Wert des Potentials an der Oberfläche des internationalen Ellipsoides

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. **C. F. BAESCHLIN,** Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 2 • XLVIII. JAHRGANG
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung"
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats
14. FEBRUAR 1950
INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile.
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Wert des Potentials an der Oberfläche des Internationalen Ellipsoides

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

Wir gehen aus von der Formel (77.10) von *Baeschlin*, Lehrbuch der Geodäsie, Zürich 1948, S. 518.

$$W_s = A\ V_0 + B V_1 + \frac{\omega^2}{2} p^2 \tag{1}$$

mit

$$A = \frac{2}{3} f \pi a^2 b \vartheta_m - \frac{1}{3} \frac{\omega^2 b^3 (1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} \tag{2}$$

$$B = + \frac{\omega^2}{2} b^3 \frac{1 + e'^2}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} \tag{3}$$

Dabei ist nach den Formeln (77.5), a. a. O. S. 515, wenn man $\lambda = a$ setzt:

$$V_0 = \frac{4}{3} A_0 \tag{4}$$

$$V_1 = \frac{4}{3} [A_0 - A_1 (x^2 + y^2) - A_3 z^2] \tag{5}$$

Nach (77.7) S. 516 ist

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{3}{2\,b}\,[1 - c'^2\,\Psi_{(e')}] \\ A_1 &= \frac{3}{4\,b^3}\left[\frac{1}{1 + c'^2} - \Psi_{(e')}\right] \\ A_3 &= \frac{3}{2\,b^3}\,\Psi_{(e')} \end{aligned}\right| \tag{6}$$

wo nach Seite 515

$$\Psi_{(e')} = \frac{1}{e'^3}\,(e' - \operatorname{arc\,tg} e') \tag{7}$$

oder nach der Reihenentwicklung von arc tg e'

$$\Psi(e') = \frac{1}{3} - \frac{e'^2}{5} + \frac{e'^4}{7} - \dots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n + 3}\,e'^{2n} \tag{7a}$$

wo n die Nummer des Gliedes der Reihe bedeutet.

Da nach (5)

$$V_1 = V_0 - \frac{4}{3}\,A_1\,(x^2 + y^2) - \frac{4}{3}\,A_3\,z^2$$

erhalten wir für W_s nach (1)

$$W_s = (A + B)\,V_0 - \frac{4}{3}\,BA_1(x^2 + y^2) - \frac{4}{3}\,BA_3 z^2 + \frac{\omega^2}{2}\,(x^2 + y^2) \tag{8}$$

Da

$$\frac{4}{3}\,\pi\,a^2\,b\,\vartheta_m = M$$

wo M die Masse des Erdellipsoides ist, wird

$$\frac{2}{3}\,f\,\pi\,a^2\,b\,\vartheta_m = \frac{Mf}{2}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{Mf}{2} + \frac{\omega^2\,b^3\,(1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi(e')}\left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{Mf}{2} + \frac{1}{6}\,\frac{\omega^2\,b^3\,(1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}} \end{aligned}$$

und daraus

$$(A + B)\, V_0 = \frac{2}{b}\left[\frac{Mf}{2} + \frac{1}{6}\,\frac{\omega^2 a^2 b}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}\right]\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right]$$

wenn wir beachten, daß $b^2\,(1 + e'^2) = a^2$.

Damit wird

$$(A + B)\, V_0 = \frac{Mf}{b}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right] + \frac{1}{3}\,\frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right] \quad (9)$$

Wir setzen in (8) $z = b;\ x = y = 0$ und erhalten

$$W_s = (A + B)\, V_0 - \frac{4}{3}\, b^2\, BA_3 \quad (10)$$

Nach (3) und (6_3) wird

$$BA_3 = \frac{3}{4}\,\omega^2\,\frac{(1 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}} \quad (11)$$

Mit (9) und (11) finden wir

$$W_s = \frac{Mf}{b}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right] + \frac{1}{3}\,\frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right]$$

$$- \frac{\omega^2 a^2\,\Psi_{(e')}}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}$$

oder unter Zusammenfassung der Glieder mit $\omega^2 a^2$

$$W_s = \frac{Mf}{b}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right] + \frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}}\left[\frac{1}{3} - \frac{e'^2}{3}\,\Psi_{(e')} - \Psi_{(e')}\right]$$

Die eckige Klammer des zweiten Gliedes der rechten Seite wird gleich

$$+ \frac{1}{3}\left[1 - e'^2\,\Psi_{(e')} - 3\,\Psi_{(e')}\right] = \frac{1}{3}\left[1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}\right];$$

damit erhalten wir

$$W_s = \frac{Mf}{b}\left(1 - e'^2\,\Psi_{(e')}\right) + \frac{\omega^2 a^2}{3} \quad (12)$$

Natürlich erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir in (8) $x = y = a$; $z = 0$ setzen, wovon man sich leicht überzeugt.

Nun gehen wir dazu über, die Schwerkraft an der Oberfläche des

Ellipsoides auszudrücken. Wir gehen aus von der zweiten Formel für g auf S. 519 a. a. O.

$$g = \frac{2A}{a^2\, b\, h(a)} + \frac{8}{3} BA_3\, b^2\, h(a)$$

Dabei ist

$$h(a) = \frac{\sqrt{1+e'^2}}{a\,V}; \quad \frac{1}{h(a)} = \frac{a\,V}{\sqrt{1+e'^2}} = b\,V$$

mit

$$V = \sqrt{1 + c'^2 \cos^2 \varphi}$$

Damit erhalten wir

$$g = \frac{2A}{a^2} V + \frac{8}{3} \frac{b}{V} BA_3 \tag{13}$$

Setzen wir die Werte für A nach (2) und für BA_3 nach (11) ein, so folgt

$$g = \frac{Mf}{a^2} V + \frac{8}{3} \frac{b}{V} \frac{3}{4} \omega^2 \frac{(1+e'^2)\,\Psi(e')}{1-(3+e'^2)\,\Psi(e')}$$

$$- \frac{2}{3} \frac{\omega^2\, b\, V}{1-(3+e'^2)\,\Psi(e')}$$

$$= \frac{Mf}{a^2} V + 2 \frac{b}{V} \omega^2 \frac{(1+e'^2)\,\Psi_{(e')}}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}} - \frac{2}{3} \frac{\omega^2\, b\, V}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}}$$

Setzen wir $\varphi = 0$, so wird $V = \sqrt{1+e'^2}$ und wir erhalten

$$g_a = \frac{Mf}{a^2} \sqrt{1+e'^2} + 2 \frac{b\,(1+e'^2)}{\sqrt{1+e'^2}} \frac{\omega^2\, \Psi_{(e')}}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}}$$

$$- \frac{2}{3} \frac{\omega^2\, b \sqrt{1+e'^2}}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}}$$

$$= \frac{Mf}{a\,b} + \frac{2\,a\,\omega^2\, \Psi_{(e')}}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}} - \frac{2}{3} \frac{\omega^2\, a}{1-(3+e'^2)\,\Psi_{(e')}}$$

Damit ergibt sich

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2\,a^2\,\omega^2}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}} \left[\frac{1}{3} - \Psi_{(e')}\right]$$

Beachten wir (7a), so finden wir

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2\,a^2\,\omega^2}{1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}} \left[+ \frac{e'^2}{5} - \frac{e'^4}{7} + \frac{e'^6}{9} - \frac{e'^8}{11} + \frac{e'^{10}}{13}\right]$$

und durch Ausklammern von $\frac{e'^2}{5}$

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2\,a^2\,\omega^2\,e'^2}{5\,[1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}]} \left[1 - \frac{5}{7}\,e'^2 + \frac{5}{9}\,e'^4 - \frac{5}{11}\,e'^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{13}\,e'^8 - \frac{1}{3}\,e'^{10}\right]$$

Damit wird

$$\frac{Mf}{b} = ag_a + \frac{2\,a^2\,\omega^2\,e'^2}{5\,[1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}]} \left[1 - \frac{5}{7}\,e'^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{9}\,e'^4 - \frac{5}{11}\,e'^6 + \frac{5}{13}\,e'^8 - \frac{e'^{10}}{3}\right]$$

Setzen wir diesen Ausdruck für $\frac{Mf}{b}$ in (12) ein, so finden wir

$$W_s = ag_a\,[1 - e'^2\,\psi_{(e')}] + \frac{\omega^2\,a^2}{3}$$

$$+ \frac{2\,\omega^2\,a^2\,e'^2\,[1 - e'^2\,\Psi_{(e')}]}{5\,[1 - (3 + e'^2)\,\Psi_{(e')}]} \left[1 - \frac{5}{7}\,e'^2 + \frac{5}{9}\,e'^4 - \ldots\ldots\right] \tag{13}$$

Mit Hilfe von (7a) bilden wir die Reihenentwicklung für

$1 - (3 + e'^2)\,\Psi(e')$ und finden

$$1 - (3 + e'^2)\,\Psi(e') = \frac{4}{15}\,e'^2 \left[1 - \frac{6}{7}e'^2 + \frac{5}{7}\,e'^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{20}{33}\,e'^6 + \frac{75}{143}\,e'^8 - \frac{6}{13}\,e'^{10}\right] \tag{14}$$

Setzen wir das in (13) ein, so erhalten wir

$$W_s = ag_a\,[1 - e'^2\,\Psi(e')] + \frac{\omega^2 a^2}{3}$$

$$+\frac{3}{2}\,\frac{\omega^2 a^2\left[1-\frac{5}{7}e'^2+\frac{5}{9}e'^4-\frac{5}{11}e'^6+\frac{5}{13}e'^8-\frac{1}{3}{}'^{10}\right][1-c'^2\Psi(e')]}{1-\frac{6}{7}e'^2+\frac{5}{7}e'^4-\frac{20}{33}e'^6+\frac{75}{143}e'^8-\frac{6}{13}e'^{10}}$$

Den Nenner des letzten Gliedes schreiben wir

$$1-\left[\frac{6}{7}e'^2-\frac{5}{7}e'^4+\frac{20}{33}e'^6-\frac{75}{143}e'^8+\frac{6}{13}e'^{10}\right]=1-x$$

Da $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots .$$

können wir den Nenner als Faktor in den Zähler hinaufbringen. Wir erhalten

$$\frac{1}{1-(3+e'^2)\Psi(e')} = \frac{15}{4e'^2}\left[1+\frac{6}{7}e'^2+\frac{1}{49}e'^4+\right.$$

$$\left.+\frac{128}{11\,319}e'^6-\frac{3392}{343\,343}e'^8+\frac{56\,320}{7\,210\,203}e'^{10}\right] \tag{15}$$

Vorher multiplizieren wir noch die beiden Reihen im Zähler, indem wir in $1 - e'^2\,\Psi_{(c')}$ die Reihe (7a) einsetzen. Wir erhalten

$$[1-c'^2\,\Psi(e')]\left[1-\frac{5}{7}e'^2+\frac{5}{9}e'^4-\ldots\right]=$$

$$=1-\frac{22}{21}e'^2+\frac{313}{315}e'^4-\frac{1924}{2079}e'^6+\frac{54\,259}{63\,063}e'^8-\frac{7226}{9009}e'^{10}+\ldots \tag{16}$$

Die Multiplikation der beiden Reihen von (15) und (16) ergibt

$$1-\frac{4}{21}e'^2+\frac{256}{2205}e'^4-\frac{42\,692}{509\,255}e'^6+\frac{3\,045\,624}{46\,351\,305}e'^8-$$

$$-\frac{650\,068}{12\,017\,005}e'^{10}+\ldots \tag{17}$$

Damit erhalten wir

$$W_s = a g_a \left(1 - \frac{1}{3} e'^2 + \frac{1}{5} e'^4 - \frac{1}{7} e'^6 + \frac{1}{9} e'^8 - \frac{1}{11} e'^{10} + \frac{1}{13} e'^{12}\right)$$

$$+ \frac{3}{2} a^2 \omega^2 \left[1 - \frac{4}{21} e'^2 + \frac{256}{2205} e'^4 - \frac{42\,692}{509\,255} e'^6\right.$$

$$\left. + \frac{3\,045\,624}{46\,351\,305} e'^8 - \frac{650\,068}{12\,017\,005} e'^{10}\right] + \frac{a^2 \omega^2}{3}$$

Fassen wir die Hauptglieder mit $a^2 \omega^2$ zusammen und schreiben die Formel in für die numerische Rechnung geeigneter Form, so finden wir das Schlußresultat

$$\left.\begin{aligned} W_s = a g_a \quad & + \frac{11}{6} a^2 \omega^2 - \frac{e'^2}{3} a g_a \\ & - \frac{2}{7} e'^2 a^2 \omega^2 + \frac{e'^4}{5} a g_a \\ & + \frac{128}{735} e'^4 a^2 \omega^2 - \frac{e'^6}{7} a g_a \\ & - \frac{64\,038}{509\,255} e'^6 a^2 \omega^2 + \frac{e'^8}{9} a g_a \\ & + \frac{1\,522\,812}{15\,450\,435} e'^8 a^2 \omega^2 - \frac{e'^{10}}{11} a g_a \\ & - \frac{975\,102}{12\,017\,003} e'^{10} a^2 \omega^2 + \frac{e'^{12}}{13} a g_a . \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Wir verwenden nun diese Formel zur Berechnung der Kräftefunktion W_s an dem als Niveaufläche aufgefaßten Internationalen Ellipsoid, indem wir g_a aus der Internationalen Schwereformel entnehmen. Es ist

$$a = 637\,838\,800 \text{ cm}$$

$$\log a = 8.8047\;1093\;4024\;8020\;3272$$

$$\alpha = \frac{1}{297}$$

$$e'^2 = 0.006\,768\,170\,197\,224\,251\,27$$

$$\log e'^2 = 7.8304\,7127\,1246\,3854\,4150\,—10$$

$$g_a = 978.0490 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$\log g_a = 2.990\,3606\,134$$

$$\omega = 0.000\,072\,921\,151\,466\,700\,400\,43$$

$$\log \omega = 5.862\,8535\,178\,—10$$

Damit erhalten wir

$$W_s = 626\,397\,870\,099 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}.$$

Die beiden letzten Glieder von (18) tragen nicht mehr zum Resultat bei; sie sind —0.0025 und +0.0046, zusammen also +0.0021.

Die drei ersten Glieder wurden mit der Rechenmaschine, alle folgenden mit Hilfe von Logarithmen von geeigneter Stellenzahl bestimmt. Selbstverständlich ist die verwendete Genauigkeit von 1 cm² sec^{-2} nur eine rechenmäßige. Nachdem aber die Daten des Internationalen Ellipsoides durch a und α, die Internationale Schwereformel durch g_a definitionsmäßig festgelegt sind, während ω, die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation außerordentlich genau feststeht, durfte die Aufgabe, die Kräftefunktion W_s am Internationalen Ellipsoid rechnungsmäßig festzulegen, wohl unternommen werden.

Zollikon, Ende Oktober 1949. *F. Baeschlin.*

Der Präzisions-Theodolit Wild T3 mit photographischer Registrierung

Von H. Kasper, Heerbrugg

Es ist wohl unbestritten, daß von allen Theodoliten für höhere Genauigkeitsansprüche der Präzisions-Theodolit Wild T3 die größte Verbreitung gefunden hat und sich dank seiner genialen Bauart seit mehr als 20 Jahren in der ganzen Welt konkurrenzlos behaupten kann. Nur wenige geodätische Instrumente, die in den letzten Jahrzehnten entwickelt wurden, haben sich als so langlebig erwiesen wie der Wild T3. Die Wild'schen Baugrundsätze, – Verwendung von verdeckten Glaskreisen mit Koinzidenzablesung, Kreisablesung neben dem Fernrohrokular, zylindrische Achsen und eine leichte, aber stabile Bauart, – haben sich ausgezeichnet bewährt und rasch durchgesetzt.