Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **46 (1948)**

Heft 5

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-205589

der große Mann in der kleinen Stadt. Die Früchte seiner mathematischen Tätigkeit blieben aber auch in dem kleinen Basel nicht aus. Johann Bernoulli durfte es erleben, daß der von ihm entdeckte und leidenschaftlich geförderte Schüler und Mitbürger Leonhard Euler zum größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts heranwuchs. Der Fünfundsiebzigjährige drückte das Verhältnis zu seinem Schüler, anläßlich der Herausgabe seiner gesammelten Werke, die er Euler als Geschenk übersandte, wie folgt aus: «Ich zeige in diesen Büchern die höhere Mathematik dar, wie sie in der Kindheit war, Du stellst sie uns vor im Mannesalter.»

Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung

von C. F. Baeschlin

I. Einführung fingierter Beobachtungen

Bei der Behandlung der vermittelnden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird im allgemeinen stillschweigend angenommen, daß es möglich sei, die wahren Werte der Beobachtungsgrößen, L_i, als Funktion der wahren Werte der Unbekannten $X, Y, Z, \ldots U$ aufzustellen.

(1) $$L_i = f_i\,(X, Y, Z, \ldots U) \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Bei der praktischen Behandlung des Problems kennen wir weder die wahren Werte L_i der Beobachtungsgrößen, noch der Unbekannten. Durch Beobachtungen gewinnen wir die *Beobachtungswerte* l_i. Setzen wir die l_i in die Beziehungen (1) ein, so werden sie nicht mehr erfüllt sein. Bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verlangen wir bekanntlich, daß die Beziehungen (1) auch gelten, wenn wir L_i durch $l_i + v_i$, $X, Y, Z, \ldots U$ durch $x, y, z, \ldots u$ ersetzen. Wir nennen die $x, y, z, \ldots u$ die *ausgeglichenen Werte* der Unbekannten, während $l_i + v_i$ der ausgeglichene Wert der Beobachtungsgröße genannt wird. v_i heißt die *plausible* Verbesserung des Beobachtungswertes l_i. Das System (1) geht dann über in

(1a) $$l_i + v_i = f_i\,(x, y, z, \ldots u) \qquad i = 1, 2, \ldots n \qquad n > u.$$

Dieses System (1a) von n Gleichungen für $(n + u)$ Unbekannte (da ja auch die Verbesserungen v unbekannt sind) ist u-fach unbestimmt. In der Meth. d. kl. Qu. machen wir das Problem bestimmt, indem wir die Minimumsbedingung

(2) $$[g_i\, v_i\, v_i]_{i=1}^{i=n} = \text{Minimum}$$

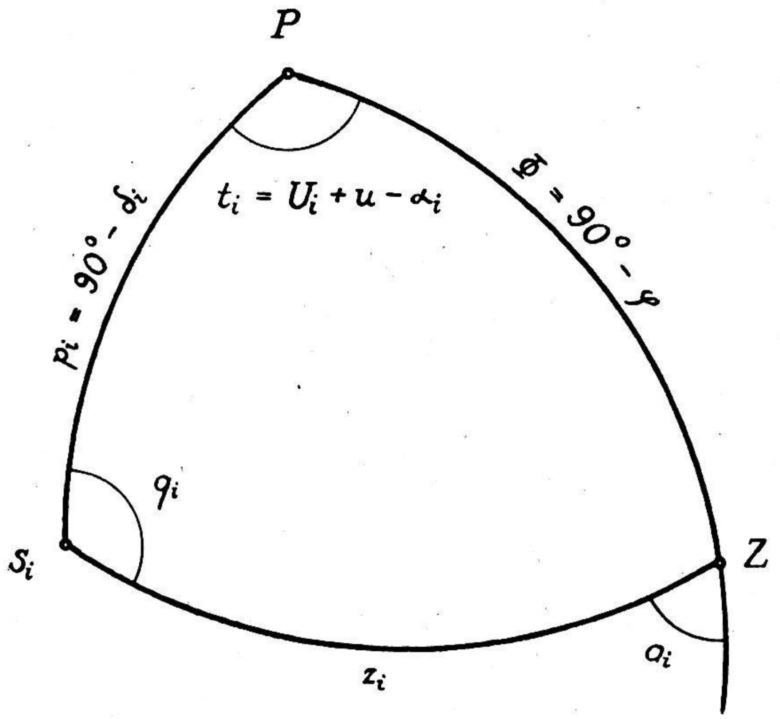
beifügen.

Bei manchen Anwendungen der Ausgleichungsrechnung nach der Meth. d. kl. Qu. sind uns aber nicht die Funktionen f_i gegeben, welche die Beobachtungsgrößen darstellen, sondern jede Beobachtungsgröße L_i

ist mit den Unbekannten X, Y, $Z, \ldots U$ zusammen je in eine Funktion vereinigt.

Indem wir uns für die Zukunft der Einfachheit halber auf 3 Unbekannte X, Y, Z beschränken, erhalten wir

(3) $$F_i\,(X,\ Y,\ Z,\ L_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$



Figur 1.

Diese Funktionen enthalten meist auch noch Parameter, die in jeder Funktion andere Werte annehmen. Beschränken wir uns auf 2 Parameter, die wir mit p_i, q_i bezeichnen, so haben wir in den wahren Werten

(4) $$F_i\,(X,\ Y,\ Z,\ L_i,\ p_i,\ q_i) = 0.$$

In den ausgeglichenen Werten wird dies

4a) $$F_i\,(x,\ y,\ z,\ l_i + v_i,\ p_i,\ q_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Art der Formulierung tritt fast regelmäßig in der geographischen Ortsbestimmung auf, wo die Formeln der sphärischen Trigonometrie verwendet werden.

Ein Beispiel dieser Art liegt vor, wenn wir die Durchgangszeit U_i von n Sternen durch denselben Almukantarat von der wahren Zenitdistanz z beobachten. Nach dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie erhalten wir

$$\cos z = \cos \Phi \cos p_i + \sin \Phi \sin p_i \cos\,(U_i + u - a_i).$$

Dabei bedeuten

z = wahre Zenitdistanz des gewählten Almukantarates.

Φ = Zenitdistanz des Poles = $90^0 - \varphi$, wo φ die geographische Breite des Beobachtungsortes ist.

p_i = Poldistanz des beobachteten Sternes $S_i = 90^0 — \delta_i$, wo δ_i die Deklination des Sterns bezeichnet.

a_i = Rektaszension des beobachteten Sterns S_i.

U_i = Durchgangszeit des Sterns S_i durch den Almukantarat z, beobachtet an einer Sternzeituhr.

u = Uhrkorrektion der Uhrablesungen U_i, um sie in Orts-Sternzeit zu verwandeln.

Man kann für jeden beobachteten Stern eine solche Beziehung aufstellen. Bringen wir sie auf die Form (4a), so lautet sie:

$$(5) \qquad F_i = — \cos z + \cos \Phi \cos p_i + \sin \Phi \sin p_i \cos (U + v_i + u — a_i) = 0$$

z, Φ, u sind die 3 Unbekannten des Problems; U_i ist der Beobachtungswert. p_i und a_i sind für jeden Stern gegebene Parameter. Wenn wir auf die Form (1a) gelangen wollen, müssen wir (5) noch $U_i + v_i$ auflösen. Es wird

$$\cos (U_i + v_i + u — a_i) = \frac{\cos z — \cos \Phi \cos p_i}{\sin \Phi \sin p_i}$$

und daraus

$$(6) \qquad U_i + v_i = a_i — u + \text{arc} \cos \left\{ \frac{\cos z — \cos \Phi \cos p_i}{\sin \Phi \sin p_i} \right\} = f_i.$$

In diesem Beispiel ist die Auflösung der Funktionen F_i nach der Beobachtungsgröße U_i leicht möglich. Es gibt aber andere Fälle, in denen diese Auflösung nur sehr mühsam oder auch gar nicht gelingt.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Fall zurück. Gestützt auf die Beziehungen (4) kann man stets zu einer Lösung gelangen, auch wenn die Auflösung der Funktionen F_i nach der Beobachtungsgröße L_i schwer oder gar nicht möglich ist. Wir führen in (4a) Näherungswerte x_0, y_0, z_0 der Unbekannten ein, indem wir setzen:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned} \right.$$

Damit geht (4a) mit Hilfe einer Taylorschen Reihe über in

$$F_i (x, y, z, l_i + v_i, p_i, q_i) = F_i (x_0, y_0, z_0, l_i, p_i, q_i)$$

$$+ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0 \zeta + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_i}\right)_0 v_i = 0$$

wobei Glieder 2. und höherer Ordnung vernachlässigt worden sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Abkürzungen ein:

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 = a_i; \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 = b_i; \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0 = c_i \\ \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial l_i}\right)_0 = \Lambda_i \\ F_i\,(x_0, y_0, z_0, l_i, p_i, q_i) = f_i. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$(9)\qquad f_i + a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \Lambda_i v_i = 0.$$

Daraus folgen die *Fehlergleichungen*

Gewicht

$$(10)\qquad g_i; \quad v_i = -\frac{a_i}{\Lambda_i}\xi - \frac{b_i}{\Lambda_i}\eta - \frac{c_i}{\Lambda_i}\zeta - \frac{f_i}{\Lambda_i}.$$

Daraus erhalten wir unter Zuhilfenahme von (2) die *Normalgleichungen*

$$(11)\quad \begin{cases} \left[g\dfrac{aa}{\Lambda^2}\right]\xi + \left[g\dfrac{ab}{\Lambda^2}\right]\eta + \left[g\dfrac{ac}{\Lambda^2}\right]\zeta + \left[g\dfrac{af}{\Lambda^2}\right] = 0 \\ \left[g\dfrac{ab}{\Lambda^2}\right]\xi + \left[g\dfrac{bb}{\Lambda^2}\right]\eta + \left[g\dfrac{bc}{\Lambda^2}\right]\zeta + \left[g\dfrac{bf}{\Lambda^2}\right] = 0 \\ \left[g\dfrac{ac}{\Lambda^2}\right]\xi + \left[g\dfrac{bc}{\Lambda^2}\right]\eta + \left[g\dfrac{cc}{\Lambda^2}\right]\zeta + \left[g\dfrac{cf}{\Lambda^2}\right] = 0 \end{cases}$$

Hier sind die Gleichungen (4a) zum Stimmen gebracht worden, indem man zum Beobachtungswert l_i die Verbesserung v_i zugefügt hat. Die Gewichte g_i sind aus den mittleren Fehlern der Beobachtungsgrößen gewonnen worden (g_i umgekehrt proportional zum Quadrat des mittlern Fehlers von l_i).

Statt diesen Weg einzuschlagen, kann man die Beziehungen (4a) auch zum Stimmen bringen, indem man nicht den Beobachtungswert l_i, sondern irgend ein anderes Argument der Funktion F_i korrigiert. Wir wollen z. B. den Parameter p_i um λ_i korrigieren, so daß die Beziehungen bestehen

$$(12)\qquad F_i\,(x, y, z, l_i, p_i' + \lambda_i, q_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

(Fortsetzung folgt.)

Frühjahrsversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen

Der Vorstand der Sektion Zürich-Schaffhausen des SVVK. hat seine Vereinsmitglieder und deren Angehörige zur ordentlichen Frühjahrstagung auf den letzten Aprilsonntag nach Zürich eingeladen. Da keine umfangreiche Geschäftsliste vorlag, bot sich Gelegenheit, die Geselligkeit zu pflegen, wozu die Anwesenheit der verehrten Damen sicherlich förderlich