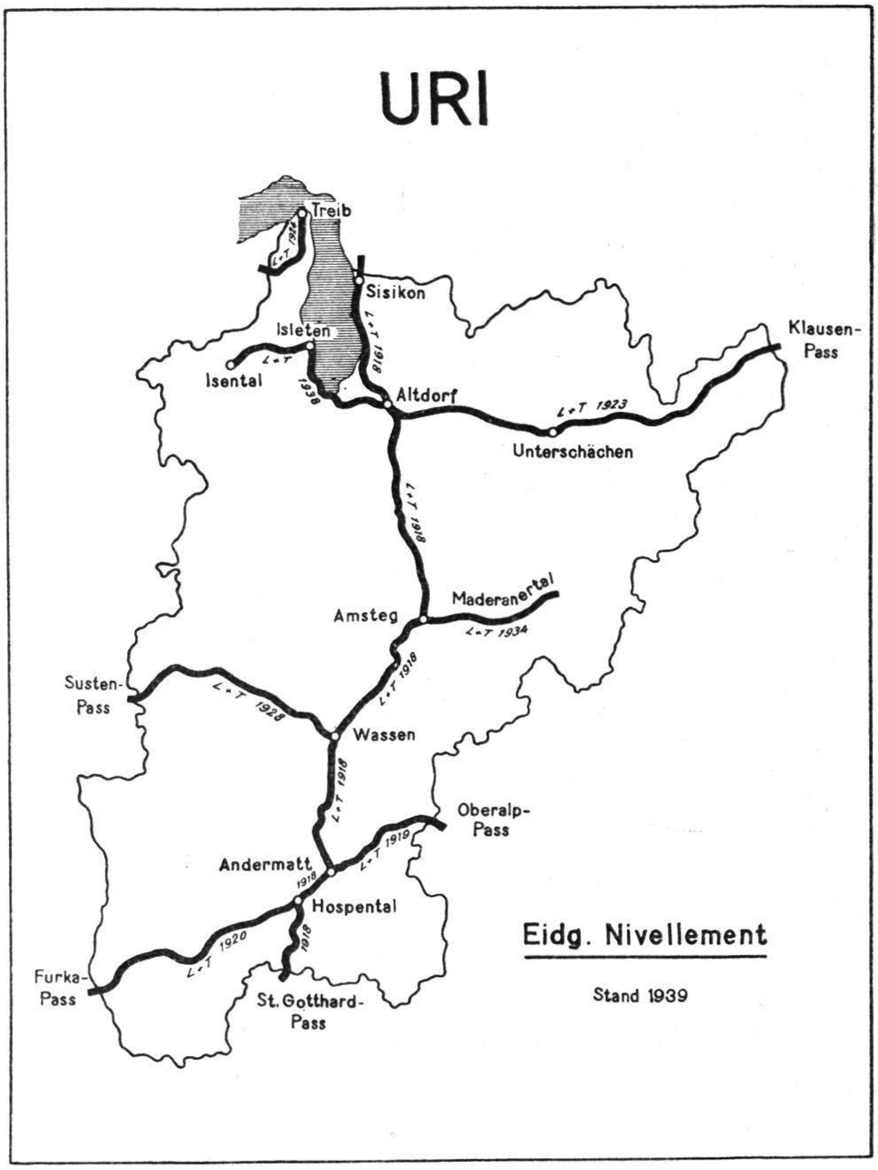


Abb. 15.

für den Kanton Uri, das im Frühjahr 1939 erschienen ist. Abbildung 15 gibt den Verlauf aller Linien. Die Höhen stützen sich auf die neue Höhe 373,6 m des Pierre du Niton (RPN), den Ausgangspunkt der Schweizerischen Hypsometrie.

(Schluß folgt.)

Beitrag zur Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden.

Von *E. Reich*, Grundbuchgeometer.

Herr Stadtgeometer Bertschmann, Vorsteher des Vermessungsamtes der Stadt Zürich, hat der Leserschaft unserer Zeitschrift in der letzten Januarnummer eine sehr interessante, mathematisch leichtverständliche Abhandlung über die Bestimmung der Koordinaten des

Schnittpunktes zweier Geraden, abgeleitet aus Flächen, vorgelegt und an Hand eines Beispiels gezeigt, daß man ohne Zwischenzahlen aufschreiben zu müssen, die gesuchten Koordinaten, nach verschiedenen Rechenoperationen, ohne weiteres der Maschine entnehmen kann.

In der städtischen Geometerpraxis, ja überall da, wo die Koordinaten die Grundlage für die Flächenberechnung der Grundstücke und der Absteckung der Hoch- und Tiefbauten usw. bilden, ist die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden oder die des Schnittpunktes nach Richtungen orientierten Visierstrahlen von großer praktischer Bedeutung. Die deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen verzeichnet denn auch seit 1872 bis heute nicht weniger als 15 Abhandlungen über die Berechnung der Koordinaten des Schnittes zweier Geraden. Auch in unserer jüngeren Zeitschrift wird das Problem in mehreren Abhandlungen theoretisch behandelt und mit Zahlenbeispielen belegt. Das Bestreben, die etwas umständliche Berechnung abzukürzen, einfacher zu gestalten, ist der Grundzug in allen Abhandlungen und kein Mittel bleibt unversucht, dem ersehnten Ziel näher zu kommen.

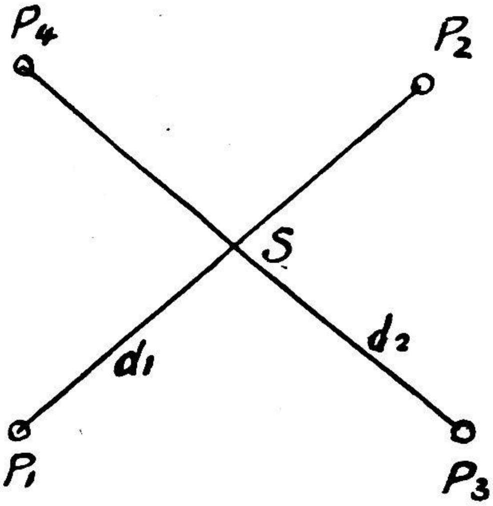
Das Verfahren des Herrn Bertschmann, das Flächen durch vier bekannte Koordinatenwerte voraussetzt, hat an der Nordwestgrenze unseres Landes einige Gemüter sehr intensiv beschäftigt und zur Weiterentwicklung und Vereinfachung der Methode angeregt. Der Schreiber dieser Zeilen, der dem Fortschritt gerne huldigt, ist auch in der Lage, auf ein neues Rechenverfahren hinzuweisen, mittelst dem man mit einer einfachen Rechenmaschine, nach der üblichen Vorbereitung für Schnittpunkte nach dem eidg. Formular, die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden, ohne Zwischenzahlen aufschreiben zu müssen oder Zahlwerte zu vernachlässigen, berechnen kann. Eine wichtige Voraussetzung ist, daß die Maschine im Resultatwerk und im Zählwerk mit durchgreifender Zehnerübertragung versehen ist und das Resultatwerk 13 bis 15 Stellen besitzt. Das Rechenproblem stützt sich auf die universelle analytische Formel des Schnittpunktes zweier Geraden, gegeben durch vier Punkte oder durch zwei nach Richtungen orientierten Visierstrahlen. Die bekannte Formel lautet:

$$X_s = \frac{\operatorname{tg} 1^2 \cdot x_1 - \operatorname{tg} 3^4 \cdot x_3 + y_3 - y_1}{\operatorname{tg} 1^2 - \operatorname{tg} 3^4} \qquad \text{(a)}^{1}$$

$$Y_s = \frac{\operatorname{ctg} 1^2 \cdot y_1 - \operatorname{ctg} 3^4 \cdot y_3 + x_3 - x_1}{\operatorname{ctg} 1^2 - \operatorname{ctg} 3^4} \qquad \text{(b)}$$

$$= (X_s - x_1) \cdot \operatorname{tg} 1^2 + y_1 \qquad \text{(c)}$$

$$= (X_s - x_3) \cdot \operatorname{tg} 3^4 + y_3 \qquad \text{(d)}$$



Die Formeln (a) und (b) geben uns direkt die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden P_1, P_2 und P_3, P_4, wogegen die Formeln (c) und (d) von X_s abhängige, aber wertvolle Kürzungen

---

[1] Siehe Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1916, S. 53.

für die Berechnung des Y_s sind. Würde man die Formel (b) für die Berechnung des Y_s verwenden, so müßte man notgedrungen die reziproken Werte der Tangenten bzw. die Cotangenten der bezüglichen Geraden berechnen. Das wäre wohl eine unabhängige Berechnung des X_s und Y_s, jedoch mit einer Mehrbelastung von zwei Divisionen. Durch die am Schlusse vorgenommene Tangentenkontrolle mit den gegebenen Ausgangspunkten P_1 und P_3 und den berechneten Schnittpunktkoordinaten X_s und Y_s gewinnt man aber den bedeutenden Vorteil, die oft wertvollen und wünschbaren Distanzen d_1 und d_2 aus den Koordinatendifferenzen berechnen zu können. Stimmen die mit dem Schnittpunkt S berechneten Tangentenwerte mit den in der Vorbereitung berechneten tg 1^2 und tg 3^4 überein, so ist die Richtigkeit der Berechnung des Schnittpunktes bewiesen.

Der Zeitaufwand für die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden, die durch Koordinaten festgelegt sind, ist ungefähr der gleiche, wie wenn man zwei nach Richtungen orientierte Visierstrahlen rechnerisch von zwei verschiedenen Punkten aus zum Schnitte bringt. Die beiden Probleme unterscheiden sich einzig dadurch, daß für den ersten Fall die Tangentenwerte aus den Koordinatendifferenzen P_1, P_2 und P_3, P_4 hergeleitet werden, wogegen für den zweiten Fall die Tangentenwerte einer trigonometrischen Tafel für Maschinenrechnen entnommen werden müssen unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Tangente bzw. Cotangente in den vier verschiedenen Quadranten. Folgende Tabelle enthält bekannte Tangentenwerte:*

Funktion	$1^2 = a$ I	$1^2 = 100^g + a$ II	$1^2 = 200^g + a$ III	$1^2 = 300^g + a$ IV
tg 1^2	+ tg a	— ctg a	+ tg a	— ctg a
ctg 1^2	+ ctg a	— tg a	+ ctg a	— tg a

Die Formeln a, b, c, d sind wegen ihres Aufbaues sehr leicht im Gedächtnis zu behalten und empfehlen sich deshalb von selber.

Für unsere folgende Betrachtung ist es nun ganz gleichgültig, ob der Wertbetrag, den die Formel (a) über dem Bruchstrich liefert, positiv oder negativ in der Rechenmaschine erscheint; die Hauptsache ist, daß die Maschine (Sprossenradsystem) konsequent für Positivwerte vorwärts und für Negativwerte rückwärts bewegt wird. Angenommen, der Zahlwert nach der Formel (a) erscheine über dem Bruchstrich positiv im Resultatwerk der Maschine, so ist nichts weiteres vorzukehren als im Einstellwerk den Divisor tg 1^2 — tg 3^4 einzustellen und die Division nach gewohnter Weise zu vollziehen. Das so berechnete X_s ist im Zählwerk enthalten. Ist der Zahlwert über dem Bruchstrich negativ ausgefallen, was jede Maschine mit einem Glockenzeichen und im Resultatwerk (*links*) mit Neunerziffern anzeigt, dann liegt der Fall anders. Man könnte jetzt die dekadische Ergänzung bilden unter Weglassung einiger

Ziffern und diesen positiven Betrag mit dem Divisor tg 1^2 — tg 3^4 dividieren, um X_s zu erhalten. Wir wollen aber nichts vernachlässigen, noch abkürzen, noch erwägen, ob die Werte links oder rechts vom Minuszeichen positiv oder negativ seien, sondern den in der Maschine enthaltenen *negativen* Zahlenwert mit tg 1^2 — tg 3^4 dividieren. Um diese Division vornehmen zu können, denken wir uns den Divisor tg 1^2 — tg 3^4 mit 1, 10, 100 oder 1000 usw. vermehrt, stellen oder rücken deshalb den Resultatschlitten entsprechend der Vermehrung nach rechts und drehen im Zählwerk um eine Einheit vorwärts. Dadurch verschwinden die Neunerziffern im Resultatwerk und der negative Wert hat sich in einen positiven verwandelt. Durch Rückwärtsdrehen (dividieren) zieht man den Divisor tg 1^2 — tg 3^4 nun so lange von der im Resultatwerk stehenden Zahl ab, bis im dekadisch rechnenden *Zählwerk* X_s erscheint. Im Resultatwerk bleibt gewöhnlich ein kleiner unbedeutender Zahlwert zurück.

Für die Berechnung des Y_s nimmt man, wie aus den Formeln (c) und (d) hervorgeht, das bereits berechnete X_s zu Hilfe. Man bildet die Differenz $X_s - x_1$, multipliziert mit tg 1^2 und addiert y_1 dazu und im Resultatwerk erscheint Y_s des gesuchten Schnittpunktes.

Die Resultate X_s und Y_s sind nach diesem Verfahren mit einem einfachen übersichtlichen Rechnungsgang erhalten worden und bergen den Vorteil in sich, daß die am Schluß vorzunehmende Tangentenkontrolle mit den Schnittpunktkoordinaten nahezu mit den in der Berechnung gebrauchten tg 1^2 und tg 3^4 übereinstimmen. Es ist noch darauf hinzuweisen, daß je nach der Lage der Schnittlinien im Koordinatensystem kleine Differenzen zu gewärtigen sind, die von den empfindlichen Tangentenwerten herrühren. Es ist deshalb von Bedeutung, wenn man alle Zahlwerte in der Maschine mitschleppt, um sie dann am Schluß sozusagen am Resultat mitarbeiten zu lassen. Man könnte nun versucht sein, den Einwand zu erheben, daß das Rechnen mit den Koordinaten x, y, statt mit den Koordinatendifferenzen umständlich sei. Der geübte Rechner wird aber bald einsehen, daß die Koordinatenwerte von x und y vorteilhaft gekürzt werden können und zwar oft um so viel, daß der Hinweis, die Verwendung der Ausgangskoordinatendifferenzen sei rationeller, nicht als allgemeine Regel gelten kann.

Nachschrift zum Artikel Reich.

Der vorbeschriebene Rechnungsgang wertet die altbekannten Formeln der analytischen Geometrie für die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden aus. Diese Formeln wurden seinerzeit, als man noch die Rechenwalze als Rechenhilfsmittel verwendete, aus genauigkeitstechnischen Gründen in die Form gebracht, wie sie in den Musterbeispielen der Grundbuchvermessung enthalten sind. Sie gestatten das Rechnen mit Koordinatendifferenzen. Bei Anwendung der Rechenmaschine, die jetzt allgemein in die Geometerpraxis eingeführt ist, fallen genauigkeitstechnische Erwägungen außer Betracht, und es können Raschheit und Bequemlichkeit des Rechnungsganges in den Vordergrund gestellt werden. Da diese bei Anwendung der unmodifizierten Formeln größer sind, war es zweifellos richtig, sie wieder in die Rechenpraxis aufzunehmen. Das ist u. a. im Handbuch der Vermessungskunde von Jordan, II. Band 1914, empfohlen. Eine Punktierung des Arbeitsvorganges ergibt für den im Januarheft der Zeitschrift angegebenen Rechnungsgang einen kleinen Vorteil. Herr Fisler hat mich auf die Möglichkeit der Anwendung der „Rechenmaschinengeometrie" zur Auflösung des Schnittproblems hingewiesen. In einem folgenden Artikel soll ein Rechnungsgang für die Auswertung der alten Formeln begründet werden, der einen wirklichen Fortschritt verspricht.

S. Bertschmann.

Frühjahrsversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen.

Samstag, den 17. Februar 1940, als noch Land und Stadt im tiefsten Schnee gebettet lagen, hielt die Sektion Zürich-Schaffhausen ihre Generalversammlung in Zürich ab. Präsident Vogel konnte in seinen Eröffnungsworten 32 Vereinsmitglieder begrüßen, unter ihnen auch einige Senioren, nämlich die Herren alt Kantonsgeometer Leemann und R. Faes und E. Fischli. Die Traktandenliste umfaßte in der Hauptsache die Erledigung der statutarischen Geschäfte wie Abnahme von Jahresbericht und Jahresrechnung pro 1939 sowie die Wahlen der Vereinsorgane. Die eventuelle Neubesetzung der infolge Pensionierung freigewordenen Stelle des zürcherischen Kantonsgeometers bot Anlaß zu einer ausgedehnten, aber sachlich geführten Diskussion. Im Zusammenhang damit wurde die Ausbildungsfrage gestreift, denn es berühren sich hier Probleme der Schule und Praxis aufs engste.

Die Mitgliederzahl unserer Sektion hat sich im letzten Vereinsjahr neuerdings durch Todesfälle vermindert und bewegt sich um die 70. Fünf Kollegen, die teils noch im besten Mannesalter standen, weilen nicht mehr unter uns. Es sind dies die Herren Robert Deppeler, Hans Hofmann in Elgg, August Ullmann, Zürich, Emil Hofmann und alt Stadtgeometer Joh. Jak. Ruckstuhl, Winterthur. Von allen Verstorbenen sind in der „Zeitschrift für Vermessungswesen" Nekrologe veröffentlicht worden, die ihren Lebensweg zeichneten. Die Versammlung ehrt die Toten durch Erheben von den Sitzen.

Im Jahresbericht führt der Vorsitzende aus, daß das letzte Vereinsjahr für unsern Beruf vielversprechend begonnen hat. Die Landesausstellung brachte eine umfassende und gutbesuchte Schau unseres Aufgabengebietes; die Sektion hatte die Ehre, die Hauptversammlung des S. G.V. durchzuführen. Mit dem Ausbruch des Krieges mußten wie andernorts eine größere Zahl unserer Mitglieder zum Aktivdienst einrücken, weshalb die Vereinstätigkeit zunächst ruhte und auch keine Herbstversammlung stattfand. Die vom Vereinskassier A. Witzig, Zürich-Altstetten, abgefaßte Jahresrechnung weist einen erfreulichen Abschluß auf. Dank bedeutender Einnahmen aus Taxationsgebühren konnte auch das Defizit der Hauptversammlung ohne Vermögensverminderung vollständig getilgt werden. Die Sektion hatte ebenfalls wie der Zentralverein einen Kredit von Fr. 300.— bewilligt an die Kosten der Durchführung der Hauptversammlung. Das Organisationskomitee wurde durch die Generalversammlung, unter Verdankung für ihre große Arbeit, entlastet, und ein Nachtragskredit bewilligt. Der