Verschiedenartige Auflösungen einer Minimumsaufgabe

Autor(en): **Leemann, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **41 (1943)**

Heft 9

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-200752

weil

$$L \cdot I \cdot H^{-1} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{[pal]}{[paa]} \\ -\dfrac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ -\dfrac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} \end{Bmatrix} \qquad (36)$$

(36) ist identisch mit der letzten Spalte des Krakovians I–G.

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{[pal]}{[paa]} \\ -\dfrac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ -\dfrac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \cdot 2]} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} & 0 \\ g_{31}^{-1} & g_{32}^{-1} & g_{33}^{-1} \end{Bmatrix} \qquad (37)$$

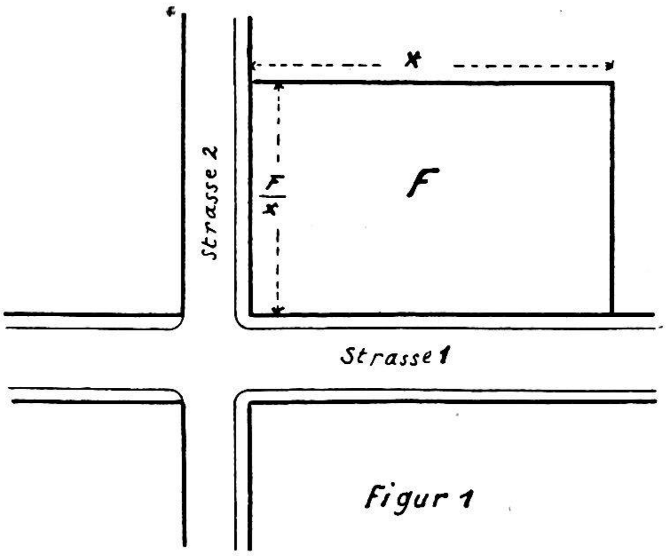
Auf gleiche Weise kann man die Formel (23) ableiten. (Fortsetzung folgt.)

Verschiedenartige Auflösungen einer Minimumsaufgabe

Von *W. Leemann*, alt Kantonsgeometer

Ein *Grundstück*, welches an zwei sich rechtwinklich kreuzende Straßen zu liegen kommt, soll *Rechtecksform* mit *bestimmtem Flächeninhalt* F erhalten. Es wird mit *Trottoirbeiträgen*, die pro Laufmeter B_1 bzw. B_2 Franken betragen, belastet werden. Der Geometer soll nun Länge und Tiefe des Grundstückes so bestimmen, daß die *Summe der beiden Trottoirbeiträge ein Minimum* wird.

1. Auflösung. Als naheliegendste Auflösung möge diejenige mit Hilfe der Differentialrechnung an die Spitze gestellt werden.



Figur 1

Setzt man die Länge des Grundstückes gleich x, so beträgt die Tiefe $\dfrac{F}{x}$.

Der Trottoirbeitrag an der Längsseite sei B_1, an der Tiefenseite B_2 pro Laufmeter. Setzt man die Summe der beiden Trottoirbeiträge gleich y, so ist

$$y = B_1 x + B_2 \frac{F}{x}$$

Das Minimum von y wird bekanntlich so gefunden, daß man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt und die so erhaltene Gleichung nach x auflöst.

Es ist nun $\frac{dy}{dx} = B_1 - \frac{B_2 F}{x^2} = 0$

Daraus folgt $\underline{x = \sqrt{\frac{B_2 F}{B_1}}}$

Für diese Länge x des Grundstückes wird also die Summe der beiderseitigen Trottoirbeiträge ein Minimum.

2. Auflösung. Betrachtet man die beiden Glieder rechts in obiger Gleichung für y, deren Summe ein Minimum werden soll, als Seiten eines neuen, fingierten Rechteckes, so ist dessen Inhalt $= B_1 B_2 F$, also konstant.

Von *allen Rechtecken* mit *konstantem Inhalt* hat nun bekanntlich das *Quadrat* den *kleinsten Umfang.* Statt dessen kann man auch sagen: Von allen Rechtecken mit konstantem Inhalt, ist beim Quadrat die Summe von Länge und Tiefe am kleinsten, d. h. ein Minimum. Darnach weiß man nun, daß das fingierte Rechteck ein Quadrat sein muß, also ist zu setzen

$$B_1 x = B_2 \frac{F}{x}$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt wieder, wie oben:

$$\underline{x = \sqrt{\frac{B_2 F}{B_1}}}$$

3. Auflösung. Die Gleichung $y = B_1 x + B_2 \frac{F}{x}$ ist eine *quadratische Gleichung,* deren Normalform lautet:

$$B_1 x^2 - yx + B_2 F = 0$$

woraus folgt $$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4 B_2 B_1 F}}{2 B_1}$$

Wenn nun y ein Minimum sein soll, so muß es auch y^2 sein. Betrachtet man den Radikanden, so erkennt man, daß y^2 nicht kleiner werden darf als $4 B_2 B_1 F$, weil soàst die Wurzel *imaginär* wird. Das Glied $4 B_2 B_1 F$ stellt daher den Minimalwert von y^2 dar und der *Minimalwert von* y ist daher $= \sqrt{4 B_2 B_1 F}$

Da der Wurzelwert nun zu Null wird, hat man

$$x = \frac{y}{2\,B_1} = \frac{\sqrt{4\,B_2\,B_1\,F}}{2\,B_1}$$

$$x = \sqrt{\frac{B_2\,F}{B_1}}, \text{ wie oben.}$$

4. Auflösung. Man geht wieder von der Gleichung aus:

$$y = B_1\,x + B_2\,\frac{F}{x}$$

wo y ein Minimum werden soll. Dividiert man beiderseits durch B_1, so erhält man

$$\frac{y}{B_1} = x + \frac{B_2\,F}{B_1\,x}$$

Wenn y ein Minimum ist, so ist es auch $\frac{y}{B_1}$, weil B_1 eine konstante Größe ist. Nun setzt man

$$\frac{y}{B_1} = y' = x + \frac{B_2\,F}{B_1\,x}$$

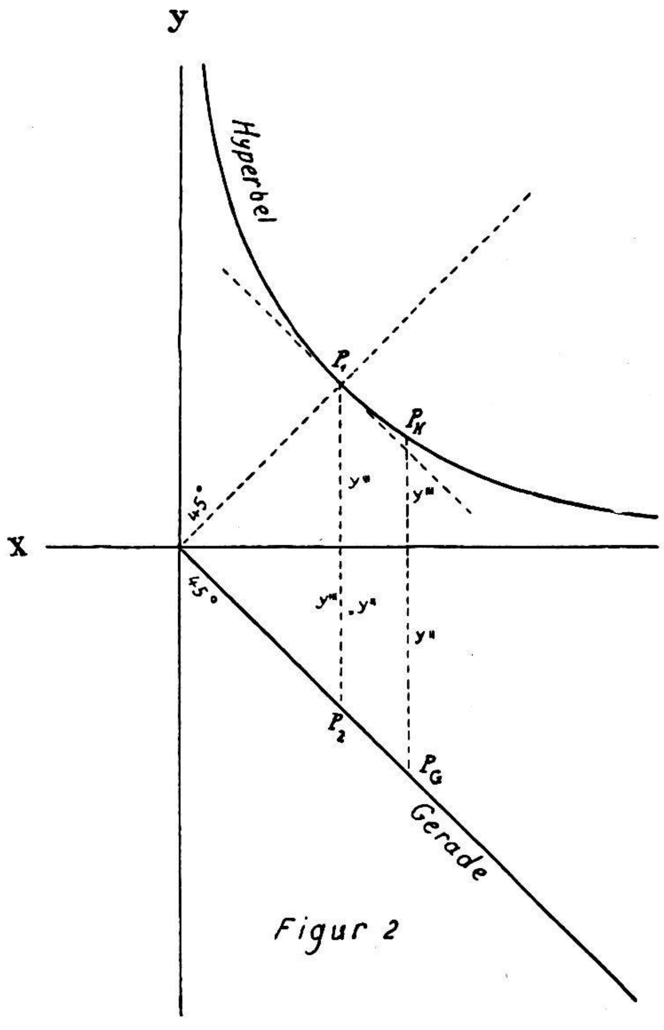
Betrachtet man die beiden Glieder rechts, jedes für sich, und setzt

$$y'' = x$$

$$y''' = \frac{B_2\,F}{B_1\,x}$$

so erkennt man, daß die erste dieser Gleichungen diejenige einer *Geraden* ist, welche durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und einen Neigungswinkel von 45° hat. Die zweite Gleichung ist diejenige einer *gleichseitigen Hyperbel*, deren Asymtoten die beiden Koordinatenachsen sind.

Zeichnet man Gerade und Hyperbel auf (wobei



zweckmäßig die Ordinaten y'' und y''' in entgegengesetzter Richtung aufgetragen werden, um ihre Summe aus der Figur 2 ablesen zu können), so springt in die Augen, daß $y'' + y'''$ von zwei korrespondierenden Punkten P_G und P_H immer größer ist, als die entsprechende Summe der Punkte P_1 und P_2. Hier, wo $y'' = y'''$ ist, tritt also das Minimum für y' und mithin auch für y ein. Für dasselbe muß daher sein:

$$x = \frac{B_2 F}{B_1 x},$$

woraus wieder folgt:

$$x = \sqrt{\frac{B_2 F}{B_1}}.$$

Note sur l'article « La solution dite numérique du problème fondamental de la photogrammétrie »

Par *W. Ch. Bachmann*, géom. off. Lic. ès sciences

La Revue Suisse des Mensurations cadastrales a publié, dans son numéro de juillet, un article ayant trait au problème fondamental de la photogrammétrie et dont l'auteur en est M. le Professeur Ansermet. Cet article contenant un certain nombre d'affirmations et de développements susceptibles de surprendre le lecteur initié, j'estime de mon devoir de formuler les observations ci-après.

Le travail en question est en particulier en opposition avec les théories nouvelles sur l'orientation relative que j'ai développées dans ma thèse, travail qui n'a pas encore été publié jusqu'à ce jour, mais dont M. le professeur Ansermet a déjà eu connaissance. M. Ansermet se réfère aux publications de M. S. Finsterwalder qui ont paru en 1903 et 1932. Ce dernier traite l'orientation relative par la méthode numérique en utilisant 5 points. Il n'y a donc aucune compensation et l'application de la loi de propagation est facile si l'on a soin de revenir aux observations, ce qui a été fait par M. S. Finsterwalder.

Lorsqu'on utilise 6 points, la question se complique quelque peu. Pour ce dernier cas, les erreurs moyennes à craindre sur les éléments d'orientation ont été calculées par M. R. Finsterwalder, *mais les résultats obtenus ne sont valables que lorsqu'on mesure les parallaxes en 6 points et que l'on compense ensuite d'après la méthode des moindres carrés.* Etant donné que l'on ne procède jamais ainsi dans la pratique, les résultats obtenus par M. R. Finsterwalder ont un intérêt essentiellement théorique, ce qui ne m'empêche nullement d'apprécier ce travail à sa juste valeur. Je puis du reste me dispenser d'entrer dans plus de détails car M. le Professeur Schermerhorn a traité ces questions avec une clarté tout à fait remarquable dans le journal « Photogrammétria ».

En utilisant 6 points particuliers pour l'orientation relative, M. le Professeur Ansermet obtient la relation

$$2\, pv_1 - 2\, pv_2 - pv_3 + pv_4 - pv_5 + pv_6 + w = 0$$

qu'il trouve particulièrement intéressante parce qu'elle est indépendante des 5 variables d'orientation. Je ne vois guère pour quelle raison l'auteur attache une si grande importance à cette relation qui ne surprendra certainement nul lecteur initié. En effet, si nous déterminons 5 inconnues