Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerharten Festpunkten [Fortsetzung]

Autor(en): **Ackerl, Franz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **46 (1948)**

Heft 3

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-205579

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. **C. F. BAESCHLIN**, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: **E. RAMSER**, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 3 • XLVI. JAHRGANG
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung"
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats
9. MÄRZ 1948
INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile.
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Über den Rückwärtseinschnitt aus fehlerhaften Festpunkten

Von Prof. Dr. Franz Ackerl, Wien.

(Fortsetzung)

Zur Erreichung einer besseren Übersicht schreiben wir die Gl. (10a) in der folgenden Art:

$$\left.\begin{aligned} M^2_P = \left\{\mathrm{I}\right\} m^2_{x_A} + \left\{\mathrm{II}\right\} m^2_{y_A} + \left\{\mathrm{III}\right\} m^2_{x_B} + \left\{\mathrm{IV}\right\} m^2_{y_B} \\ + \left\{\mathrm{V}\right\} m^2_{x_M} + \left\{\mathrm{VI}\right\} m^2_{y_M} + \left\{\mathrm{VII}\right\} m^2_{\alpha} + \left\{\mathrm{VIII}\right\} m^2_{\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (25a)$$

Für Vergleichszwecke sind die Gleichungsnummern von der genannten Arbeit [1] her übernommen, *in der jedoch nur der Einfluß der fehlerhaften Festpunkte, nicht aber die Wirkung der Winkelfehler abgeleitet wurde.*

Die Beiträge der Lagefehler der gegebenen Punkte zum entstehenden Punktfehler M_P ergeben sich daher mit:

$$\mu^2_A = \left\{\mathrm{I}\right\} m^2_{x_A} + \left\{\mathrm{II}\right\} m^2_{y_A}, \qquad (26a)$$

$$\mu^2_B = \left\{\mathrm{III}\right\} m^2_{x_B} + \left\{\mathrm{IV}\right\} m^2_{y_B}, \qquad (27a)$$

$$\mu^2_M = \left\{\mathrm{V}\right\} m^2_{x_M} + \left\{\mathrm{VI}\right\} m^2_{y_M}. \qquad (28a)$$

Mit Übergehung aller Einzelheiten werden hier lediglich die zur Auswertung der Formel (25a) *erforderlichen Koeffizienten* $\{\mathrm{I}\}-\{\mathrm{VI}\}$ *angegeben.* Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\{\mathrm{I}\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \sin^2 t_{AP}, & \{\mathrm{II}\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \cos^2 t_{AP},\\
\{\mathrm{III}\} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \sin^2 t_{BP}, & \{\mathrm{IV}\} &= \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \cos^2 t_{BP},\\
\{\mathrm{V}\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \sin^2 t_{MP}, & \{\mathrm{VI}\} &= \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \cos^2 t_{MP}.
\end{aligned}\right\} \tag{56a}$$

Aus den Bezeichnungen der Abb. 1 bzw. 2 erkennen wir, daß sämtliche zur Berechnung der Koeffizienten $\{K\}$ notwendigen Größen, mit für praktische Zwecke hinreichender Genauigkeit, aus einem guten Netzplan abgegriffen werden können, soferne man in diesem noch die beiden Hilfskreise $A\,M\,P\,C$ bzw. $B\,D\,P\,M$ mit den Durchmessern c bzw. d konstruiert.

Für eine möglichst vereinfachte Berechnung der durchaus gleichartig gebauten Koeffizienten wird man diese in günstiger Weise z. B. mit dem für jeden bestimmten Rückwärtseinschnitt typischen Betrag ($c^2 d^2 : a^2 b^2$) ausdrücken.

Wenn die Koordinatenfehler m_{x_i}, m_{y_i} der gegebenen Punkte einzeln bekannt sind, dann erhalten wir mit den Beziehungen (56a) aus Gl. (25a) den Gesamtfehler des Punktes P.

Sind indessen die Koordinatenfehler nicht gesondert gegeben, wohl aber die Punktfehler M_i der Ausgangspunkte i, dann entstehen aus den Gl. (26a), (27a), (28a) mit der Annahme $m_{x_i} = m_{y_i} = m_i$, $m^2{}_i = \frac{M^2{}_i}{2}$, die folgenden Fehleranteile:

$$\mu^2{}_A = (\{\mathrm{I}\} + \{\mathrm{II}\}) \frac{M^2{}_A}{2}, \tag{57a}$$

$$\mu^2{}_B = (\{\mathrm{III}\} + \{\mathrm{IV}\}) \frac{M^2{}_B}{2}, \tag{58a}$$

$$\mu^2{}_M = (\{\mathrm{V}\} + \{\mathrm{VI}\}) \frac{M^2{}_M}{2}. \tag{59a}$$

Diese nun vom Koordinatensystem nicht mehr abhängigen Beträge nehmen mit den Gleichungen (56a) die folgenden Formen an:

$$\mu^2{}_A = \frac{c^2 d^2}{a^2 s^2} \frac{M^2{}_A}{2}, \quad \mu^2{}_B = \frac{c^2 d^2}{b^2 s^2} \frac{M^2{}_B}{2}, \quad \mu^2{}_M = \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \frac{S^2}{s^2} \frac{M^2{}_M}{2}. \tag{60a}$$

Wenn keine Einzelangaben für die Werte M_i vorliegen und ein Durchschnittswert $M_A = M_B = M_M = M$ angenommen wird, so erhalten wir als Lagefehler des Neupunktes:

$$M^2{}_P = \frac{c^2 d^2}{a^2 b^2} \, \frac{a^2 + b^2 + S^2}{s^2} \, \frac{M^2}{2}. \tag{61a}$$

Vor einer Betrachtung dieser Ergebnisse wollen wir nun, der Vollständigkeit halber, noch die Wirkung der fehlerhaft beobachteten Winkel ableiten, obgleich hiefür schon jene Darstellung vorliegt, die in [4] (S. 450) bzw. [5] (S. 135) angegeben ist. Es wird sich indessen zeigen, daß durch die hier verwendete Bestimmung mit anderen als den von *Eggert* benutzten Unterlagen eine übersichtlichere Lösung entsteht, bei der jede Hilfskonstruktion vermieden wird.

Im Hinblick auf die Formel (10) sind aus den Gl. (8), unter Beachtung von (4)–(7) und (9), die folgenden Differentialgleichungen zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \xi}{\partial Z'}\frac{\partial Z'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial N'}\frac{\partial N'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial f_1'}\frac{\partial f_1'}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta}{\partial Z'}\frac{\partial Z'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial N'}\frac{\partial N'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial f_2'}\frac{\partial f_2'}{a}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial \beta} &= \frac{\partial \xi}{\partial Z'}\frac{\partial Z'}{\partial \beta} + \frac{\partial \xi}{\partial N'}\frac{\partial N'}{\partial \beta} + \frac{\partial \xi}{\partial f_1'}\frac{\partial f_1'}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = \frac{\partial \eta}{\partial Z'}\frac{\partial Z'}{\partial \beta} + \frac{\partial \eta}{\partial N'}\frac{\partial N'}{\partial \beta} + \frac{\partial \eta}{\partial f_2'}\frac{\partial f_2'}{\partial \beta}.
\end{aligned} \tag{62}$$

Aus Raumgründen werden die Ergebnisse für das Koordinatensystem ξ, η hier nicht mitgeteilt. Wie schon weiter vorne (nach Gl. (10) bemerkt wurde, gehen wir, zur Vereinfachung der folgenden Umformungen, auf ein Parallelsystem $x \,//\, \xi$, $y \,//\, \eta$ mit dem Ursprung in M über. Aus den grundlegenden Beziehungen (1)–(9) entstehen damit die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
y_C - y_A &= - x_A \operatorname{ct} \alpha, \; x_C - x_A = y_A \operatorname{ct} \alpha, \\
y_D - y_B &= x_B \operatorname{ct} \beta, \; x_D - x_B = - y_B \operatorname{ct} \beta,
\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

$$y = - A\,(x_D - x_C) = A\, f_2, \qquad x = A\,(y_D - y_C) = A\, f_1, \tag{2a}$$

$$x_D - x_C = - f_2, \qquad y_D - y_C = f_1, \tag{3a}$$

$$A = \frac{y_C\,(x_C - x_D) + x_C\,(y_D - y_C)}{(y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2} = \frac{Z}{N}, \tag{4a}$$

$$Z = y_C\, f_2 + x_C\, f_1 = x_C\, y_D - x_D\, y_C, \tag{5a}$$

$$N = f_1{}^2 + f_2{}^2 = \overline{CD}^2 = s^2, \tag{6a}$$

$$2\,F = x_A\,y_B - x_B\,y_A, \quad (F = \text{Dreiecksfläche } A\,M\,B) \tag{7a}$$

$$x = \frac{Z}{N}\,f_1, \qquad y = \frac{Z}{N}\,f_2, \tag{8a}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= x_A \operatorname{ct} \alpha + x_B \operatorname{ct} \beta + (y_B - y_A), \\ f_2 &= y_A \operatorname{ct} \alpha + y_B \operatorname{ct} \beta - (x_B - x_A), \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Wenn wir die Gl. (62) ebenfalls auf das Koordinatensystem x, y mit dem Ursprung M beziehen, so ergeben sich schließlich die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{x}{\sin^2 \alpha}\left\{\frac{1}{Z}(x_A x_D + y_A y_D) - \frac{2}{N}(x_A f_1 + y_A f_2) + \frac{x_A}{f_1}\right\}, \\
\frac{\partial y}{\partial \alpha} &= -\frac{y}{\sin^2 \alpha}\left\{\frac{1}{Z}(x_A x_D + y_A y_D) - \frac{2}{N}(x_A f_1 + y_A f_2) + \frac{y_A}{f_2}\right\}, \\
\frac{\partial x}{\partial \beta} &= -\frac{x}{\sin^2 \beta}\left\{\frac{1}{Z}(x_B x_C + y_B y_C) - \frac{2}{N}(x_B f_1 + y_B f_2) + \frac{x_B}{f_1}\right\}, \\
\frac{\partial y}{\partial \beta} &= -\frac{y}{\sin^2 \beta}\left\{\frac{1}{Z}(x_B x_C + y_B y_C) - \frac{2}{N}(x_B f_1 + y_B f_2) + \frac{y_B}{f_2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{62a}$$

Faßt man diese Gleichungen entsprechend (10a) und (25a) zusammen und beachtet dabei die aus (2a), (4a), (6a) entstehenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x^2 + y^2}{Z^2} = \frac{1}{N}, \quad \frac{x^2 + y^2}{N^2} = \frac{A^2}{N}, \quad \frac{x^2 + y^2}{Z\,N} = \frac{A}{N}, \quad x^2 + y^2 = N\,A^2, \\
&\frac{x^2 x^2_A}{f_1} + \frac{y^2 y^2_A}{f_2} = A^2 (x^2_A + y^2_A), \quad \frac{x^2 x_A}{f_1} + \frac{y^2 y_A}{f_2} = A^2 (x_A f_1 + y_A f_2),
\end{aligned}\right\} \tag{63a}$$

so ergeben sich, nach hier nicht mitgeteilten Umformungen, mit den Bezeichnungen:

$$\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2\right\} = \left\{\mathrm{VII}\right\}, \qquad \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2\right\} = \left\{\mathrm{VIII}\right\}, \tag{64a}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left\{\mathrm{VII}\right\} \; s^2 \sin^4 \alpha = {} & (x_A x_D + y_A y_D)^2 + (x^2 + y^2)(x^2_A + y^2_A) \\ & - 2\,(x_A x_D + y_A y_D)(x_A x + y_A y), \end{aligned} \tag{65a}$$

$$\begin{aligned} \left\{\mathrm{VIII}\right\} \; s^2 \sin^4 \beta = {} & (x_B x_C + y_B y_C)^2 + (x^2 + y^2)(x^2_B + y^2_B) \\ & - 2\,(x_B x_C + y_B y_C)(x_B x + y_B y). \end{aligned} \tag{66a}$$

(Fortsetzung folgt)