

L'emploi en géodésie de coordonnées polaires conformes

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **37 (1939)**

Heft 11

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-197930>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'emploi en géodésie de coordonnées polaires conformes.

Par A. Ansermet.

Dans la Revue technique suisse des mensurations de juillet 1937 il était fait allusion sous le titre « Les bases géodésique de la mensuration suisse » aux avantages que pouvait présenter la substitution de coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires. On sait en effet que les formules de transformation des coordonnées pour passer du sphéroïde ou de la sphère au plan sont assez touffues et se prêtent mal à une étude comparative des divers systèmes. Il en va tout autrement en coordonnées polaires comme on va l'établir.

Faisons abstraction tout d'abord de l'aplatissement du sphéroïde moyennant projection préalable de cette surface sur une sphère suivant le mode généralement appliqué en géodésie; les deux cônes respectivement tangents suivant le parallèle central de chaque surface ont leur *apothèmes égaux*. Le rôle de l'aplatissement sera élucidé plus loin.

Considérons sur la sphère un point quelconque de coordonnées (φ, λ) ; les formules de transformation pour tous les systèmes conformes comprennent les termes:

$$\frac{x}{R} = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{\alpha}{3} (\Delta\varphi)^3 + \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \left(\frac{\cos 2 \varphi_0}{2} - \alpha \cos^2 \varphi_0 \right) + \dots$$

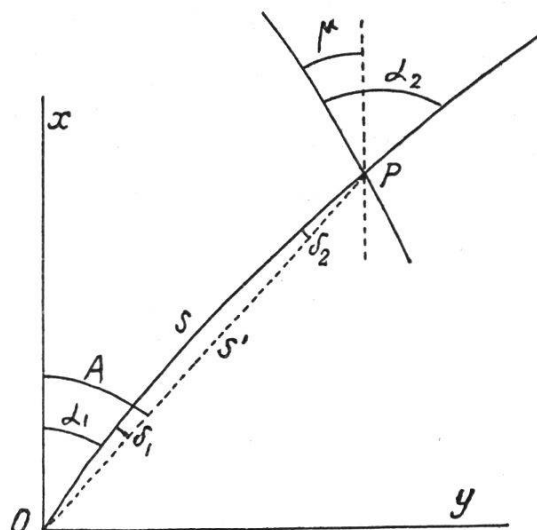
$$\frac{y}{R} = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 + \frac{\lambda \cdot (\Delta\varphi)^2}{2} \cdot \cos \varphi_0 (2\alpha - 1) + \frac{\lambda^3}{3} \cos \varphi_0 \left(\frac{\cos 2 \varphi_0}{2} - \alpha \cdot \cos^2 \varphi_0 \right) + \dots$$

où λ et $\Delta\varphi$ sont exprimés en radians. R est le rayon de la sphère. Le méridien central $\lambda = 0$ est un axe de symétrie; φ_0 est la latitude de l'origine ($\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$).

Le paramètre α qui définit le mode de projection est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$; on lui substitue aussi le paramètre n compris entre -1 et $+1$:

$$\alpha = \frac{1 - n}{4}$$

L'interprétation des formules ci-dessus lorsque α varie n'est pas très aisée; en coordonnées polaires il en est tout autrement. Appliquons à cet effet les formules établies dans l'article déjà mentionnée (Revue des mensurations, juillet 1937). Considérons (voir figure) la géodésique σ issue de l'origine; α_1 et α_2 sont les azimuts respectivement en O et en P . L'arc de grand cercle σ se projette suivant l'arc \overline{OP} de longueur s . Pour le calcul des déformations et des réductions on peut assimiler la transformée s à sa corde s' et inversement car l'écart ($s - s'$)



est de l'ordre $\frac{1}{R^4}$. Désignons enfin par μ la convergence du méridien en P et par δ_1 et δ_2 les réductions d'azimut. La déformation linéaire s'exprime par:

$$m - 1 = \frac{1}{4 R^2} \left((1 - n) x^2 + (1 + n) y^2 \right) + \dots =$$

$$= \frac{s'^2}{4 R^2} \left((1 - n) \cos^2 A + (1 + n) \sin^2 A \right)$$

d'où
$$m - 1 = \frac{s'^2}{4 R^2} (1 - n \cdot \cos 2 A)$$

valeur principale pour $(m - 1)$ en fonction des coordonnées polaires du point P ; on en déduit

$$s' - \sigma = \frac{s'^3}{12 R^2} (1 - n \cdot \cos 2 A)$$

Quant aux réductions δ_1 et δ_2 nous connaissons également leurs valeurs principales; en faisant abstraction des signes on peut écrire:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{s'^2}{2 R^2} n \cdot \sin A \cdot \cos A = \frac{s'^2}{4 R^2} n \cdot \sin 2 A \quad (\text{radians})$$

$$\delta_1 = \frac{s'^2}{12 R^2} n \cdot \sin 2 A \quad \text{ou} \quad \delta_1'' = \frac{s'^2}{12 R^2} \rho'' \cdot n \cdot \sin 2 A.$$

Pour $n = 0$ (proj. stéréographique) on a rigoureusement

$$s = s' \quad \delta_1 = \delta_2 = 0$$

Désignons par P_0 le point défini par cette valeur $n = 0$,
 par P_1 le point caractérisé par la valeur $n = +1$
 et par P_1' le point caractérisé par la valeur $n = -1$,
 cette dernière valeur a été adoptée pour la mensuration suisse ($\alpha = 0,5$).
 Ces formules permettent de calculer très facilement les coordonnées

polaires du point P lorsque le paramètre n varie. Le point P_0 est choisi comme point de référence; ses coordonnées sont donc:

$$s_0 = s_0' \quad A_0 = \alpha_1 \quad (\delta_1 = 0)$$

Pour une valeur n quelconque il suffit de calculer les *appoints* à ajouter aux coordonnées de P_0

$$s_0 = s_0' = \sigma + \frac{s_0'^3}{12 R^2} \quad (n = 0)$$

Les coordonnées polaires s'écriront donc

$$s' = s_0' - \frac{s'^3}{12 R^2} n \cdot \cos 2 A$$

$$A = A_0 - \frac{s'^2}{12 R^2} \rho'' \cdot n \cdot \sin 2 A$$

L'appoint linéaire se mesure suivant OP_0 ; l'appoint angulaire se traduit par un déplacement du point perpendiculairement à OP_0 d'une quantité donnée par

$$- \frac{s'^2}{12 R^2} \cdot n \cdot \sin 2 A \cdot s' = - \frac{s'^3}{12 R^2} n \cdot \sin 2 A$$

On a ainsi deux composantes normales dont la résultante est

$$\frac{s'^3}{12 R^2} n \sqrt{\sin^2 2 A + \cos^2 2 A} = \pm n \cdot \frac{s'^3}{12 R^2}$$

Le gisement de cette résultante par rapport à OP_0 est égal à $2 A$ ou $180^\circ + 2 A$. Cette résultante est le vecteur P_0P joignant le point P_0 ($n = 0$) au point P cherché. Son calcul est facile, analytique ou même graphique au moyen d'une épure tracée dont le voisinage du point P_0 .

En d'autres termes lorsque le paramètre n définissant la projection conforme varie entre ses limites (± 1), le point P parcourt le segment $P_1 P_1'$ dont P_0 est le milieu; ce déplacement linéaire est indépendant du gisement A .

Lorsque le vecteur OP_0 tourne autour de O , le segment $P_1 P_1'$ tourne avec une vitesse double autour de P_0 . Le gisement de ce segment est égal à $2 A$ par rapport à OP_0 et à $3 A$ par rapport à Ox .

Cas particuliers: $A = 30^\circ$ ou 60° ; $P_1 P_1'$ est parallèle à l'un des axes de coordonnées

$$A = 45^\circ \quad 2 A = 90^\circ$$

$P_1 P_1'$ est normal à OP_0 ; cette propriété pouvait s'énoncer a priori puisque les bissectrices des axes sont des directions d'altération linéaire invariante.

En résumé la méthode polaire présente de grands avantages sur la méthode rectangulaire quand il s'agit de comparer les projections conformes entre elles. Il suffit de calculer des appoints dont l'interprétation géométrique est facile.

Le point P_0 ($n = 0$) joue ici un rôle capital; sa détermination est rapide puisque

$$A_0 = \alpha_1 \quad s_0 - \sigma = \frac{s_0^3}{12R^2} = P_0 P_1 = P_0 P_1'$$

L'exemple numérique ci-après fera mieux ressortir la simplicité du calcul. L'arc σ est donné par les formules classiques du « problème fondamental de la géodésie » ainsi que $(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Convergence du méridien. Ici encore considérons la valeur particulière μ_0 que prend la convergence μ pour $n = 0$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0$)

$$A_0 = \alpha_1 \quad \mu_0 = \alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$$

Le calcul de μ_0 est donc facile; pour n différent de zéro on a:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \mu + (\delta_1 + \delta_2) \quad (\text{voir figure})$$

$$\mu = \mu_0 - (\delta_1 + \delta_2)$$

et algébriquement en tenant compte du signe du paramètre

$$\mu = \mu_0 + \frac{1}{4R^2} \cdot \rho'' \cdot n \cdot s'^2 \cdot \sin 2A$$

La convergence μ s'obtient donc en ajoutant à la valeur μ_0 indépendante de n , un *appoint* qui est fonction linéaire de n . μ_0 est une valeur médiane.

$$\mu_0 - \frac{\rho''}{4R^2} \cdot s'^2 \cdot \sin 2A < \mu < \mu_0 + \frac{\rho''}{4R^2} s'^2 \sin 2A$$

(pour $\sin 2A > 0$ et $\mu_0 > 0$)

Bien entendu il s'agit ici encore de valeurs principales

$$\mu_0 = \Delta\alpha = \lambda \cdot \sin \left(\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \left(1 + \frac{(\Delta\varphi)^2}{8} + \frac{1}{12} \cdot \lambda^2 \cdot \cos^2 \left[\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2} \right] \right)$$

$$\mu_0 = \lambda \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta\varphi \cdot \lambda \cos \varphi_0 + \frac{1}{12} \lambda^3 \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 + \dots$$

(radians)

(voir p. ex. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III, 1939, p. 362).

Application. Point P : Feldberg.

$$\Delta\varphi = +3317'', 19 \quad \lambda = +2037'', 50$$

$$\varphi_0 = 46^\circ 54' 27'', 83 \quad \log R^m = 6.80474007$$

Le calcul par les formules classiques donne:

$$\sigma = 111107,08 \quad a_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 22^\circ 35' 16'', 14$$

$$\Delta\alpha = \mu_0 = 1499'', 09$$

$$\alpha_1 = 22^\circ 22' 46'', 59 = A_0 = a_m - \frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$s_0 = s_0' = \sigma + \frac{111100^3}{12R^2} = \sigma + 2,81 = 111109,89 \text{ m}$$

Calcul des éléments de la projection
pour $n = -1$ (système suisse)

1° Convergence μ

$$\text{appoint: } \frac{\rho''}{4 R^2} n \cdot s'^2 \cdot \sin 2 A = - \frac{\rho''}{4 R^2} \cdot 111,1^2 \cdot \sin 44^\circ 45'$$

$$= -11'',02$$

(R en km)

$$\delta_1'' + \delta_2'' = 11'',02 \quad \delta_1'' = 3'',67 \text{ (val. absolues)}$$

$$\mu = 1499'',09 - 11'',02 = \underline{1488'',07}$$

pour $n = +1$ on aurait $\mu = 1499'',09 + 11'',02$

2° Coordonnées $x_1' y_1'$: $A_0 = \alpha_1 = 22^\circ 22' 46'',59$
 $\delta_1 = \underline{\quad\quad\quad} 3'',67$ (appoint angulaire)
 $A = 22^\circ 22' 50'',26$

Appoint linéaire = $2,81 \cdot \cos 2 A = 2,00$ m.

$$s' = s_0' + 2,00 = 111\,111,89 \text{ m}$$

$$x_1' = s' \cdot \cos A = + 102\,742,33 \text{ m}$$

$$y_1' = s' \cdot \sin A = + 42\,306,71 \text{ m}$$

Calcul par le point P_0 :

$$x_0 = s_0' \cdot \cos A_0 = + 102\,741,24 \text{ m}$$

$$y_0 = s_0' \cdot \sin A_0 = + 42\,304,12 \text{ m}$$

les appoints se calculeront numériquement ou graphiquement

$$P_0 P_1 = P_0 P_1' = 2,81 \text{ m.}$$

le gisement de ce segment étant égal à $3 A = 67^\circ 08'$

$$2,81 \cdot \sin 67^\circ 08' = + 2,59 \text{ m} = \delta y$$

$$2,81 \cdot \cos 67^\circ 08' = + 1,09 \text{ m} = \delta x$$

$$x_0 = + 102\,741,24 \text{ m}$$

$$y_0 = + 42\,304,12 \text{ m}$$

$$\delta x = + \quad 1,09 \text{ m}$$

$$\delta y = + \quad 2,59 \text{ m}$$

$$x_1' = + 102\,742,33 \text{ m}$$

$$y_1' = + 42\,306,71 \text{ m}$$

Pour toute autre valeur du paramètre n le calcul est analogue; la simplicité de la méthode polaire est évidente.

Contrôle. Le segment $P_0 P_1$ est la résultante de 2 composantes:

$$\frac{s'^3}{12 R^2} \cos 2 A = 2,00 \text{ m}$$

$$\text{et } \frac{s'^3}{12 R^2} \cdot \sin 2 A = 1,98 \text{ m}$$

$$\sqrt{2,00^2 + 1,98^2} = 2,81 \text{ m} \quad \text{tg } 2 A = 0,991 = \frac{1,98}{2,00} \quad (2 A = 44^\circ 45')$$

$2 A$ est le gisement de $P_0 P_1'$ par rapport à OP_0 .

Pour des valeurs intermédiaires du paramètre n il suffit de procéder par interpolation linéaire.

Remarque: Ces calculs ont été effectués avec la table de logarithmes à 7 décimales; ils concordent cependant de façon satisfaisante avec les résultats obtenus par le Prof. Rosenmund.

Influence de l'aplatissement. Jusqu'ici nous avons considéré la projection de la sphère de rayon R dans le plan. L'arc s est la transformée de l'arc σ ; ce dernier est lui-même la projection d'un arc σ_e (géodésique) de l'ellipsoïde. La différence $(\sigma - \sigma_e)$ est en général négligeable et en tous cas facilement calculable. Quant aux réductions d'azimut Δ_1 et Δ_2 résultant de la projection du sphéroïde sur la sphère elles sont aussi très faibles. Pour un arc σ_e issu de l'origine on a en valeur absolue: $\Delta_2 \cong 3 \Delta_1$.

La somme $(\Delta_1 + \Delta_2)$, abstraction faite des signes, est sensiblement fonction du moment statique de l'aire comprise entre l'arc σ et sa projection sur le parallèle central φ_0 ($\int \Delta \varphi^2 \cdot \sin \alpha \cdot d\sigma$), α étant l'azimut de l'arc en chaque point. Pour un arc de géodésique de longueur donnée issu de l'origine ce moment est lui-même fonction du produit $(\cos^2 A \cdot \sin A)$ où A est une valeur moyenne de α . Le maximum de $(\Delta_1 + \Delta_2)$ correspond donc à la valeur $\sin A = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Récapitulation. Le but de cette note était de montrer tout le parti qu'on peut tirer de l'emploi de coordonnées conformes polaires. En faisant intervenir la valeur $n = 0$ du paramètre définissant la projection, on donne au problème un caractère nouveau qui est propre à la méthode polaire. Les calculs qui précèdent sont basés sur les valeurs principales des corrections; les résultats acquis sont cependant déjà tangibles. Dans une prochaine note nous nous réservons de pousser le développement des formules en vue de leur application à des champs étendus.

Littérature.

M. Rosenmund, Projektionssystem der Schweiz. Landesvermessung. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III, 1939.
Driencourt & Laborde, Traité des projections (Paris, Hermann & Cie.).
Revue technique suisse des mensurations, juillet 1937.

Bericht über die 7. Hauptversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik, 4.—15. September 1939 in Washington (U. S. A.)

Von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon.

Es schien zunächst, daß die Versammlung im Hinblick auf die gespannte politische Lage in Europa nicht abgehalten werden könne. Da aber bis zum Zeitpunkt der Abreise, der den Kongreßbehörden bekannt war, keine Mitteilung eintraf, reiste ich am Abend des 22. August ab, um am 23. August abends in Cherbourg das Schiff „Aquitania“ der