

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Band:** 36 (1938)

**Heft:** 7

**Artikel:** Le calcul de l'adaptation des réseaux trigonométriques [suite et fin]

**Autor:** Ansermet, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-197307>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE  
**Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik**

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

**Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monate

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;"><b>No. 7 • XXXVI. Jahrgang</b> der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats <b>12. Juli 1938</b> Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;"><b>Abonnements:</b> Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
--	--

## Le calcul de l'adaptation des réseaux trigonométriques.

Par A. Ansermet.

(Suite et fin)

Une réserve s'impose cependant: la méthode des moindres carrés a été appliquée non pas à des erreurs mais à des discordances; il y a là une nuance qui justifie jusqu'à un certain point les solutions nombreuses proposées pour ce problème. L'extension à l'espace de la solution ci-dessus est analogue au calcul dans le plan mais il y a trois rotations ce qui exige l'emploi de neuf paramètres liés par six conditions.

En France la solution préconisée par le Lt.-colonel Laborde rencontre une certaine faveur et il convient d'en rappeler le principe:

Au réseau primitif  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$  il s'agit d'adapter un nouveau réseau par simples translations, rotation et modification d'échelle comme précédemment; le nombre d'équations aux discordances est égal à  $2n$  pour quatre inconnues. Les translations sont tout d'abord éliminées en groupant les points par paires, un des points p. ex.  $A_1$  appartenant toujours à une de ces paires. Nous aurons donc  $(n - 1)$  paires de points  $A_1 - A_2$ ,  $A_1 - A_3$ ,  $A_1 - A_4$ ,  $\dots A_1 - A_n$  comportant  $2(n - 1)$  équations linéaires par rapport aux deux inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$ . Pour faciliter le calcul le Lt.-colonel Laborde a posé:

$$\alpha = 1000 d\omega \quad \beta = 1000 dm$$

( $d\omega$  en radians)

Chaque paire de points donne lieu à un couple de valeurs  $(\alpha, \beta)$  les discordances s'annulant puisqu'il n'y a pas d'éléments superflus. On obtient ainsi un système de  $(n - 1)$  valeurs pour chaque inconnue; il ne reste plus qu'à appliquer le principe de la moyenne arithmétique

(simple ou pondérée). Ces moyennes servent alors au calcul des translations qui avaient été éliminées mais non calculées.

Au point de vue théorique le procédé du Lt.-colonel Laborde paraît moins rigoureux que la solution S. Finsterwalder-v. Gruber; mais il est plus simple et, dans ce domaine, il est difficile d'é luder toutes les objections. La méthode des moindres carrés est déjà contreversée lorsqu'il s'agit d'erreurs; l'appliquer à des discordances est faire œuvre fragile même si l'on peut admettre que toutes ces discordances ont le même poids. Il faut d'autre part reconnaître que l'application du principe des moindres carrés aboutit à une solution élégante ainsi que le relève M. le Prof. Risavy qui paraît s'attribuer cette méthode des «champs» juxtaposés (Journal des Géomètres français, janvier 1931).

On pourrait ici suggérer une méthode mixte qui s'impose à l'examen dès qu'on substitue aux coordonnées rectangulaires des coordonnées polaires; faisons coïncider le centre de rotation et de similitude avec le centre de gravité du réseau de points à adapter. Chaque point sera défini par des

	coordonnées primitives $r, \omega$
»	provisoires $r', \omega'$
»	adaptées $\bar{r}', \bar{\omega}'$

Ces dernières résultant de la rotation  $d\omega$  et du changement d'échelle  $dm$ .

Il faut donc distinguer ici des discordances linéaires et angulaires; les premières s'éliminent partiellement en fonction de l'inconnue  $dm$  et les secondes en fonction de  $d\omega$ . Un calcul simultanée des inconnues peut se justifier mais avec moins de rigueur que précédemment. Le calcul séparé et préalable de  $d\omega$  se déduit de l'équation:  $[(\omega - \bar{\omega}')] = 0$  ou  $[p(\omega - \bar{\omega}')] = 0$ . C'est l'équation normale relative à une inconnue suivant que les poids sont égaux ou non ( $[v] = 0$  ou  $[pv] = 0$ ). Un calcul analogue fournit l'inconnue  $dm$ .

Dans une application, à la fin de la présente note, nous reviendrons sur ces diverses solutions et leurs avantages respectifs. En pratique il s'agit surtout de savoir si les discordances sont à éliminer complètement ou partiellement. Le but de l'adaptation est principalement de corriger l'échelle et l'orientation du côté initial du réseau; cette éventualité se présente avec les triangulations photographiques (radiales) et dans des cas spéciaux en géodésie. Les réseaux photographiques se prêtent aussi à une transformation, solution justifiée par la précision des éléments de ces réseaux dont la détermination est partiellement graphique. Parmi les nombreuses solutions à envisager énumérons succinctement celles revêtant un intérêt pratique.

*Les transformations.* Ainsi que nous l'avons dit au début un avantage essentiel des transformations est d'éliminer les discordances entre les points communs des réseaux; mais c'est au prix d'autres complications. Tout d'abord l'inconnue  $dm$  (échelle) varie; elle est fonction des coordonnées de chaque point dans les transformations conformes et en

outre de la direction considérée dans les transformations non-conformes. Réserve faite de cas spéciaux la conformité présente ici peu d'intérêt; elle conduit à des calculs laborieux et n'évite pas une légère courbure des côtés du réseau, côtés qui ne sont plus rectilignes une fois transformés.

Au point de vue des calculs l'adaptation comporte le calcul de 4 éléments dans le plan et de 7 dans l'espace. La transformation la plus simple et qui de ce fait a rencontré une certaine faveur, l'affinité, dépend de 6 paramètres dans le plan et de 12 dans l'espace. La transformation collinéaire, dont l'affinité est un cas particulier, dépend de 8 paramètres dans le plan et de 15 dans l'espace. Ces chiffres peuvent être quelque peu réduits par un choix judicieux des coordonnées; mais si l'on transforme « par mailles » les paramètres varient d'une maille à l'autre. Ces transformations dites projectives conservent les droites qui demeurent des droites; la variation d'échelle est d'un calcul assez complexe. La théorie de Tissot sur l'ellipse indicatrice est applicable. La transformation collinéaire n'est d'ailleurs qu'un redressement « calculé » et l'on sait comment varie l'échelle d'un point à l'autre du champ redressé à partir du point focal. Si un des côtés du quadrilatère qui est à la base du redressement pour la mise en position perspective des deux plans s'éloigne à l'infini dans les deux plans il y a affinité; analytiquement cette transformation est définie par les relations bien connues

$$X = a_1x + b_1y + c_1 \quad Y = a_2x + b_2y + c_2.$$

Le calcul de la variation d'échelle à l'intérieur d'une maille est relativement simple; on peut cependant pressentir certains inconvénients d'une telle transformation à moins qu'il s'agisse d'applications de caractère purement cartographique.

*La transformation homogène.* Ainsi que nous venons de le dire la transformation homogène ou par affinité est la solution la plus simple lorsque, pour une raison ou une autre, on ne peut pas s'accommoder d'un simple changement d'échelle. Les principes de l'affinité sont très connus et il suffit de les rappeler sommairement en se plaçant surtout au point de vue des déformations inhérentes à ce mode de correspondance. Le nombre de paramètres définissant la transformation s'abaisse de six à quatre lorsque l'origine des coordonnées est un point double; les équations deviennent:

$$x' = a_1x + b_1y \quad y' = a_2x + b_2y$$

par rapport à un même système d'axes d'ailleurs quelconque. La forme de ces équations est la même par rapport à deux systèmes d'axes distincts, les origines étant des points conjugués.

Il n'y a plus que deux paramètres lorsque les axes de coordonnées sont constitués par deux systèmes de droites conjuguées

$$x' = \alpha x \quad y' = \beta y.$$

Cette forme subsiste lorsqu'on choisit les droites doubles issues d'une même origine comme unique système d'axes de coordonnées.

$$\left( \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y} \right)$$

Enfin la transformation est symétrique lorsque les droites doubles sont rectangulaires; analytiquement on a dans ce cas:

$$a_2 = b_1 \text{ ou } a_1 = b_2.$$

Les axes de l'ellipse indicatrice de Tissot sont précisément ces droites doubles. Ce cas particulier mis à part, les directions dites principales c.-à-d. les paires à angle droit qui se correspondent sont en général distinctes même si ces directions sont issues d'un point double.

Ces principes rappelés, il suffit pour calculer les déformations d'appliquer l'équation de l'ellipse indicatrice

$$1 = dx'^2 + dy'^2 = (a_1^2 + a_2^2) dx^2 + (b_1^2 + b_2^2) dy^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) dx \cdot dy.$$

l'orientation des axes se calcule par la formule connue

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2}$$

tandis que les déformations s'expriment en fonction des axes de l'ellipse; deux diamètres conjugués de cette courbe correspondent à des diamètres rectangulaires du cercle

$$1 = dx'^2 + dy'^2$$

Le maximum d'altération angulaire étant donné ici par les diamètres conjugués égaux.

Les formules relatives à l'ellipse d'erreur sont applicables par analogie pour le calcul des axes:

$$A^2 + B^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}$$

$$A B = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

(voir p. ex. Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung par C. F. Baeschlin, p. 245).

Cette dernière formule est intéressante; elle montre que l'échelle des surfaces ne dépend que des paramètres et non des coordonnées du point considéré. C'est une propriété caractéristique de l'affinité. Bien entendu cette échelle varie d'une maille à l'autre dans l'ensemble du réseau mais cette variation sera relativement faible à moins de discordances vraiment très irrégulières. Dans ce cas une transformation est d'une efficacité illusoire quel que soit le système choisi.

Il reste à exprimer les paramètres en fonction des discordances; en pratique il n'est pas indiqué de ramener les formules à la forme simple

$$x' = \alpha x \qquad y' = \beta y.$$

car les quatre paramètres peuvent être calculés deux à deux facilement.

Considérons à nouveau le système d'équations

$$x' = a_1 x + b_1 y \qquad y' = a_2 x + b_2 y$$

définissant l'affinité lorsque l'origine est un point double (sommet d'une maille), les axes de coordonnées étant ceux de la mensuration déplacées par translation.

$$x' - x = \delta x = (a_1 - 1)x + b_1 y = a_1' x + b_1 y$$

$$y' - y = \delta y = a_2 x + (b_2 - 1)y = a_2 x + b_2' y$$

où  $\delta x$  et  $\delta y$  désignent des discordances. En appliquant ces formules à une paire de points  $P_1$  et  $P_2$  on obtient

$$\delta x_1 = a_1' x_1 + b_1 y_1$$

$$\delta x_2 = a_1' x_2 + b_1 y_2$$

et pour les paramètres

$$a_1' = a_1 - 1 = \frac{y_2 \delta x_1 - y_1 \delta x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}$$

$$b_1 = \frac{x_2 \delta x_1 - x_1 \delta x_2}{y_1 x_2 - x_1 y_2}$$

Le calcul est simple car le dénominateur est, en valeur absolue, le double de la surface de la maille. Ce dénominateur peut être calculé graphiquement sur le canevas à l'aide de la plaque hyperbolique. Les formules pour les deux autres paramètres sont analogues. L'écueil réside dans le choix judicieux de l'origine et la disposition des mailles; si l'origine coïncide avec un des sommets du réseau il faut au préalable éliminer les discordances en ce point par une translation ce qui fait du sommet un point double. On peut concevoir également une origine commune pour toutes les mailles (point central). Nous nous bornerons à ces quelques considérations sur l'application de l'affinité, sujet qui a été traité de façon magistrale par M. le Prof. Dr. Merkel dans sa thèse (Karlsruhe 1924)).

*Applications.* Dans sa « Notice sur les Travaux de Triangulation préalables à la Reconstitution foncière dans les Régions libérées » Paris 1920, M. le Lt.-colonel Laborde a calculé l'adaptation d'un réseau. Cet exemple a été à nouveau discuté dans le Journal des géomètres français (janvier 1931) et mérite quelques commentaires.

Il s'agit d'un groupe de 5 points  $A, B, C, D, E$  dont les coordonnées par rapport aux centres de gravité sont:

	$X - \frac{[X]}{n}$	$Y - \frac{[Y]}{n}$	$X' - \frac{[X']}{n}$	$Y' - \frac{[Y']}{n}$
A	— 6677,18 m	— 1315,84 m	— 6682,72 m	— 1316,02 m
B	— 4145,28 m	+ 2408,56 m	— 4149,12 m	+ 2409,48 m
C	+ 1769,32 m	— 2919,14 m	+ 1769,88 m	— 2922,12 m
D	+ 3663,02 m	+ 1939,56 m	+ 3666,68 m	+ 1941,98 m
E	+ 5390,12 m	— 113,14 m	+ 5395,28 m	— 113,32 m
sommes	0,00	0,00	0,00	0,00

$$dX_s = \frac{[X - X']}{n} = - 3,94 \text{ m} \quad dY_s = \frac{[Y - Y']}{n} = + 0,12 \text{ m}$$

L'application faite par M. le Prof. Risavy de la méthode S. Finsterwalder-v. Gruber a donné

$$d\omega = + 4'',74 (+ 0,0000229)$$

$$dm = - 0,000872$$

et comme coordonnées adaptées par rapport au centre de gravité  $\frac{[X]}{n}$ ,  $\frac{[Y]}{n}$ :

	$\bar{X}' - \frac{[X]}{n}$	$\bar{Y}' - \frac{[Y]}{n}$	$X - \bar{X}'$	$Y - \bar{Y}'$
A	— 6676,87 m	— 1315,02 m	— 0,31 m	— 0,82 m
B	— 4145,56 m	+ 2407,28 m	+ 0,28 m	+ 1,28 m
C	+ 1768,41 m	— 2919,53 m	+ 0,91 m	+ 0,39 m
D	+ 3663,44 m	+ 1940,37 m	— 0,42 m	— 0,81 m
E	+ 5390,57 m	— 113,10 m	— 0,45 m	— 0,04 m
sommes	— 0,01	0,00	— 0,01	0,00

Ces discordances ne sont pas négligeables et la question se pose de savoir si on peut les tolérer; mais auparavant calculons les discordances angulaires par rapport au centre de gravité choisi comme origine d'un système polaire de coordonnées; on obtient les valeurs suivantes:

	$\omega - \omega'$		$\omega - \bar{\omega}'$
A	+ 27''	A	+ 22''
B	— 48''	B	— 53''
C	+ 64''	C	+ 59''
D	— 21''	D	— 26''
E	+ 3''	E	— 2''
	<u>+ 94''</u>		<u>0''</u>
	— 69''		

différence = + 25'' : 5 = + 5''

Ce calcul très simple fournit pour l'inconnue  $d\omega$  une valeur qui diffère peu de celle trouvée précédemment (+ 4'',74). D'autre part ces discordances angulaires présentent aussi de l'intérêt. La quatrième inconnue  $dm$  s'obtient de façon analogue par une moyenne calculée en fonction des valeurs  $dm$  relatives aux distances  $GA$ ,  $GB$ ,  $GC$ ,  $GD$  et  $GE$ , le point  $G$  étant le centre de gravité, origine des coordonnées.

Il ressort de ce qui précède qu'une adaptation différant peu de celle résultant de l'application de la méthode des moindres carrés est calculable rapidement. Dans le cas particulier les discordances qui subsistent sont relativement fortes et leur allure assez irrégulière. Rien n'empêche pour les besoins d'une mensuration ou l'établissement d'un plan d'ensemble de transformer tout ou partie du réseau en procédant par mailles. Bien entendu la transformation homogène donne lieu au plus grand nombre de mailles mais le calcul est d'une grande simplicité et l'application numérique des formules à l'exemple ci-dessus paraît superflue.

Ce qu'il faut retenir c'est que les notions d'adaptation de deux réseaux ou de transformation ne s'opposent pas nécessairement mais éventuellement se complètent. Les éléments qui jouent un rôle dans le choix d'une solution sont la précision des coordonnées dans chaque

systeme et le but à atteindre. Dans certains cas on doit s'interdire a priori toute déformation autre qu'un changement d'échelle uniforme sur toute l'étendue du réseau. Cette hypothèse mise à part on sera souvent appelé dans la pratique à transformer les coordonnées; il convient d'étudier alors parallèlement le choix du système et le mode de distribution des mailles. La diversité des solutions suggérées à ce jour est un indice de la complexité du problème.

---

## Die Beziehungen zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten.

Von Dipl.-Ing. *F. v. Kobold*, Eidg. Landestopographie, Bern.

### I. *Allgemeines über die Transformation geographischer Koordinaten.*

In den Jahren 1926 bis 1936 ist die schweizerisch-italienische Grenze neu bereinigt und nachher von beiden Ländern durch unabhängige Messungen und Berechnungen in ihr Landesvermessungssystem einbezogen worden. Ein Vergleichen der Resultate war nur auf dem Wege über die geographischen Koordinaten möglich. Demzufolge wurden von beiden Staaten geographische Länge und Breite aller Grenzsteine und Grenzmarken, sowie einer großen Zahl von in der Nähe der Grenze gelegenen trigonometrischen Punkten gerechnet. Über die Berechnungsverfahren der Schweiz und über die allgemeine Aufgabe der Transformation orientiert der Aufsatz von W. Lang: „Schweizer geographische Koordinaten“ in dieser Zeitschrift, Jahrgang 1926. Zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten bestehen Differenzen, die von der Lage des betrachteten Punktes abhängig sind und deren gesetzmäßige Bestandteile durch Transformationsformeln erfaßt werden sollen. Sie rühren von den verschiedenen Grundlagen der beiden Landesvermessungssysteme her.

Sowohl die Schweiz als auch Italien benützen die *Erddimensionen von Bessel*; indessen bezieht sich das italienische Ellipsoid auf Breite und Meridianrichtung im Nullpunkt Rom (Monte Mario), während sich das schweizerische auf die entsprechenden Werte der Sternwarte Bern stützt. Diese Berechnungsgrundlagen sind, außer mit zufälligen, meist mit beträchtlichen systematischen Fehlern behaftet, da die astronomisch ermittelten Größen von Breite und Azimut ohne jede Reduktion als Grundwerte der Ellipsoide angenommen werden. Italien und die Schweiz rechnen daher auf gleich großen, jedoch anders gelegenen und anders orientierten Sphäroiden, so daß zwischen den Koordinaten desselben Punktes Differenzen entstehen. Eine weitere Ursache solcher Unterschiede liegt darin, daß die beiden Triangulationsnetze verschiedene Maßstäbe haben, weil die Ausgangsseiten nicht fehlerfrei sind.

Die Grundelemente einer selbständigen Landesvermessung enthalten also folgende Fehler, die auf die geographischen Koordinaten von Einfluß sind: