos\frac{a}{2} \sin^3\frac{b}{2} \sin(A + w) \sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right) \sin^3 B}{b^3 \cos\frac{b}{2} \sin^3\frac{a}{2} \sin(B + w) \sin^2\left(B - \frac{w}{2}\right) \sin^3 A} \tag{2}$$

hier abgeleitet werden.

Wir vernachlässigen im folgenden durchweg Glieder sechster und höherer Ordnung, wobei eine Dreiecksseite als Größe erster Ordnung angesehen wird. Es gelten die Reihen

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2\,x^4}{45}$$

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2\,x^4}{15}.$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$\frac{\sin^3 x}{x^3 \cos x} = 1 + \frac{x^4}{15}.$$

Für $x = \frac{b}{2}$ wird hieraus

$$\frac{8 \sin^3\frac{b}{2}}{b^3 \cos\frac{b}{2}} = 1 + \frac{b^4}{240}$$

und daher

$$\frac{1}{3} \log \frac{8 \sin^3\frac{b}{2}}{b^3 \cos\frac{b}{2}} = \frac{b^4}{720}.$$

Entsprechend gilt

$$\frac{1}{3} \log \frac{8 \sin^3\frac{a}{2}}{a^3 \cos\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{720}.$$

Die Differenz der beiden letzten Gleichungen gibt

$$\frac{1}{3} \log \frac{a^3 \cos\frac{a}{2} \sin^3\frac{b}{2}}{b^3 \cos\frac{b}{2} \sin^3\frac{a}{2}} = \frac{b^4 - a^4}{720}. \tag{3}$$

In den von den Winkeln A und B abhängenden Funktionen in (2) verwenden wir die Beziehungen

$$\sin(A + w) = \sin A + w \cos A - \frac{w^2}{2} \sin A$$

$$\sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right) = \sin^2 A - \frac{w}{2} \sin 2\,A + \left(\frac{w}{2}\right)^2 \cos 2\,A;$$

aus ihrem Produkt

$$\sin\,(A + w)\,\sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right) = \sin^3 A - 3\left(\frac{w}{2}\right)^2 \sin A$$

folgt

$$\frac{\sin\,(A + w)\,\sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right)}{\sin^3 A} = 1 - 3\left(\frac{w}{2 \sin A}\right)^2$$

und

$$\frac{1}{3} \log \frac{\sin\,(A + w)\,\sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right)}{\sin^3 A} = -\left(\frac{w}{2 \sin A}\right)^2.$$

Entsprechend gilt

$$\frac{1}{3} \log \frac{\sin\,(B + w)\,\sin^2\left(B - \frac{w}{2}\right)}{\sin^3 B} = -\left(\frac{w}{2 \sin B}\right)^2.$$

Die Differenz der beiden letzten Gleichungen gibt

$$\frac{1}{3} \log \frac{\sin\,(A + w)\,\sin^2\left(A - \frac{w}{2}\right)\sin^3 B}{\sin\,(B + w)\,\sin^2\left(B - \frac{w}{2}\right)\sin^3 A} = \frac{w^2}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 B} - \frac{1}{\sin^2 A}\right). \quad (4)$$

Die Verbindung der Beziehungen (3) und (4) gemäß (2) liefert (1); die von Gauß mit π bezeichnete Zahl hat also den Wert 720.

Emil Röthlisberger †

1853—1938

Am 15. März 1938 verbreitete sich die Trauerkunde, Herr alt Vermessungsinspektor Röthlisberger sei gestorben.

Wer immer in den letzten fünf Dezennien im Vermessungswesen tätig war, hat diesen bescheidenen, liebenswürdigen Diener des Staates persönlich gekannt. Die, die ihn nicht mehr kennen lernten, haben doch von seinem erfolgreichen Wirken als Amtsperson vernommen.

Ganz dem Wesen des Verstorbenen entsprechend, fand am 18. März im Krematorium Bern eine schlichte Abschiedsfeier statt. Die Berner Geometer aber waren gekommen, um von ihrem früheren Kantonsgeometer Abschied zu nehmen. Sein Amtsnachfolger im Bundesdienst, Herr Dr. h. c. Baltensperger hat, als Herr Röthlisberger Ende 1921 zurücktrat, in unserer Zeitschrift (Heft 1, 1922) das Wirken des nun Verblichenen gezeichnet und an der Bahre würdigte er nochmals dessen Lebensarbeit.

Herr Röthlisberger wurde im Jahr 1853 in Burgdorf geboren. Nach Absolvierung seiner Schulzeit trat er daselbst in den Postdienst ein. Er war bereits Postcommis, als er sich aus Gesundheitsrücksichten entschloß, zum Geometerberuf überzugehen. Er tat dies auch deshalb, weil