

Die Fehlertheorie der Herablegung eines Hochpunktes

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **37 (1939)**

Heft 9

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-197927>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

im Simplontunnel auf einer außerordentlich günstigen und langen Strecke erprobt werden.

Der fertige Simplontunnel wurde kurz vor seiner Inbetriebsetzung von den Schweizerischen Bundesbahnen für 5 Tage zur Vornahme der Messung zur Verfügung gestellt. Sie dauerte vom 18.–25. März 1906 und stand unter der Oberleitung von Guillaume. Man verwendete die Meßausrüstung des Internationalen Amtes, deren wesentlichster Teil aus einem 24 m langen Invardraht mit millimetergeteilten Maßstäbchen (réglettes) an beiden Enden besteht. Dieser Draht wird über 2 Spannstativ (piquets-tenseurs) durch Gewichte mit 10 kg gespannt. Die Distanz zwischen zwei ca. 24 m auseinanderliegenden und auf besondern Stativen montierten Marken (repères-mobiles) ergibt sich durch gleichzeitiges Ablesen der beiden réglettes an diesen Marken auf ca. $\frac{2}{10}$ mm genau (Fig. 21 und 22).

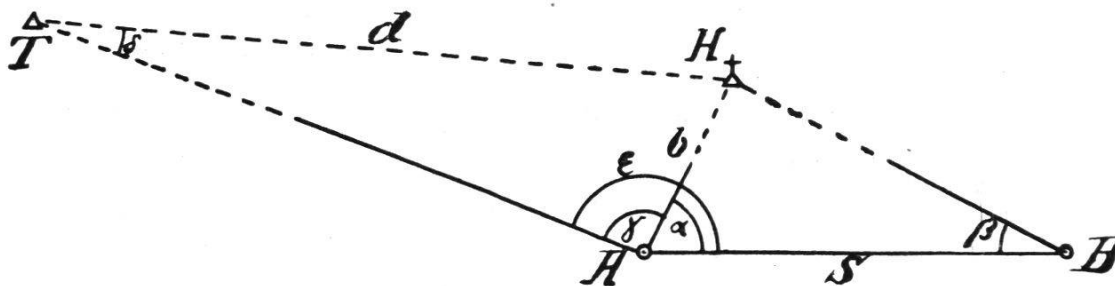
(Fortsetzung folgt.)

Die Fehlertheorie der Herablegung eines Hochpunktes.

Von C. F. Baeschlin, Zollikon.

Wenn es sich darum handelt, einen unzugänglichen Hochpunkt (Kirchturm, Dachreiter usw.) für den Anschluß eines Polygonzuges oder für andere Zwecke am Erdboden zu benutzen, so wird bekanntlich eine sogenannte „Herablegung“ durchgeführt.

Die Figur zeigt die Verhältnisse.



- H = unzugänglicher Hochpunkt mit gegebenen Koordinaten.
- A und B = zwei Punkte in der Nähe von H , von denen aus H sichtbar ist und deren Horizontaldistanz s zu messen ist.
- T = ein trigonometrischer Punkt, dessen Koordinaten gegeben sind und der von einem der beiden Punkte A oder B aus sichtbar ist (hier von A aus).

Die Basis s und die Winkel α , β und γ sind zu messen.

Man erhält in bekannter Weise

$$AH = b = s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$\sin \delta = \sin \gamma \frac{b}{d} = \frac{s}{d} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$\begin{aligned} \text{Neigung } HA = \nu_{AH} &= \text{Neigung } TH + \gamma + \delta \pm 200\text{g} \\ &= \text{Neigung } HT + \gamma + \delta = \omega \end{aligned}$$

$$(1) \quad x_A = x_H + b \cos \omega = x_H + s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cos \left[\nu_{HT} + \gamma + \text{arc sin} \left(\frac{s}{d} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta)} \right) \right]$$

$$(2) \quad y_A = y_H + b \sin \omega = y_H + s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \sin \left[\nu_{HT} + \gamma + \text{arc sin} \left(\frac{s}{d} \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta)} \right) \right]$$

Wir wollen nun eine Fehlerbetrachtung für die Koordinaten x_A und y_A durchführen, unter der Voraussetzung, daß die Koordinaten von H und von T fehlerlos seien, so daß wir also die Fehler in den Messungen der Basis s und der drei Winkel α , β und γ in Betracht ziehen.

Wir erhalten durch Differentiation:

$$(3a) \quad \frac{\partial x_A}{\partial \alpha} = -b \cotg (\alpha + \beta) \left[\cos \omega - \frac{b \sin \gamma \sin \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(3b) \quad \frac{\partial x_A}{\partial \beta} = \frac{s \sin \alpha}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \left[\cos \omega - \frac{b \sin \gamma \sin \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(3c) \quad \frac{\partial x_A}{\partial \gamma} = -b \sin \omega \left[1 + \frac{b \cos \gamma}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(3d) \quad \frac{\partial x_A}{\partial s} = \frac{b}{s} \left[\cos \omega - \frac{b \sin \gamma \sin \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(4a) \quad \frac{\partial y_A}{\partial \alpha} = -b \cotg (\alpha + \beta) \left[\sin \omega + \frac{b \sin \gamma \cos \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(4b) \quad \frac{\partial y_A}{\partial \beta} = \frac{s \sin \alpha}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \left[\sin \omega + \frac{b \sin \gamma \cos \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(4c) \quad \frac{\partial y_A}{\partial \gamma} = b \cos \omega \left[1 + \frac{b \cos \gamma}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

$$(4d) \quad \frac{\partial y_A}{\partial s} = \frac{b}{s} \left[\sin \omega + \frac{b \sin \gamma \cos \omega}{d \sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma}} \right]$$

Da die Messungen der 4 Größen α , β , γ und s unabhängig voneinander sind, können wir zur Berechnung von m_{x_A} und m_{y_A} das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz anwenden.

Bei der praktischen Anwendung der Herablegung ist $\frac{b}{d}$ oder $\frac{s}{d}$ verhältnismäßig klein.

Wir wollen daher $\frac{b^2}{d^2}$ gegenüber der Einheit vernachlässigen. Damit wird der Ausdruck

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 \gamma} \cong 1$$

Ferner wollen wir $m^2_{x_A}$ und $m^2_{y_A}$ nicht getrennt berechnen, sondern

$$m^2_{x_A} + m^2_{y_A} \equiv M^2$$

wo M der sogenannte „mittlere Punktfehler“ ist.

Wir erhalten, wenn wir auch hier $\frac{b^2}{d^2}$ gegenüber der Einheit vernachlässigen

$$(5) \quad M^2 = b^2 \cotg^2 (\alpha + \beta) m^2_{\alpha} + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{\sin^4 (\alpha + \beta)} m^2_{\beta} \\ + b^2 \left(1 + \frac{2 b \cos \gamma}{d} \right) m^2_{\gamma} + \frac{b^2}{s^2} m^2_s$$

Aus dieser Formel (5) erkennen wir, daß M vom Koordinatensystem ganz unabhängig ist, da keine Neigungen vorkommen.

Wir wollen in (5) b durch s ersetzen

$$b = s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

und erhalten

$$(6) \quad M^2 = s^2 \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \cotg^2 (\alpha + \beta) m^2_{\alpha} + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{\sin^4 (\alpha + \beta)} m^2_{\beta} \\ + \frac{s^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{2 s \sin \beta \cos \gamma}{d \sin (\alpha + \beta)} \right] m^2_{\gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} m^2_s$$

Daraus erkennen wir, daß der Einfluß von α auf M verschwindet, wenn

$$\cotg (\alpha + \beta) = 0$$

Dies ist der Fall, wenn

$$(7) \quad \alpha + \beta = 100g$$

Damit wird auch der Faktor

$$\frac{1}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$$

der in allen 4 Fehlertermen auftritt, ein Minimum, nämlich 1.

Ferner wird beim Bestehen der Bedingung (7)

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$$

Setzen wir

$$m_\gamma = m_\beta \equiv m$$

was bei den praktischen Messungen nahezu zutrifft, so erhalten wir

$$(8) \quad M^2 = s^2 m^2 + 2 s^2 \sin^3 \beta \cos \gamma \frac{s}{d} m^2 + \sin^2 \beta m^2 s$$

oder

$$(9) \quad M^2 = s^2 \left[1 + 2 \sin^3 \beta \cos \gamma \frac{s}{d} \right] m^2 + \sin^2 \beta m^2 s$$

Der Faktor von m^2 wird bei konstantem s , d und β ein Minimum, wenn

$$\cos \gamma = -1$$

wenn also

$$\gamma = 200g$$

In bezug auf β wird dieser Ausdruck mit β klein. Damit wird auch der Einfluß von m_s klein. Man darf aber β nicht zu klein machen, weil sonst die Visur von A gegen H zu steil wird, was der Genauigkeit von γ Abbruch tut. Man wird daher etwa

$$\beta = \alpha = 50g$$

wählen, womit

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^3 \beta = 0.354$$

wird.

Ferner erkennen wir, daß der erste Term von M^2 in (9) um so kleiner wird, je kleiner s ist. Doch darf man auch hier nicht zu weit gehen, weil sonst die Visuren nach H zu steil werden.

Da bei genügender Kleinheit von $\frac{s}{d}$ der Ausdruck

$$2 \sin^3 \beta \cos \gamma \frac{s}{d}$$

gegenüber der Einheit klein ist, so kann γ beliebig gewählt werden, was die Disposition sehr erleichtert.

Wir wollen ein Zahlenbeispiel betrachten.

$$\begin{aligned}
 s &= 100 \text{ Meter}; & \alpha &= \beta = 50^{\circ}; & \gamma &= 200^{\circ} \\
 m_s &= \pm 0.02 \text{ Meter}; & m_\beta &= m_\gamma = 1' \text{ (1 Minute centesimal)} \\
 & & d &= 1000 \text{ Meter}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten unter diesen Verhältnissen:

$$s^2 m^2 = +0.0002 \ 467$$

$$2 s^2 \sin^3 \beta \cos \gamma \frac{s}{d} m^2 = -0.0000 \ 174$$

$$\sin^2 \beta m^2_s = +0.0002 \ 000$$

und damit

$$M^2 = 0.0004 \ 293$$

$$M = \pm 0.0207 \text{ Meter}$$

Mit $\gamma = 100^{\circ}$ wird

$$M = 0.0211 \text{ Meter}$$

Mit $\gamma = 0^{\circ}$ wird

$$M = 0.0215 \text{ Meter}$$

Man erkennt also an diesem, den praktischen Verhältnissen entsprechenden Beispiel die fast völlige Unabhängigkeit von M von der Größe des Winkels γ .

Wir ziehen die Schlußfolgerungen aus unserer Fehleruntersuchung.

1. Das Dreieck $A B H$ ist am Punkt H rechtwinklig zu wählen.
2. Es empfiehlt sich, die Winkel α und β ungefähr gleich zu machen.
3. Die Visur nach dem Triangulationspunkt T soll möglichst lang gewählt werden. Wenn $\frac{s}{d} < \frac{1}{5}$ ist, darf T in jeder beliebigen Richtung genommen werden, d. h. der Winkel γ darf jeden Wert annehmen. Allerdings ist

$$\gamma = 200^{\circ}$$

am günstigsten. Die Abhängigkeit des mittlern Punktfehlers M von γ ist aber sehr gering.

Da der Winkel $\gamma = \sphericalangle T A H$ einen eventuell sehr kurzen und steilen Schenkel hat (AH), mag es interessieren, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn man an seiner Stelle den Winkel

$$\varepsilon = \sphericalangle T A B$$

mißt, dessen Schenkel AB meist nahezu horizontal und nicht sehr kurz ist.

Wir erhalten

$$x_A = x_H + s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cos \left[\nu_{HT} + \varepsilon - \alpha + \arcsin \left(\frac{s}{d} \frac{\sin \beta \sin (\varepsilon - \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)} \right) \right]$$

$$y_A = y_H + s \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \sin \left[\nu_{HT} + \varepsilon - \alpha + \arcsin \left(\frac{s}{d} \frac{\sin \beta \sin (\varepsilon - \alpha)}{\sin (\alpha + \beta)} \right) \right]$$

Daraus folgt

$$(10) \quad M^2 = \left[b^2 \cotg^2 (\alpha + \beta) + b^2 \left(1 + \frac{b}{d} \frac{\sin (\beta + \varepsilon)}{\sin (\alpha + \beta)} \right)^2 \right] m^2_{\alpha}$$

$$+ \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{\sin^4 (\alpha + \beta)} \left[1 + \frac{b^2}{d^2} \sin^2 (\varepsilon - \alpha) \right] m^2_{\beta}$$

$$+ b^2 \left[1 + \frac{b}{d} \cos (\varepsilon - \alpha) \right]^2 m^2_{\varepsilon}$$

$$+ \left[\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} + \frac{b^2}{d^2} \sin^2 (\varepsilon - \alpha) \right] m^2_s$$

Dabei ist

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2} \sin^2 (\varepsilon - \alpha)} \cong 1$$

gesetzt worden. Vernachlässigen wir auch in (10) $\frac{b^2}{d^2}$ gegenüber der Einheit und machen auch hier

$$(7) \quad \alpha + \beta = 100g$$

so finden wir, wenn wir beachten, daß nach (7) $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$ ist:

$$M^2 = b^2 \left[1 + \frac{2b}{d} \sin (\beta + \varepsilon) \right] m^2_{\alpha}$$

$$+ s^2 \cos^2 \beta m^2_{\beta}$$

$$+ b^2 \left[1 + \frac{2b}{d} \cos (\varepsilon - \alpha) \right] m^2_{\varepsilon}$$

$$+ \sin^2 \beta m^2_s$$

Schreiben wir noch alles in s , so finden wir

$$(11) \quad M^2 = s^2 \sin^2 \beta m^2_{\alpha} + 2 s^2 \frac{s}{d} \sin^3 \beta \sin (\beta + \varepsilon) m^2_{\alpha}$$

$$+ s^2 \cos^2 \beta m^2_{\beta}$$

$$+ s^2 \sin^2 \beta m^2_{\varepsilon} + 2 s^2 \frac{s}{d} \sin^3 \beta \cos (\varepsilon - \alpha) m^2_{\varepsilon}$$

$$+ \sin^2 \beta m^2_s$$

Die Ausdrücke mit $\frac{s}{d}$ sind, wenn

$$\frac{s}{d} < \frac{1}{5}$$

unbedeutend. Sie werden zusammen:

$$- 2 s^2 \frac{s}{d} \sin^3 \beta (m^2_{\alpha} + m^2_{\varepsilon})$$

wenn

$$\varepsilon = 200g + \alpha$$

gemacht wird, denn wir haben

$$\sin(\beta + \varepsilon) = \sin(\beta + \alpha + 200g) = \sin 300g = -1$$

$$\cos(\varepsilon - \alpha) = \cos 200g = -1.$$

Wenn

$$\varepsilon = 100g + \alpha$$

ist, verschwinden diese Ausdrücke, weil

$$\sin(\beta + \varepsilon) = \sin(\alpha + \beta + 100g) = \sin 200g = 0$$

$$\cos(\varepsilon - \alpha) = \cos 100g = 0.$$

Für

$$\varepsilon = \alpha$$

werden die beiden Ausdrücke zusammen:

$$+ 2s^2 \frac{s}{d} \sin^3 \beta (m_\alpha^2 + m_\varepsilon^2)$$

Wenn

$$m_\alpha = m_\beta$$

ist, was der Fall ist, wenn

$$\alpha = \beta = 50g$$

erhalten wir für M^2 , unter Vernachlässigung der Glieder mit $\frac{s}{d}$

$$(12) \quad M^2 = s^2 m_\beta^2 + s^2 \sin^2 \beta m_\varepsilon^2 + \sin^2 \beta m_s^2$$

$$m_\alpha = m_\beta.$$

Aus (11) erkennen wir, daß der Einfluß von m_α verkleinert werden kann, durch Verkleinerung von β . Damit nimmt aber der Fehler von α , m_α bestimmt zu. Entsprechend nimmt allerdings m_β ab; dafür wächst $\cos^2 \beta$. Mangels von Versuchsmessungen kann nicht entschieden werden, ob es einen Vorteil hat, von der Gleichheit der Winkel α und β abzugehen. Es ist immerhin zu beachten, daß mit der Verkleinerung von β alle übrigen Terme kleiner werden.

Wir wollen zum Schluß noch den Wert für M für die folgenden Annahmen berechnen:

$$s = 100 \text{ Meter};$$

$$\alpha = \beta = 50g;$$

$$\varepsilon = 250g$$

$$m_s = 0.02 \text{ Meter};$$

$$m_\alpha = m_\beta = \pm 1';$$

$$m_\varepsilon = \pm 0'.5;$$

$$d = 1000 \text{ m}$$

$$\begin{array}{r}
 s^2 m^2 \quad 0.0002 \ 467 \quad - 2 s^2 \frac{s}{d} \sin^3 \beta (m^2_\alpha + m^2_\varepsilon) = -0.0000 \ 218 \\
 s^2 \sin^2 \beta m^2_\varepsilon \quad 0.0000 \ 308 \\
 \sin^2 \beta m^2_s \quad 0.0002 \ 000 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0.0004 \ 775 \\
 \quad \quad \quad - 0.0000 \ 218 \\
 \hline
 M^2 = 0.0004 \ 557 \\
 M = 0.0213 \ \text{Meter}
 \end{array}$$

Vergleichen wir dies mit dem M , das wir bei der Messung von γ gefunden haben, so erkennen wir, daß M bei der Messung von ε um weniges größer wird. Die Messung von ε bietet also bei der Gleichheit von α und β keinen Vorteil. Ob bei der Verkleinerung von β günstigere Resultate entstehen, könnte, wie oben ausgeführt, nur auf Grund von Versuchsmessungen entschieden werden.

Zollikon, 5. August 1939.

Robert Deppeler †.

Überraschend erhielten wir am 8. August die Kunde, daß Robert Deppeler völlig unerwartet aus dem Leben geschieden sei. Noch ist den Teilnehmern der diesjährigen Generalversammlung in Zürich die Erinnerung an den lebensfrohen und gewandten Conférencier der Abendunterhaltung im Kongreßgebäude lebendig und schon hat ein düsteres Geschick dem blühenden Leben ein Ende bereitet.

Robert Deppeler wurde am 15. September 1893 in Oerlikon geboren und erlebte als einziges Kind einfacher, aber in gesicherten Verhältnissen lebender Eltern eine frohe Jugendzeit. Der aufgeweckte Jüngling fand nach Beendigung der Sekundarschule vorerst Beschäftigung auf dem technischen Bureau der Nachbargemeinde Seebach, das damals in halbamtlicher Stellung vom Verfasser dieses Nachrufes geleitet wurde. Nach Beendigung des üblichen Praxisjahres trat der Verstorbene in die Geometerschule am Technikum Winterthur ein und absolvierte dieselbe mit einjährigem Unterbruch im Jahre 1916. In dieser Zwischenzeit und jeweils in den Ferien fand er Arbeit bei seinem ersten Prinzipal und auch nach Absolvierung der Geometerschule sicherte sich derselbe den angehenden Geometer als treuen Mitarbeiter. Im Jahre 1919 erwarb Robert Deppeler durch Ablegung der theoretischen und praktischen Prüfung in Bern das Patent als Grundbuchgeometer. Als im Jahre 1919 sein Prinzipal als Gemeindeingenieur nach Küsnacht gewählt wurde, übernahm der erst 25jährige dessen technisches Bureau und wurde von den Behörden von Seebach auch in der halbamtlichen Stellung als Gemeindeingenieur bestätigt. Überraschend schnell fand sich der Verstorbene in seinem neuen Wirkungskreis zurecht und widmete sich in der Folge mit Geschick der baulichen Entwicklung der sich rasch vergrößernden Vorortsgemeinde. Als im Jahre 1934 die Ge-