Die Benutzung der 10stelligen Logarithmentafel des Thesaurus logarithmorum completus, Leipzig 1794

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **47 (1949)**

Heft 8

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-206578

Den Herren Bibliothekar Eugen Pöhlmann vom Deutschen Museum in München; Oberregierungsrat Liede von der Hauptvermessungsabteilung in Reutlingen; Regierungs- und Vermessungsrat Bundschuh von der Hauptvermessungsabteilung in Reutlingen; Dr. Ing. A. Schleusener von der Seismos G.m.b.H. in Hannover; der Universitätsbibliothek und dem Geographischen Institut der Universität Tübingen.

Benützte Literatur:

[1] Die Bibel, zu Joab: II. Sam.5,6–8; I. Chron. 11,4–6; zu Hiskia: II. Kön. 20,20; II. Chron. 32,1–4, 30; Sir. 48,19; der Prophet Jesaja Kap. 36 u. 37.

[2] C. Schick, Zeitschrift des Deutschen Palästinavereins, Verlag Baedeker, Band I, 1878. – Topographische Karte der näheren Umgebung von Jerusalem 1:10000.

[3] H. Guthe, Z. d. D. Pal. V., Band V, 1882. – Lageplan nach Ch. W. Wilsons Aufnahme, Band V, 1:2500.

[4] C. Merckel: Die Ingenieurtechnik im Altertum, Jul. Springer, 1899.

[5] R. Halliburton: „Der fliegende Teppich", P.-List-Verlag, 1934.

[6] H.V. Morton: „Auf den Spuren des Meisters", Dietrich-Reimer-Verlag, 1939. Bild: Photo L. Preiß.

Die Benutzung der 10stelligen Logarithmentafel des Thesaurus logarithmorum completus, Leipzig 1794

Von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon

Da für alle Rechnungen, bei denen die Genauigkeit von 8stelligen Logarithmentafeln nicht ausreicht, aus Ermangelung an 9stelligen Tafeln zu der 10stelligen Logarithmentafel des Thesaurus logarithmorum completus, herausgegeben von Georg *Vega* bei der Weidmannischen Buchhandlung zu Leipzig im Jahre 1794, gegriffen werden muß, und weil für diese Tafel, wie wir noch sehen werden, in großem Umfange die zweiten Differenzen berücksichtigt werden müssen, halte ich es für angezeigt, auf die m. E. bequemste Art der Verwendung der zweiten Differenzen hinzuweisen, die sowohl für die Berechnung des Logarithmus aus dem Argument wie für die umgekehrte Aufgabe eine gleichartige Methode erlaubt.

Es sei a ein Argumentwert, der in der Tafel vorkommt und zu dem der Wert einer Funktion (für uns handelt es sich um log a, log sin a, log cos a, log tg a und log cotg a) $f\ (a)$ gegeben ist. Das in weitem Bereich konstante Argumentenintervall bezeichnen wir mit ω. Es handelt sich darum, den Funktionswert f zu dem Argument $a + n\,\omega$ zu bestimmen, wo n der sog. Interpolationsbruch ist, der für unseren Fall der Bedingung genügt.

$$o < n < 1$$

Um $f(a + n\omega)$ zu bestimmen, verwenden wir die einfache *Newton*sche Interpolationsformel, die für unsere Zwecke ausreicht, da keine 3. Differenzen berücksichtigt werden müssen. Es ist

$$f(a + n\omega) = f(a) + \frac{n}{1}\Delta'_0 \tag{1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}\Delta''_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta'''_0$$

Da leicht zu erkennen, daß das Maximum des Absolutwertes von $\frac{n(n-1)}{2}$ gleich $\frac{1}{8}$ ist für $n = \frac{1}{2}$, so muß, wenn das Glied mit der zweiten Differenz Δ''_0 keinen Einfluß auf die Rechengenauigkeit von einer halben Einheit der letzten Stelle von f haben soll, die Beziehung bestehen

$$\frac{1}{8}\Delta''_0 < 0.5$$

(2). $\Delta''_0 \leq 4$ Einheiten der letzten Stelle von f.

Nebenbei sei bemerkt, daß der Maximalwert von

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sim \frac{1}{16} = \frac{1}{17.28} \text{ ist.}$$

Die dritten Differenzen Δ'''_0 müssen daher berücksichtigt werden, wenn $\Delta'''_0 > 8.6$ Einheiten der letzten Stelle von f ist. Das tritt im Bereich der Tafel I der Briggschen Logarithmen der Zahlen 10 000 bis 100 999 nirgends auf. Anders liegen die Verhältnisse bei den Funktionen log sin und log tg kleiner Winkel. Im ersten Teil der Tafel der trigonometrischen Funktionen, wo die Argumentendifferenz 1″ beträgt, werden die dritten Differenzen von der Größenordnung 8 Einheiten der 10. Stelle bei dem Argument 0° 17′. Bis dahin müssen also auch die dritten und am Anfang noch höhere Differenzen berücksichtigt werden. Im 2. Teil der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, wo die Argumentendifferenz 10″ beträgt, müssen die dritten Differenzen zirka von 2° 0′ bis 3° 0′ berücksichtigt werden. Der erfahrene Rechner weiß, daß man diese Schwierigkeit für das Rechnen mit kleinen Winkeln durch die Einführung der Zahlen *S* und *T* umgeht, die leider im Thesaurus fehlen. Er behilft sich dadurch, daß wenigstens für den Sinus von 0° 0′ bis 0° 12′ die natürlichen Werte gegeben werden, die fast konstante erste Differenzen aufweisen. Doch ist damit natürlich ein Umweg verbunden.

Wir schreiben die Formel (1) in der Form,

$$f(a + n\omega) = f(a) + n\left[\Delta'_0 + (n-1)\frac{\Delta''_0}{2}\right] \tag{3}$$

Da in der Tafel für die Logarithmen der natürlichen Zahlen die 2. Differenz stets negativ ist, lautet (3), wenn für Δ''_0 der Absolutwert angesetzt wird,

(3a) $$f(a + n\,\omega) = f(a) + n\left[\Delta'_0 + (1 - n)\frac{\Delta''_0}{2}\right]$$

(3a) gilt nur, wenn Δ''_0 negativ ist.

Setzen wir

$$\delta = (1 - n)\frac{\Delta''_0}{2}$$

so zeigt (3b)

(3b) $$f(a + n\,\omega) = f(a) + n\,[\Delta'_0 + \delta]$$

daß man zur maßgebenden 1. Differenz das δ zu addieren hat; diese Summe ist dann mit dem Interpolationsbruch n zu multiplizieren.

Rechnet man δ mit dem Rechenschieber, was für Tafel I immer genügt, so empfiehlt es sich zu schreiben

(4) $$\boxed{\delta = \frac{\Delta''_0}{2} - n\,\frac{\Delta''_0}{2}}$$

Diese Zerlegung empfiehlt sich besonders für die Umkehrung der vorstehenden Aufgabe:

Gegeben ist ein Logarithmus L; man soll den zugehörigen Numerus bestimmen.

Es ist

(5) $$L = f(a + n\,\omega) = f(a) + n\left[\Delta'_0 + \frac{1 - n}{2}\,\Delta''_0\right]$$

Daraus folgt

(6) $$n = \frac{L - f(a)}{\Delta'_0 + (1 - n)\,\frac{\Delta''_0}{2}}$$

Um n für den Nenner zu erhalten, bildet man aus

(7) $$\frac{L - f(a)}{\Delta'_0} = n'$$

einen Näherungswert für n; es genügt, diesen Näherungswert mit dem Rechenschieber zu bestimmen. Hier zeigt sich nun der Vorteil der Formel (4). Nach (7) hat man n' bei der Eins der Zunge; man kann daher $n'\,\frac{\Delta''_0}{2}$ direkt bei $\frac{\Delta''_0}{2}$ ablesen. Bei der Verwendung der Formel

$$\delta = (1 - n')\,\frac{\Delta''_0}{2}$$

müßte man n' ablesen und seine Ergänzung zu Eins bilden. $(1 - n')$ müßte neu eingestellt werden, um es mit $\frac{\Delta''_0}{2}$ zu multiplizieren. Da $\frac{\Delta''_0}{2}$ höchstens gleich 22 ist, kann die Subtraktion im Kopf ausgeführt werden.

Im trigonometrischen Teil der 10stelligen Logarithmentafel haben die 2. Differenzen die folgenden Vorzeichen:

log sin	negativ im ganzen Bereich
log tg	negativ von 0° bis 45°
	positiv von 45° bis 90°
log cotg	positiv von 0° bis 45°
	negativ von 45° bis 90°.

Da hier aber die ersten Differenzen allgemein negativ sind, bleibt für den cotg von 0° bis 45° die Formel in absoluten Größen dieselbe wie für die Numeri und die Sinus.

Dagegen muß für tg und für cotg, wenn $a > 45°$, δ absolut subtrahiert werden.

Für log cos ist die zweite Differenz im ganzen Bereich negativ; da aber auch die 1. Differenz negativ ist, so ist beim cos δ absolut zu subtrahieren.

Man merkt sich diese Regeln bald.

Beispiele.

1. Beispiel:

log 178.394 568 43 = ?

log 178.39	2.251 3705 055	Δ''_0 =	13
	111 217.8	Δ'_0 =	243 445
Resultat =	2.251 3816 272.8	δ =	3.5
			243 448.5

log 0.45684 3	9.65 9767
log 243 448.5	5.38 6407.3
111 217.8	5.04 6174.3

2. Beispiel:

$\log x = 9.051\ 6844\ 712 - 10$

log 0.112 63	6540 841	Δ''_0 =	34
	303 871	Δ'_0 =	385 577
		δ =	3.6
			385 580.6

$$n' = \frac{304}{386} = 0.785$$

303 871	5.48 2689.4
385 580.6	5.58 6114.7
n = 0.788 088	9.89 6574.7

Resultat x = 0.112 637 880 88

3. Beispiel:

log sin 2° 58′ 37.284 397 = ?		
log sin 2° 58′ 30″	8.715 1691 731	
	2950 190.5	
	Resultat =	8.715 4641 921.5

n = 0.728 439 7	9.86 2393.6	Δ''_0 =	3 787
4 050 014.2	6.60 7456.5	Δ'_0 =	4 049 500
2 950 190.5	6.46 9850.1	δ =	514.2
			4 050 014.2

$\frac{\Delta''_0}{2}$ 1893.5	3.27 7265	$\frac{\Delta''_0}{2}\delta$ =	1893.5
n 0.7284	9.86 2394		—1379.3
1379.3	3.13 9659	δ =	514.2

Bei dieser großen 2. Differenz genügt es nicht mehr, δ mit dem Rechenschieber zu berechnen. Da man für die Multiplikation $n \times \Delta'_0$ sowieso 6stellige Tafeln verwendet, benutzt man diese, trotzdem 5stellige Rechnung genügen würde.

4. Beispiel:

	log cos x =	9.378 1566 793 — 10
x_0 = 76° 10′ 40″	log cos x_0	2345 010
		778 217

$$n' \doteq \frac{778}{856} = 0.910$$

		Δ''_0	181
778 217...	5.89 1100.5	Δ'_0	855 870
855 861.8	5.93 2403.8	δ	— 8.2
0.909 277	9.95 8696.7		855 861.8

x_0 =	76° 10′ 40″
	+ 9 .092 77
Resultat x =	76° 10′ 49″.092 77

Wir wollen uns noch Rechenschaft geben, in welchen Bereichen des „Thesaurus“ 2. Differenzen berücksichtigt werden müssen.

Dies ist nötig für log sin, log tg und log cotg im ganzen Bereich der Tabulierung auf 1″ von 0° 0′ bis 2° 0′. Dagegen ist für den Cosinus in diesem Bereich die Mitnahme 2. Differenzen unnötig.

Für den Tafelteil von $2^{\circ}\,0'$ bis $88^{\circ}\,0'$, wo das Argumentenintervall $10''$ beträgt, ist für log sin und log cos im *ganzen Bereich* Berücksichtigung 2. Tafeldifferenzen notwendig.

Für log tg müssen von $2^{\circ}\,0'$ bis ca. $42^{\circ}\,10'$ 2. Differenzen berücksichtigt werden. Praktisch muß daher überall mit 2. Differenzen gerechnet werden, abgesehen vom Cosinus im Bereich der Tafel mit $1''$-Tabulierung von 0° bis 2°.

Wenn dagegen nur eine Genauigkeit auf die 9. Log-Stelle angestrebt wird, was schon deshalb empfehlenswert ist, weil im „Thesaurus" die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen *nicht* auf die 10. Stelle *genau* tabuliert sind, dürfen in diesem Falle Korrektionen von 5.0 Einheiten toleriert werden. Es wird daher

$$\Delta''_{0\,\mathrm{max}} = 40 \text{ Einheiten der 10. Stelle}$$

Auch für diese Genauigkeit müssen 2. Differenzen im ganzen Bereich der Tafel mit $1''$ Intervall (0°—2°) mitgenommen werden, abgesehen natürlich für den Cosinus.

In der Haupttafel ($10''$ Argumentenintervall) muß

für log sin von 2° bis $30^{\circ}\,40'$ mit 2. Diff. gerechnet werden
für log tg von 2° bis $26^{\circ}\,0'$
für log cos wenn $\alpha > 59^{\circ}\,20'$

Hier genügt zur Berechnung des δ meist der Rechenschieber.

Für die Logarithmen der natürlichen Zahlen ist Interpolation mit 2. Differenzen von 10 000 bis ca. 32 200 (Mantisse .508) notwendig.

Man erkennt, daß bei der Benutzung der 10stelligen Logarithmentafel die 2. Differenzen in sehr weitgehendem Umfang berücksichtigt werden müssen. Der Geodät muß daher mit dieser Methode gut vertraut sein, weil sonst die Genauigkeit der 10stelligen Rechnung nicht ausgenutzt wird. Man erkennt aber um wie viel bequemer das Rechnen mit der 8stelligen Logarithmentafel von Bauschinger ist, weil bei den Zahlen bis 200 000 zehnmal engere Tabulierung gewählt ist, und weil im trigonometrischen Teil das Argumentenintervall durchgehend $1''$ ist. Für das Rechnen mit kleinen Winkeln sind die Werte von S und T gegeben sowohl bei den Numeri-Tafeln wie auch für die log sin und log tg, was bei der Umkehrung der Aufgabe Weiterungen erspart. Eine Tafel der S und T würde bei einer 10stelligen Logarithmentafel einen sehr großen Umfang annehmen, da S schon bei $10''$ um 1.7 Einheiten kleiner als log arc $1''$, T bei $10''$ um 3.4 Einheiten größer als log arc $1''$ ist.

Zum Schluß gebe ich noch die Formeln zur Berechnung der Zahlen S und T.

$$S_{(x'')} = \log \operatorname{arc} 1'' - \operatorname{Mod}\left(\frac{x''^2}{6\,\rho''^2} + \frac{x''^4}{180\,\rho''^4} + \frac{x''^6}{2835\,\rho''^6} + \frac{x''^8}{37800\,\rho''^8}\right)$$

$$T_{(x'')} = \log \operatorname{arc} 1'' + \operatorname{Mod}\left(\frac{x''^2}{3\,\rho''^2} + \frac{7\,x''^4}{90\,\rho''^4} + \frac{6\,x''^6}{2835\,\rho''^6} + \frac{127\,x''^8}{18900\,\rho''^8}\right)$$

Das Glied mit x''^4 macht bei $41' 25''.4$ für S ½ Einheit der 10. Stelle aus. Für die Berechnung von T muß man das Glied 4. Ordnung schon bedeutend früher verwenden, nämlich von $x'' = 1279''.4 = 21'19''.4$ an.

Zollikon, den 30. Mai 1949

Flurbezeichnungen höfischen Ursprungs

In seinem Beitrag „Voralemannische Spuren in Orts- und Flurnamen des Kantons Schaffhausen“[1] erwähnt Th. Knecht einen Flurnamen „dunkler Herkunft“, *Schapeni*. Die so benannte Flur liegt auf einem sanft geneigten Plateau in der Gemeinde Altorf, nahe an der Schweizergrenze (Topogr. Atlas 44, Koord. 690–294). Schon G. Walter[2] verglich damit einen andern, ebenso sonderbaren Namen, *Stabéni* in der Gemeinde Buchthalen.

Wo urkundliche Belege fehlen, benötigt man für die Deutung etymologisch dunkler Namen ein möglichst großes Vergleichsmaterial. Bei ähnlich lautenden Bezeichnungen sind vielleicht urkundliche Formen überliefert, oder es finden sich andere Angaben, die den ursprünglichen Sinn eines Namens und damit einer ganzen Namenfamilie klären können. In den bekannten Nachschlagewerken, dem Ortschaftenverzeichnis des eidgenössischen statistischen Büros (1920) und dem Ortsbuch der Postverwaltung (1928) sind jedoch weder die oben angeführten noch damit zusammenhängende Namenformen angeführt. Diese beiden Werke enthalten nur eine größere Auswahl von Namen der bewohnten Orte, keine bloßen Flurnamen. Für diese besitzen wir leider noch kein schweizerisches Namenbuch. Dafür steht der Forschung ein vollständiges Zettelregister der im Topographischen Atlas der Schweiz (Siegfriedatlas) verzeichneten und der in der ortsnamenkundlichen Literatur behandelten Namen zur Verfügung. Dieses Register wird fortwährend ausgebaut und befindet sich auf der eidgenössischen Landestopographie. Daraus entnehme ich die meisten weitern Belege und Hinweise.

Den oben erwähnten Flurnamen, mundartlich *uf der Schapéni* (Altorf) und *uf Stabéni*, leicht geneigte Halde, südlich der Hagewis (diese im TA. 45, 692–284)[3], Gemeinde Buchthalen, entsprechen

1. *im Tschabắni* oder *s Tschabắni*, Gemeinde Kirchberg bei Burgdorf, früher ein ebenes Mattengelände mit einem kleinen Hof, der seither zweimal abgebrannt ist und durch den *Neuhof* ersetzt wurde[4] (TA. 142, 609–216). Nach den Darlegungen von J. U. Hubschmied[5], der sich auf Mitteilungen des Herrn Staatsarchivars G. Kurz stützt, wird der Ort urkundlich erwähnt als ein *acker der da heißet Champennen* 1419, *Tscham-*

[1] Zeitschr. f. schweiz. Geschichte 28, 214.

[2] Die Orts- und Flurnamen des Kt. Schaffhausen, Schaffhausen 1912.

[3] Mitteilung von Herrn Kantonsrat J. Suter, Buchthalen.

[4] Mitteilung von Herrn R. Wyß, Gemeinderat, Kirchberg.

[5] Heimatbuch Burgdorf, Bd. 2, Burgdorf 1938, S. 729—730.