

# Die Beziehungen zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten

Autor(en): **Kobold, F. v.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **36 (1938)**

Heft 7

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-197308>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

systeme et le but à atteindre. Dans certains cas on doit s'interdire a priori toute déformation autre qu'un changement d'échelle uniforme sur toute l'étendue du réseau. Cette hypothèse mise à part on sera souvent appelé dans la pratique à transformer les coordonnées; il convient d'étudier alors parallèlement le choix du système et le mode de distribution des mailles. La diversité des solutions suggérées à ce jour est un indice de la complexité du problème.

---

## Die Beziehungen zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten.

Von Dipl.-Ing. *F. v. Kobold*, Eidg. Landestopographie, Bern.

### I. *Allgemeines über die Transformation geographischer Koordinaten.*

In den Jahren 1926 bis 1936 ist die schweizerisch-italienische Grenze neu bereinigt und nachher von beiden Ländern durch unabhängige Messungen und Berechnungen in ihr Landesvermessungssystem einbezogen worden. Ein Vergleichen der Resultate war nur auf dem Wege über die geographischen Koordinaten möglich. Demzufolge wurden von beiden Staaten geographische Länge und Breite aller Grenzsteine und Grenzmarken, sowie einer großen Zahl von in der Nähe der Grenze gelegenen trigonometrischen Punkten gerechnet. Über die Berechnungsverfahren der Schweiz und über die allgemeine Aufgabe der Transformation orientiert der Aufsatz von W. Lang: „Schweizer geographische Koordinaten“ in dieser Zeitschrift, Jahrgang 1926. Zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten bestehen Differenzen, die von der Lage des betrachteten Punktes abhängig sind und deren gesetzmäßige Bestandteile durch Transformationsformeln erfaßt werden sollen. Sie rühren von den verschiedenen Grundlagen der beiden Landesvermessungssysteme her.

Sowohl die Schweiz als auch Italien benützen die *Erddimensionen von Bessel*; indessen bezieht sich das italienische Ellipsoid auf Breite und Meridianrichtung im Nullpunkt Rom (Monte Mario), während sich das schweizerische auf die entsprechenden Werte der Sternwarte Bern stützt. Diese Berechnungsgrundlagen sind, außer mit zufälligen, meist mit beträchtlichen systematischen Fehlern behaftet, da die astronomisch ermittelten Größen von Breite und Azimut ohne jede Reduktion als Grundwerte der Ellipsoide angenommen werden. Italien und die Schweiz rechnen daher auf gleich großen, jedoch anders gelegenen und anders orientierten Sphäroiden, so daß zwischen den Koordinaten desselben Punktes Differenzen entstehen. Eine weitere Ursache solcher Unterschiede liegt darin, daß die beiden Triangulationsnetze verschiedene Maßstäbe haben, weil die Ausgangsseiten nicht fehlerfrei sind.

Die Grundelemente einer selbständigen Landesvermessung enthalten also folgende Fehler, die auf die geographischen Koordinaten von Einfluß sind:

1. *Der Fehler der Nullpunktsbreite  $dB_0$ .*

Es sei die Breite  $B_0$  um  $dB_0$  verfälscht. Aus der geometrischen Anschauung läßt sich ohne weiteres sagen, daß alle Punkte des nicht zu ausgedehnten Vermessungsgebietes in der Breite Fehler von der Größe des  $dB_0$  aufweisen werden.

2. *Der Fehler der Nullpunktslänge  $\Delta L_0$ .*

In den meisten Landesvermessungssystemen werden die Längen vom Meridian durch den Koordinatennullpunkt aus gezählt, so daß streng genommen von einem Längenfehler des Nullpunktes nicht gesprochen werden kann. Um jedoch die Länge eines Punktes von einem System in ein anderes zu übertragen, muß in die Rechnung die Längendifferenz  $\Delta L_0$  der zwei Nullpunkte eingeführt werden, wobei sich  $\Delta L_0$  aus der durch die astronomischen Messungen gegebenen Längendifferenz und einen durch Rechnung zu bestimmenden Fehler zusammensetzt. Liegen keine Meßresultate für den Längenunterschied vor, so darf das ganze  $\Delta L_0$  als Fehler an der Nullpunktslänge  $L_0$  aufgefaßt werden. Es ist einleuchtend, daß eine Änderung des  $L_0$  um  $\Delta L_0$  für alle Punkte dieselbe Längenänderung  $\Delta L_0$  zur Folge hat.

3. *Fehler in der Meridianrichtung ( $d\alpha_0$ ).*

Die Orientierung des Triangulationsnetzes geschieht durch Übertragung der Meridianrichtung des Nullpunktes auf die Ausgangsseite. Wegen der Fehler im Nullpunktazimut und in der Übertragung erfährt das wahre Azimut dieser Seite eine Veränderung, die mit  $d\alpha_0$  bezeichnet sei. Dadurch erleidet das ganze Netz, d. h. jede Richtung zwischen zwei beliebigen Triangulationspunkten eine Verdrehung um  $d\alpha_0$ . Alle Punkte werden Veränderungen in Länge und Breite aufweisen.

4. *Fehler in der Länge der Ausgangsseite  $ds$ .*

Dieser Fehler bringt eine Vergrößerung oder Verkleinerung des ganzen Netzes mit sich, das sich selber ähnlich bleibt, so daß mit einer einheitlichen Längenverzerrung  $d\sigma$  der Streckeneinheit gerechnet werden darf, wobei

$$ds = d\sigma \cdot s$$

ist. Die Fehler der Länge sind der Längendifferenz, die der Breite der Breitendifferenz gegenüber dem Nullpunkt proportional.

Um nun die Einflüsse der vier Fehlerursachen  $dB_0$ ,  $\Delta L_0$ ,  $d\alpha_0$  und  $d\sigma$  auf einen beliebigen Punkt  $P$ , der gegenüber dem Nullpunkt die Breitendifferenz  $\Delta B$  und die Längendifferenz  $\Delta L$  aufweist, analytisch zu erfassen, denken wir uns  $P$  durch eine geodätische Linie mit  $O$  verbunden. Stellen wir die analytische Form dieser Kurve so auf, daß die Breite  $B$  und die Länge  $L$  des Punktes  $P$  Funktionen von  $\alpha_0$ , dem Azimut der geodätischen Linie im Nullpunkt,  $s$ , der Länge des Kurvenstückes zwischen  $O$  und  $P$ , und  $B_0$  werden, so folgen durch Differenziation die gesuchten Fehlereinflüsse, die zusammengestellt die Transformationsgleichungen ergeben.

Diese sind also Funktionen der vier Unbekannten  $dB_0$ ,  $\Delta L_0$ ,  $d\alpha_0$  und  $d\sigma$ . Zu deren Ermittlung sind vier Gleichungen nötig, die sich anhand von zwei, beiden Systemen angehörenden Punkten aufstellen lassen. Wäre die Triangulation fehlerfrei, so würde man aus beliebig gewählten Punkten genau dieselben Werte für die Unbekannten erhalten. Tatsächlich sind die Koordinaten der Vergleichspunkte mit Fehlern behaftet, die unsere Rechnungsschärfe weit übersteigen; die gesuchten Größen werden daher je nach Wahl der Punkte verschieden ausfallen. Durch eine Ausgleichung, die alle oder einen großen Teil der gemeinsamen Punkte berücksichtigt, suchen wir zu mittlern Werten zu gelangen. Wir werden die Methode der kleinsten Quadrate anwenden, obwohl die Voraussetzungen hiezu nicht streng erfüllt sind. Das Verfahren hat aber den Vorteil, daß sich die ausgeglichenen Werte (ohne wahrscheinlichste zu sein) den ursprünglichen Differenzen gut anpassen, und daß der Rechnungsgang einfach ist.

Alle diese Überlegungen gehen von der Annahme aus, daß die Triangulation keine weitem systematischen Fehler aufweise, so daß die nach der Ausgleichung bleibenden Fehler mehr oder weniger zufälliger Natur sind. In guten Netzen ist dies weitgehend der Fall, wie die Beispiele zeigen werden.

Die Strenge der Formeln soll der dem Problem eigenen Genauigkeit entsprechen. Da die mittlern zufälligen Punktfehler 3 cm erreichen können und nicht selten erheblich größer sind, so genügt für die Transformationsbeträge eine Genauigkeit von 0". 001. Die maximale Ausdehnung des Vermessungsgebietes betrage 250 km in den Richtungen Nord-Süd und Ost-West. Durch diese Beschränkung auf geringe, jedoch hinreichende Rechenschärfe wird die Herleitung der Transformationsgleichungen stark erleichtert.

## II. Herleitung der Transformationsformeln.

Wir benützen zur Herleitung der Differentialausdrücke der geodätischen Linie die Gauß'schen Mittelbreitenformeln in der Darstellung von Jordan (Band III, 6. Aufl., S. 456).

$$(1) \quad \log \Delta L = \log \left( \frac{[2] \cdot s \cdot \sin \alpha_m}{\cos B_m} \right) + [3] l^2 \sin^2 B_m + [4] b^2$$

$$\log \Delta B = \log ([1] \cdot s \cdot \cos \alpha_m) + [5] l^2 \cos^2 B_m + [6] b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log ([2] \cdot s \cdot \sin \alpha_m \cdot \log B_m) + [7] \cdot l^2 \cos^2 B_m$$

$$+ [8] b^2 + [3] l^2 \sin^2 B_m - [4] b^2$$

worin  $B_m$  die mittlere Breite,  $\alpha_m$  das mittlere Azimut,  $\Delta B$  die Breiten-differenz,  $\Delta L$  die Längendifferenz der Punkte  $P$  und  $O$  und  $\Delta \alpha$  die Differenz der Azimute in  $P$  und  $O$  bedeuten, während die Koeffizienten [1] bis [8] durch Tabellen gegeben sind. In den Gliedern höherer Ordnung werden als Abkürzungen eingeführt

$$(1a) \quad \begin{aligned} l \cdot \sin B_m &= [2] \cdot s \cdot \sin \alpha_m \cdot \operatorname{tg} B_m \\ l \cdot \cos B_m &= [2] \cdot s \cdot \sin \alpha_m \\ b &= [1] \cdot s \cdot \cos \alpha_m \end{aligned}$$

Zunächst soll bewiesen werden, daß für Differentialbetrachtungen die quadratischen Glieder der Fundamentalformeln (1) ohne Einfluß sind. Sie erreichen ihre Höchstwerte, wie die Formeln (1a) zeigen, in den äußersten Punkten des Koordinatensystems. Wählen wir das maximale  $s$  in Richtung der Achsen zu 250 km, so folgen daraus

$$\Delta B_{\max} \sim b_{\max} \sim 2-3^\circ; \operatorname{arc} \Delta B_{\max} \sim 0.05$$

und für mittlere Breiten, für die in (1a)  $\sin B_m = \cos B_m \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$  gesetzt werden darf

$$\Delta L_{\max} \sim l_{\max} \sim 3-4^\circ; \operatorname{arc} \Delta L_{\max} \sim 0.07$$

Von den quadratischen Gliedern ist

$$(1b) \quad [5] \cdot l^2 \cos^2 B_m$$

am meisten veränderlich, da von allen Koeffizienten [1] bis [8] der Wert [5] am meisten mit der Breite variiert, wie die Tabellen in Jordan III zeigen. Läßt sich daher für das quadratische Glied (1b) beweisen, daß es bei kleiner Veränderung des  $B_m$  praktisch unverändert bleibt, so ist dies für alle Glieder derselben und höherer Ordnung auch der Fall. Eine Veränderung um  $dB_m$  hat den Einfluß

$$(1c) \quad l^2 \cos^2 B_m \frac{\partial}{\partial B} [5] dB_m - [5] \cdot l^2 \cdot \sin 2 B \cdot dB_m$$

Wählen wir  $dB_m$  maximal gleich  $10''$ , so wird nach der Tabelle S. 54 in Jordan III der maximale logarithmische Zuwachs von [5] 5.5 Einheiten der fünften Mantissenstelle. Setzen wir weiter  $\Delta L = 4^\circ$  und  $\cos^2 B_m = 0.5$ , so wird das erste Glied in (1c)

$$l^2 \cdot \cos^2 B_m \cdot \frac{\partial}{\partial B} [5] dB = 0.24$$

d. h.  $\log \Delta B$  erleidet eine Änderung von 0.24 Einheiten der siebenten Mantissenstelle, was bei  $\Delta B = 3^\circ$  den zu vernachlässigenden Betrag von  $0''.00042$  ausmacht. Führt man im Ausdruck

$$[5] l^2 \cdot \sin 2 B_m \cdot dB_m$$

$\sin 2 B_m = 1$  ein, so wird die siebente Mantissenstelle von  $\log \Delta B$  um 0.0002 Einheiten verändert; auch dieses zweite Glied spielt daher keine Rolle.

Wir ersetzen in den Gleichungen (1) die Koeffizienten [1] und [2] durch Normal- und Querkrümmungsradius und gehen auf Arcusmaß über, so daß uns für die Differentiation als Fundamentalgleichungen bleiben

$$(2a) \quad \Delta L = \frac{1}{N} \frac{s \cdot \sin \alpha_m}{\cos B_m}$$

$$(2b) \quad \Delta B = \frac{1}{M} \cdot s \cdot \cos \alpha_m$$

$$(2c) \quad \Delta a = \frac{1}{N} \cdot s \cdot \sin \alpha_m \cdot \operatorname{tg} B_m = \Delta L \cdot \sin B_m$$

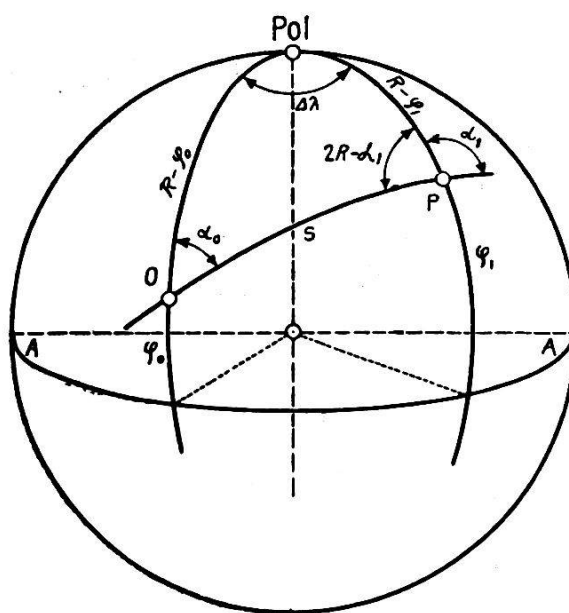
Läßt man hier  $s$  zu  $ds$  werden, so entstehen die bekannten Differentialgleichungen der geodätischen Linie, was zu erwarten war, da ja die Formeln (1) durch Mac-Laurin'sche Reihenentwicklung aus diesen Ausdrücken hergeleitet werden.

Die Genauigkeit der Gleichungen (2a) bis (2c) ist auch hinreichend, wenn später in den Differentialformeln  $\Delta L$  und  $\Delta B$  einzuführen sind. Das einflußreichste Glied (1b) erreicht für  $l_{\max} = 4^\circ$  den Wert von 3600 Einheiten der siebenten Mantissenstelle und macht demnach für  $\Delta B_{\max}$   $9''$  oder in Arcusmaß  $5 \cdot 10^{-5}$  aus, was als Faktor immer bedeutungslos sein wird.

a) *Der Einfluß einer Veränderung der Breite des Nullpunktes.*

Ändert die Breite  $B_0$  um  $dB_0$ , so ändern damit  $B_m$  und  $\alpha_m$ , und infolge des veränderten  $B_m$  auch  $M$  und  $N$ . Bei der Ableitung der Ausdrücke (2a) und (2b) nach  $B_0$  werden wir daher die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial B_m}{\partial B_0}$  und  $\frac{\partial \alpha_m}{\partial B_0}$  nötig haben, die wir aus den Gleichungen (2) nicht ohne weiteres bilden können. Wir führen an ihrer Stelle die entsprechenden, kurz herzuleitenden Ausdrücke für die Kugel ein und werden dann aus der Größe der Glieder schließen können, ob die Näherung genügt, oder ob ellipsoidische Differentialquotienten nötig sind.

In der in Figur 1 dargestellten Kugel sei  $S$  das Großkreisbogenstück zwischen  $O$  und  $P$ ;  $\varphi_0$  und  $\varphi$  seien die Kugelbreiten,  $\Delta\lambda$  die Kugellängendifferenz,  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  die Azimute in  $O$  und  $P$ . Im sphärischen Dreieck  $O-P$ -Pol sind daher  $(90 - \varphi_0)$ ,  $\alpha_0$  und  $s$  gegeben, und  $\varphi_1$  und  $ds$  als deren Funktionen darzustellen. Untersuchen wir zunächst die Veränderung des  $\varphi_1$  als Funktion der Veränderung von  $\varphi_0$ , so gibt der Cosinus-Satz



Figur 1

$$\sin \varphi_1 = \cos s \cdot \sin \varphi_0 + \sin s \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \alpha_0$$

und daraus folgt durch Differentiation nach  $\varphi_0$

$$\cos \varphi_1 \cdot d\varphi_1 = \cos s \cdot \cos \varphi_0 \cdot d\varphi_0 - \sin s \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot d\varphi_0$$

was auf Grund der Beziehung zwischen den 5 Stücken geschrieben werden darf

$$= \cos \varphi_1 \cdot \cos \Delta\lambda \cdot d\varphi_0$$

woraus folgt

$$(3a) \quad d\varphi_1 = \cos \Delta\lambda \cdot d\varphi_0$$

Für die Veränderung des  $\alpha_1$  infolge Veränderung des  $\varphi_0$  gehen wir vom Sinussatz

$$\sin \alpha_1 = \cos \varphi_0 \frac{\sin \alpha_0}{\cos \varphi_1}$$

aus, der differenziert

$$\cos \alpha_1 \cdot d\alpha_1 = \frac{-\sin \alpha_0}{\cos \varphi_1} \cdot \sin \varphi_0 \cdot d\varphi_0 + \frac{\cos \varphi_0 \cdot \sin \alpha_0}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \sin \varphi_1 \cdot d\varphi_1$$

liefert, wo  $d\varphi_1$  durch den Ausdruck (3a) ersetzt werden darf. Wenden wir auf das erste Glied rechts den Sinussatz an, so entsteht

$$\cos \alpha_1 \cdot d\alpha_1 = - \frac{d\varphi_0}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \alpha_1} \left\{ \sin \alpha_0 \cdot \sin \varphi_0 - \sin \alpha_1 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \Delta\lambda \right\}$$

was nach der Beziehung zwischen den 5 Stücken gleich zu setzen ist

$$+ \frac{d\varphi_0}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \alpha_1} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin \Delta\lambda$$

so daß schließlich bleibt

$$(3b) \quad d\alpha_1 = \frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \varphi_1} d\varphi_0 \sim \frac{\Delta\lambda}{\cos \varphi_1} d\varphi_0$$

weil für alle in Betracht fallenden Punkte  $\Delta\lambda = \sin \Delta\lambda$  gesetzt werden darf.

Mit diesen Kugelausdrücken, die wir als Näherungswerte für die Veränderung der mittlern Breite  $B$  und des mittlern Azimutes  $\alpha$  einführen, können wir die Differentiation von  $\Delta B$  und  $\Delta L$  nach  $B_0$  durchführen. (Fortsetzung folgt.)

## Schweizerischer Geometerverein.

### Protokoll

*der XXXIV. Hauptversammlung vom 19. Juni 1938, 10 Uhr  
im Rathaussaal Bern.*

*Vorsitz:* Zentralpräsident S. Bertschmann.

*Teilnehmerzahl:* 150.

#### *1. Eröffnung und Konstituierung.*

*Zentralpräsident Bertschmann* eröffnet um 10 Uhr die XXXIV. Hauptversammlung des Schweizerischen Geometervereins. Er gibt seiner Freude Ausdruck, eine selten große Anzahl Vereinsmitglieder begrüßen