

# Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten

Autor(en): **Ackerl, Franz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **46 (1948)**

Heft 2

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-205577>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\pm 4$  ms bzw.  $\pm 6$  ms beträgt. Unter Abkürzung der Wartezeit auf Signalverbesserungen auf  $\frac{1}{3}$  der bisherigen, also unter Entnahme der Uhr-

stände an der Stelle  $+ t_m \sqrt{2}$  würde die Genauigkeit im Falle Deutsche Seewarte auf jeden Fall ( $\pm 6$  ms), im Falle Geodätisches Institut nahezu (mit  $\pm 6$  ms) beibehalten werden.

Auf Grund dieser Untersuchungen könnte gesagt werden, daß für ein und dieselben Quarzuhren das Potsdamer Verfahren genauere Ergebnisse liefert als das der Deutschen Seewarte. Indessen ist dieser Schluß, allein schon wegen der geringfügigen Genauigkeitsunterschiede, nur bedingt richtig. Sind nämlich Uhren in Betrieb, deren Acceleration tatsächlich über größere Zeiträume (etwa 6 Monate) als konstant angesehen werden können, so ist diese Folgerung zutreffend. Weisen die Uhren jedoch eine lebhaftere Accelerationsschwankung auf, so wird eine Standkurve dritter Ordnung noch eher zutreffend sein als eine Gerade, so daß das Gangverhalten der speziellen Uhren für die Wahl des Rechenverfahrens allein ausschlaggebend ist.

Die Entnahme der Uhrstände zur jeweils günstigsten und zugleich nächstliegenden Epoche ist nur, unter der Voraussetzung möglich, daß jeden Tag – eigentlich ununterbrochen – eine Ausgleichung der anfallenden astronomisch bestimmten Uhrstände erfolgt<sup>1</sup>. Ein mechanisches Gerät zur automatischen Durchführung dieser sonst kaum zu bewältigenden Rechenarbeit – auch nach Ansätzen höherer Ordnung – habe ich entworfen, welches von der mechanischen Werkstätte O. Kaulfuß in Dresden gebaut worden ist. Es wird in einer eigenen Veröffentlichung darüber berichtet werden.

## Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten

*Von Prof. Dr. Franz Ackerl, Wien.*

In einer Arbeit [1], die sich derzeit im Druck befindet und voraussichtlich im Oktober 1947 bei dem geodätischen Kongreß in Florenz erscheinen wird, ist untersucht worden, wie sich die Koordinatenfehler der gegebenen Punkte auf den durch einfachen Rückwärtseinschnitt bestimmten Neupunkt übertragen.

Es wurde dabei an eine frühere Untersuchung [2] angeknüpft, bei der, in rein geometrischer Betrachtung, die Wirkung der fehlerhaften

---

<sup>1</sup> Das Verfahren zur Bestimmung der Signalverbesserung mit Ausnützung der Gewichtsmaxima ausgeglichener Parabeln und deren günstiger Lage wurde an der ehem. Deutschen Seewarte ab 1. Januar 1945 angewandt; nach diesem wurden die bis 1. Mai 1945 14tägig veröffentlichten Verbesserungen bestimmt.

Festpunkte für den Fall des Vorwärtseinschnittes ermittelt worden war. Den Anlaß für eine Weiterentwicklung dieser Frage gaben bereits 1939 die Erfahrungen des Feldzuges in Polen. Bei der damals notwendigen raschen geodätischen Überbrückung von aufeinanderfolgenden breiten Geländestreifen, wobei die durch Vorwärtseinschnitt bestimmten Punkte am Streifenrand sogleich wieder als Ausgangspunkte für weitere Vorwärts- oder Rückwärtseinschnitte dienen mußten, stellte sich von selbst die Frage ein: „Wann werden die Fehler der abgeleiteten Punkte, trotz der mit modernen Theodoliten erreichten hohen Beobachtungsgenauigkeit, so groß, daß die berechneten Koordinaten für bestimmte Zwecke untauglich sind?“ Würde man hiebei den immer mehr anwachsenden Lagefehler der Anschlußpunkte außer acht lassen, so könnte der geschilderte Vorgang dauernder Vorwärtseinschnitte, die durch den raschen Frontfortschritt und auch aus Mangel an anderen trigonometrischen Unterlagen bedingt bzw. erzwungen waren, wesentlich öfter wiederholt werden, als es tatsächlich der Fall sein darf.

In der Ruhezeit nach dem Feldzug in Polen wurde die Untersuchung [2] unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes erweitert und für eine praktische Verwendbarkeit bearbeitet, ohne daß sich die Möglichkeit zu einer Veröffentlichung der Ergebnisse geboten hätte.

Im Zusammenhang mit den während des Krieges ausgeführten mannigfachen trigonometrischen Arbeiten beim Zusammenschluß von zwei oder mehreren, meist verschieden orientierten Netzen insbesondere an Staatsgrenzen, habe ich die Untersuchungen über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf fast alle Grundaufgaben geodätischer Punktbestimmungen ausgedehnt. Auch diese Ergebnisse konnten nicht veröffentlicht werden.

Bei der Durchsicht der während des Krieges erschienenen geodätischen Fachliteratur habe ich 1945 eine sehr interessante Arbeit [3] aufgefunden, in der die Lösung entwickelt wird für den Einfluß der Fehler der Ausgangspunkte auf den Vorwärtseinschnitt, die Aufgabe von *Hansen* und auf eine Kombination beider Verfahren.

Wie aus dem von *A. Berroth* verfaßten Vorwort zu [3] hervorgeht, wurde das Verfahren nach seinen Vorschlägen entwickelt, als Ersatz für die Anwendung der langwierigen und kostspieligen gewöhnlichen Triangulationsmethoden in in Entwicklung befindlichen Ländern oder Kolonialgebieten, um die notwendigen Unterlagen für ihre weitere luftphotogrammetrische Aufschließung zu schaffen.

Die Zusammenfassung des Autors weist darauf hin, daß nach dem Verfahren von *Berroth* „von zwei Festpunkten aus, über zwei Fesselballone als Zwischenziele, ein Punktpaar in großer Entfernung festgelegt wird“. Es wird sodann der Einfluß fehlerhafter Ausgangspunkte und Beobachtungen auf die Bestimmung des Punktpaares untersucht und schließlich die günstigste Gestalt der Grundfigur ermittelt.

Es erschien mir zwecklos, die Ergebnisse aller eigenen Untersuchungen jetzt noch und nur deshalb zu veröffentlichen, weil der Weg der Lösung ein etwas anderer war. Während *Hinterkeuser*, besonders bei der

Behandlung der Aufgabe von *Hansen*, wegen der dort auftretenden symmetrischen Figurenbeziehungen, in vorteilhafter Weise mit Determinanten gearbeitet hat, war von mir jener Vorgang eingehalten worden, der in der genannten Arbeit [1] für die Aufgabe des Rückwärtseinschnittes dargestellt ist, die bisher noch nicht in dieser Art untersucht wurde.

Eine Nutzenanwendung fanden die Ergebnisse bei der nach meinen Gedanken versuchten Herstellung einer geodätischen Verbindung von *Kreta* nach Zielen in *Afrika*, die durch die nahezu lotrechten Leuchtbahnen der Schüsse schwerster Flak gegeben waren. Wenn die Ergebnisse dieses Versuches zufolge der Kriegsereignisse auch verloren gingen und als vernichtet gelten müssen, so darf hierüber vielleicht in späterer Zeit gelegentlich noch berichtet werden. Die vor kurzem erschienenen amerikanischen Nachrichten über gelungene Abschüsse von V-Raketen in sehr große Höhen, lassen es wohl als denkbar erscheinen, daß entsprechend stark leuchtende Bahnen solcher Raketen, in ähnlicher Weise, für die Herstellung von Kontinentverbindungen verwendet werden könnten.

Mit Hinweis auf die ausführlicheren Entwicklungen in der genannten Arbeit [1] werden hier deren Ergebnisse kurz zusammengefaßt.

Ausgehend von der Darstellung der Koordinaten eines rückwärts eingeschnittenen Punktes, die für die Verwendung der Rechenmaschine im Handbuch von *Jordan-Eggert* [4] (S. 444) angegeben ist, erhalten wir an Hand der Abb. 1 die folgenden grundlegenden Beziehungen im allgemeinen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ .

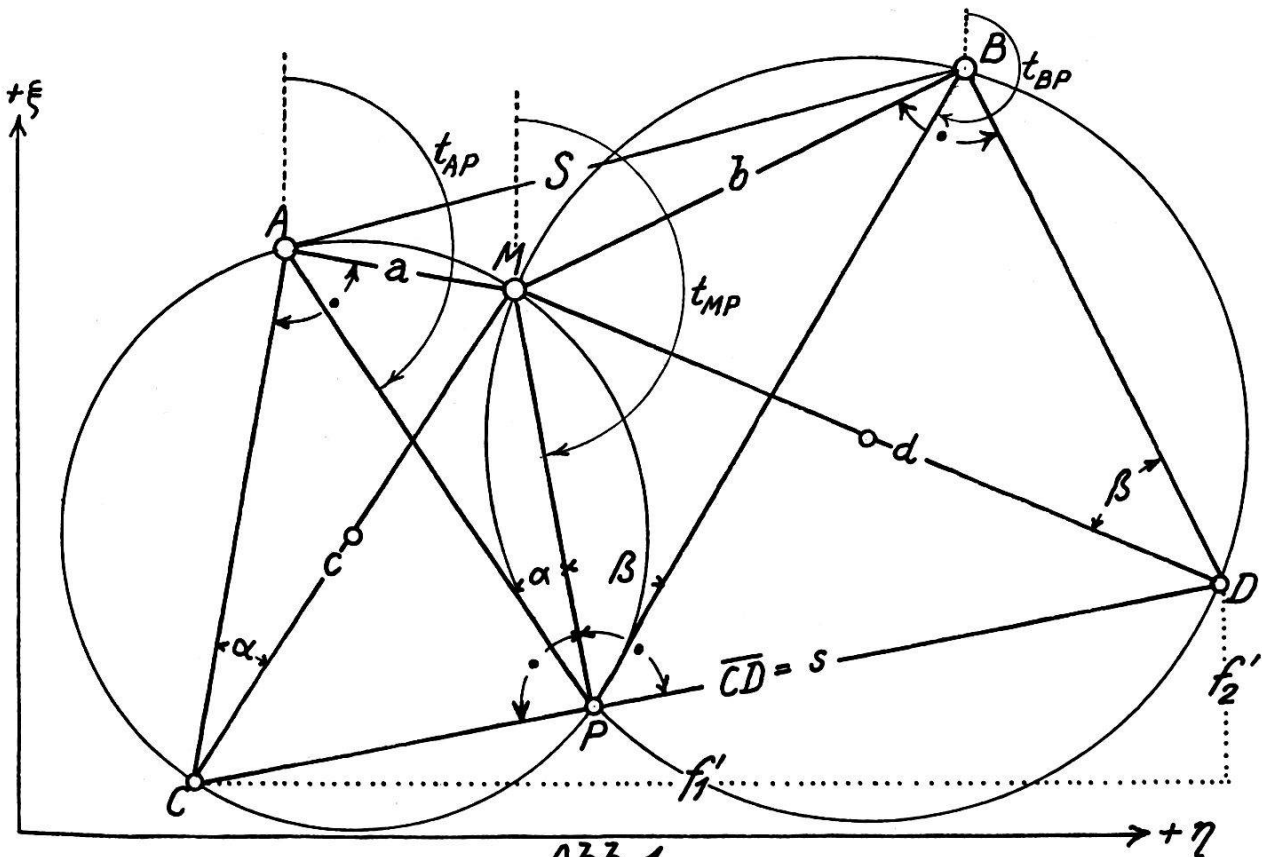


Abb. 1

$$\left. \begin{aligned} \eta_C - \eta_A &= (\xi_M - \xi_A) \operatorname{ct} \alpha, & \xi_C - \xi_A &= -(\eta_M - \eta_A) \operatorname{ct} \alpha, \\ \eta_D - \eta_B &= -(\xi_M - \xi_B) \operatorname{ct} \beta, & \xi_D - \xi_B &= (\eta_M - \eta_B) \operatorname{ct} \beta. \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\eta - \eta_M = -A' (\xi_D - \xi_C) = A' f_2', \quad \xi - \xi_M = A' f_1'. \quad (2)$$

$$\xi_D - \xi_C = -f_2', \quad \eta_D - \eta_C = f_1'. \quad (3)$$

$$A' = \frac{(\eta_M - \eta_C) (\xi_D - \xi_C) - (\xi_M - \xi_C) (\eta_D - \eta_C)}{(\eta_D - \eta_C)^2 + (\xi_D - \xi_C)^2} = \frac{Z'}{N'}. \quad (4)$$

Der Zähler  $Z'$  kann als negative doppelte Fläche des Dreieckes  $CMD$  erkannt werden und nach Einsetzung der Beziehungen von (1) in  $Z'$  und  $N'$  des Ausdruckes (4) erhält man:

$$\begin{aligned} Z' &= 2 F' (1 - \operatorname{ct} \alpha \operatorname{ct} \beta) + \left\{ (\eta_A - \eta_M) (\eta_B - \eta_M) \right. \\ &\quad \left. + (\xi_A - \xi_M) (\xi_B - \xi_M) \right\} (\operatorname{ct} \alpha + \operatorname{ct} \beta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} N' &= \operatorname{ct}^2 \alpha \left\{ (\xi_A - \xi_M)^2 + (\eta_A - \eta_M)^2 \right\} + \operatorname{ct}^2 \beta \left\{ (\xi_B - \xi_M)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\eta_B - \eta_M)^2 \right\} + \left. \begin{aligned} &+ 2 \operatorname{ct} \alpha \operatorname{ct} \beta \left\{ (\xi_A - \xi_M) (\xi_B - \xi_M) + (\eta_A - \eta_M) (\eta_B - \eta_M) \right\} + \\ &+ 4 F' (\operatorname{ct} \alpha + \operatorname{ct} \beta) + \left\{ (\xi_B - \xi_A)^2 + (\eta_B - \eta_A)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

Mit  $F'$  ist dabei die Fläche des Dreieckes  $AMB$  bezeichnet worden, nämlich:

$$\begin{aligned} 2 F' &= \xi_A (\eta_B - \eta_M) + \xi_B (\eta_M - \eta_A) + \xi_M (\eta_A - \eta_B) = \\ &= \eta_A (\xi_M - \xi_B) + \eta_B (\xi_A - \xi_M) + \eta_M (\xi_B - \xi_A). \end{aligned} \quad (7)$$

Wir erhalten ferner noch aus (2) und (3):

$$\xi = \frac{Z'}{N'} f_1' + \xi_M, \quad \eta = \frac{Z'}{N'} f_2' + \eta_M, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1' &= -\xi_M (\operatorname{ct} \alpha + \operatorname{ct} \beta) + \xi_A \operatorname{ct} \alpha + \xi_B \operatorname{ct} \beta + (\eta_B - \eta_A), \\ f_2' &= -\eta_M (\operatorname{ct} \alpha + \operatorname{ct} \beta) + \eta_A \operatorname{ct} \alpha + \eta_B \operatorname{ct} \beta - (\xi_B - \xi_A). \end{aligned} \right\} (9)$$

Mit diesen Ausdrücken ist jene, hinsichtlich der gegebenen Koordinaten und gemessenen Winkel getrennte Darstellung gefunden, aus der, mit Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, der Einfluß fehlerhafter Koordinaten der Anschlußpunkte  $A, M, B$  ableitbar ist. In üblicher Weise wird dabei vorausgesetzt, daß es, mangels einer anderen Möglichkeit, statthaft ist, die Fehler der Koordinaten als voneinander unabhängige Größen zu betrachten, wengleich in allen modernen Netzen ein gewisser Zusammenhang der Punkte, und damit auch ihrer Fehler, bestehen wird.

Wir erhalten, mit Übergang aller Einzelheiten, bei Anwendung üblicher Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned}
 m^2_{\xi} &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial \xi_A} \right)^2 m^2_{\xi_A} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \eta_A} \right)^2 m^2_{\eta_A} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \xi_B} \right)^2 m^2_{\xi_B} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \eta_B} \right)^2 m^2_{\eta_B} \\
 &+ \left( \frac{\partial \xi}{\partial \xi_M} \right)^2 m^2_{\xi_M} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \eta_M} \right)^2 m^2_{\eta_M} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 m^2_{\alpha} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right)^2 m^2_{\beta}, \\
 m^2_{\eta} &= \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi_A} \right)^2 m^2_{\xi_A} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \eta_A} \right)^2 m^2_{\eta_A} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi_B} \right)^2 m^2_{\xi_B} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \eta_B} \right)^2 m^2_{\eta_B} \\
 &+ \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi_M} \right)^2 m^2_{\xi_M} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \eta_M} \right)^2 m^2_{\eta_M} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2 m^2_{\alpha} + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right)^2 m^2_{\beta}.
 \end{aligned} \right\} (10)$$

Nach Ableitung der notwendigen Differentialquotienten ergab sich eine weitgehende Vereinfachung für die weiteren recht langwierigen Umformungen durch Übergang auf ein Parallelsystem  $x // \xi$ ,  $y // \eta$  mit dem Ursprung in dem mittleren Punkt  $M$ , wodurch die Gleichungen (10) bei Zusammenfassung nach  $m^2_x + m^2_y = M^2_P$  übergehen in:

$$\left. \begin{aligned}
 M^2_P &= \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial x_A} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_A} \right)^2 \right\} m^2_{x_A} + \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial y_A} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial y_A} \right)^2 \right\} m^2_{y_A} \\
 &+ \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial x_B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_B} \right)^2 \right\} m^2_{x_B} + \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial y_B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial y_B} \right)^2 \right\} m^2_{y_B} \\
 &+ \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial x_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_M} \right)^2 \right\} m^2_{x_M} + \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial y_M} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial y_M} \right)^2 \right\} m^2_{y_M} \\
 &+ \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \right\} m^2_{\alpha} + \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 \right\} m^2_{\beta}.
 \end{aligned} \right\} (10a)$$

Jede Zeile auf der rechten Seite entspricht hier jenem Fehleranteil, mit dem die Lagefehler von  $A$ ,  $B$ ,  $M$ , bzw. die Winkelfehler, Beitrag leisten zum Lagefehler des Neupunktes. (Schluß folgt.)

#### Literaturnachweis.

- [1] Ackerl, Sull'influsso d'una posizione difettosa dei punti noti al risultato della intersezione inversa.
- [2] Ackerl, Über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf das Ergebnis des Vorwärtseinschneidens, Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1930.
- [3] Hinterkeuser, Über eine Punktpaarbestimmung nach beweglichen Hochzielen und ihre Verwendung zum Aufbau einer weiträumigen Triangulation, Sonderheft 20 zu den Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin, 1941.
- [4] Jordan-Eggert, Handbuch des Vermessungswesens, Zweiter Band, erster Halbband, Metzler, Stuttgart, 1931.
- [5] Eggert, Einführung in die Geodäsie, Teubner, Leipzig, 1907.