Geometrie mit Strecken

Autor(en): **Rinner, Karl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **48 (1950)**

Heft 7

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-207444

möglich sind, müssen abgewartet werden, bis ein endgültiges Urteil über Wirkungsweise und Bedeutung der Maulwurfsdrainage gefällt werden kann.

Wo die Maulwurfsdrainage aber nur deshalb abgelehnt wird, weil sie die Bedeutung der „klassischen“ Drainage herabsetzen und damit eine Maßnahme aus dem kulturtechnischen Sektor in den der Bodenbearbeitung überführen könnte, so ist dies ein bedenkliches Zeichen dafür, daß man sich in solchen Kreisen nicht im klaren ist, was bei einer Drainage Mittel ist und was Zweck.

Geometrie mit Strecken

Von Dr. Ing. habil. Karl Rinner, Graz

Durch die Möglichkeit, große Strecken mit Hilfe von optischen oder elektrischen Wellen direkt messen zu können, hat Festpunktbestimmung durch Streckenmessung große Bedeutung erlangt. Unbeschadet der Ungenauigkeit der derzeit verwendeten Meßgeräte, erscheint es daher angebracht, die theoretischen Möglichkeiten zu untersuchen und Verfahren für die Geometrie mit Strecken bereitzustellen. Diese betreffen die bisher nicht beachteten Netzkonfigurationen, welche nur aus Strecken gebildet werden (Streckennetz) und jene, in welchen Strecken und Winkel gleichberechtigt verwendet werden.

Zur Einführung in die Problemstellung* werden im folgenden einige Aufgaben der Streckengeometrie beschrieben, und Verf. hofft damit Anregung zu einer weiteren Bearbeitung der einschlägigen Probleme zu geben.

Nr. 1

Das Dreieck, das die Grundfigur für die Geometrie mit Winkeln darstellt, hat in der Streckengeometrie eine untergeordnete Bedeutung, weil das durch 3 Seiten bestimmte Dreieck keine Überbestimmung enthält; doch ist es rechentechnisch wichtig. Aus diesem Grund folgen einige Betrachtungen über das durch 3 Seiten bestimmte Dreieck und den Bogenschnitt.

a) Die Fläche des durch 3 Seiten $s_1\ s_2\ s_3$ bestimmten Dreieckes ist durch die Heronsche Formel gegeben:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{s\,(s - s_1)\,(s - s_2)\,(s - s_3)} \\ 2s &= s_1 + s_2 + s_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Seitenfehler ds_i bewirken einen Flächenfehler dF, der hieraus nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden kann. Durch implizite Differenziation folgt erst:

* Siehe auch den Aufsatz d. Verf. „Geod. Probleme in der nautischen Vermessung“, Berlin 1948, Verlag für Technik und Kultur.

$$2\,F\,dF = ds\,\frac{F^2}{s} + \Sigma\,d\,(s - s_i)\,\frac{F^2}{s - s_i}$$

$$2\,ds = \Sigma\,ds_i \qquad 2\,d\,(s - s_i) = \Sigma \pm ds_k \qquad \pm \text{ für } k \neq i$$

Bezeichnet ρ den Radius des Inkreis und ρ_i den Radius des die Seite s_i berührenden Ankreises, so bestehen die Beziehungen

$$\rho = \frac{F}{s} \qquad \rho_i = \frac{F}{s - s_i} \tag{2}$$

und mit diesen folgt:

$$d\,F = \frac{1}{4}\,\Sigma\,ds_i\,(\rho + \Sigma \pm \rho_k) \qquad \pm \text{ für } k \neq i$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (1) (2) folgt z. B. für den Koeffizienten von ds_1

$$\frac{s_1\,s_2\,s_3}{4\,F} \cdot \frac{-s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{2\,s_2\,s_3} = r\cos\alpha_1 = n_1$$

und durch zyklisches Vertauschen ein entsprechender Ausdruck für die Koeffizienten von ds_2 und ds_3. Darin bedeuten r den Radius des Umkreises und α_i den der Seite s_i gegenüberliegenden Dreieckswinkel, während n_i den Normalabstand des Umkreismittelpunktes von der Seite s_i bezeichnet. Somit folgt für den bestimmten Fehler der Dreiecksfläche die einfache Beziehung:

$$dF = n_1\,ds_1 + n_2\,ds_2 + n_3\,ds_3 \tag{3}$$

Für den mittleren Flächenfehler ergibt sich, wenn m_i die mittleren Seitenfehler sind:

$$m_F = \pm\sqrt{n_1^2\,m_1^2 + n_2^2\,m_2^2 + n_3^2\,m_3^2} \tag{4}$$

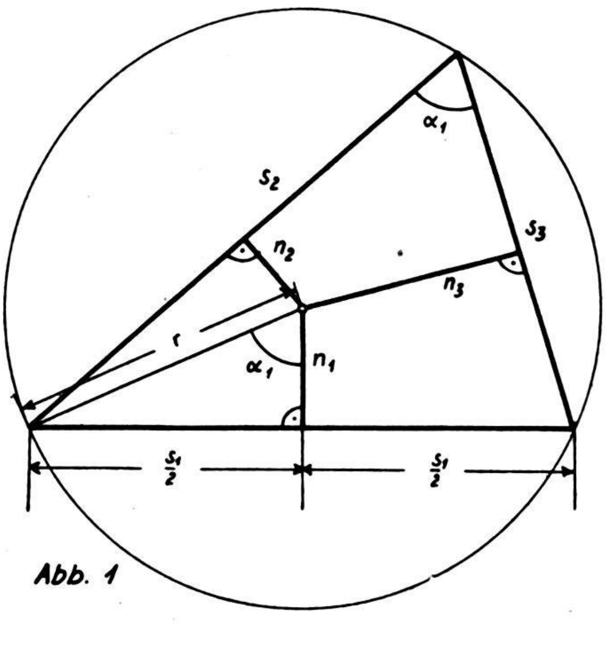

Abb. 1

Ein Seitenfehler geht in das Produkt mit dem Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite in den Flächenfehler ein. Sein Einfluß verschwindet, wenn dieser Abstand gleich Null wird und dies ist nur dann der Fall, wenn die fehlerhafte Seite Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes ist.

b) Der mittlere Fehler eines durch einfachen Bogenschnitt bestimmten Punktes läßt sich auf Grund des obigen Ergebnisses leicht ermitteln. Bezeichnet h_1 die Höhe auf die Verbindungsgerade s_1 der gegebenen

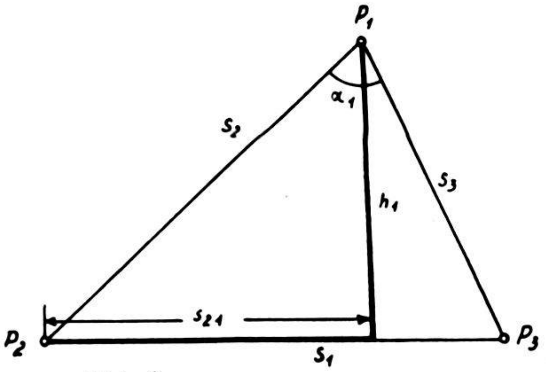

Abb. 2

Punkte $P_2\, P_3$ (Abb. 2) und s_{21} die Projektion von s_2 auf s_1, so folgen aus den Beziehungen

$$s_1\, h_1 = 2F \qquad\qquad 2\, s_1\, s_{21} = s_1^2 + s_2^2 - s_3^2$$

die Gleichungen:

$$s_1\, dh_1 = (2n_1 - h_1)\, ds_1 + 2n_2\, ds_2 + 2n_3\, ds_3$$

$$s_1\, ds_{21} = s_{31}\, ds_1 + s_2\, ds_2 - s_3\, ds_3$$

Mit $m_1 = 0$ und $m_2 = m_3 = \mu$ folgt hieraus für den mittleren Punktfehler des durch $s_2\, s_3$ bestimmten Punktes:

$$M^2 = m_{h1}^2 + m_{s21}^2 = \left(\frac{\mu}{s_1}\right)^2 (4\, n_2^2 + 4\, n_3^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

Unter Beachtung von $n_i : (s_i/2) = \operatorname{cotg} a_i$ (Abb. 1) ergibt sich hieraus:

$$M^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{s_2}{s_1 \sin a_2}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{s_1 \sin a_3}\right)^2\right]$$

oder nach dem Sinus-Satz schließlich:

$$M = \pm \frac{\mu}{\sin a_1} \sqrt{2} \tag{5}$$

Der mittlere Punktfehler eines durch Bogenschnitt bestimmten Punktes wird also am kleinsten, wenn die beiden Bogen ($s_2\, s_3$) sich rechtwinkelig schneiden.

Nr. 2

Ein Viereck, in dem 4 Seiten und beide Diagonalen gemessen werden, enthält eine Überbestimmung, aus welcher die gemessenen Strecken verbessert werden können. Ein solches Viereck stellt daher die Grundfigur der Streckengeometrie dar und entspricht dem Dreieck der Winkelgeometrie.

Mit den aus Abb. 3 ersichtlichen Bezeichnungen folgt für die durch die Überbestimmung gegebene Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \phi\,(s_i) &= s_6 - \sqrt{s_2^2 + s_5^2 - 2\,s_2\,s_5 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ s_3^2 &= s_1^2 + s_2^2 - 2\,s_1\,s_2 \cos\alpha_1 \\ s_4^2 &= s_1^2 + s_5^2 - 2\,s_1\,s_5 \cos\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Entwicklung an der durch die Meßwerte festgelegten Näherungsstelle ergibt die lineare Form:

$$\phi = \phi_0 + d\,\phi = 0$$

Bezeichnen F_{ik} die Fläche des von den Seiten $s_i\,s_k$ eingeschlossenen Dreieckes und s_{ik} die orthogonale Projektion der Seite s_i auf s_k, so gelten die Differentialgleichungen

$$d\,\phi = ds_6 - \frac{s_{62}}{s_6}\,ds_2 - \frac{s_{65}}{s_6}\,ds_5 - \frac{2\,F_{25}}{s_6}\,(d\,\alpha_1 + d\,\alpha_2)$$

$$2\,F_{12}\,d\,\alpha_1 = -\,s_{31}\,ds_1 - s_{32}\,ds_2 + s_3\,ds_3$$

$$2\,F_{25}\,d\,\alpha_2 = -\,s_{41}\,ds_1 + s_4\,ds_4 - s_{45}\,ds_5$$

und aus diesen folgt die Fehlerbedingungsgleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\,a_i\,v_i + W = 0 \\ &a_1 = \frac{1}{s_6}\,(f_2\,s_{31} + f_5\,s_{41}) \qquad a_3 = -\,f_2\,\frac{s_3}{s_6} \\ &a_2 = \frac{1}{s_6}\,(f_2\,s_{32} - s_{62}) \qquad a_4 = -\,f_5\,\frac{s_4}{s_6} \\ &a_5 = \frac{1}{s_6}\,(f_5\,s_{45} - s_{65}) \qquad a_6 = 1 \\ &f_2 = \frac{F_{25}}{F_{21}} \qquad f_5 = \frac{F_{52}}{F_{51}} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Der Quotient f_2 der über der Seite s_2 stehenden Dreiecke $(s_2\,s_3\,s_1)$ und $(s_2\,s_6\,s_5)$ ist gleich dem Quotienten der zu s_2 gehörigen Höhen dieser Dreiecke, oder auch gleich dem Quotienten aus s_5 (oder s_3) und dem zwischen

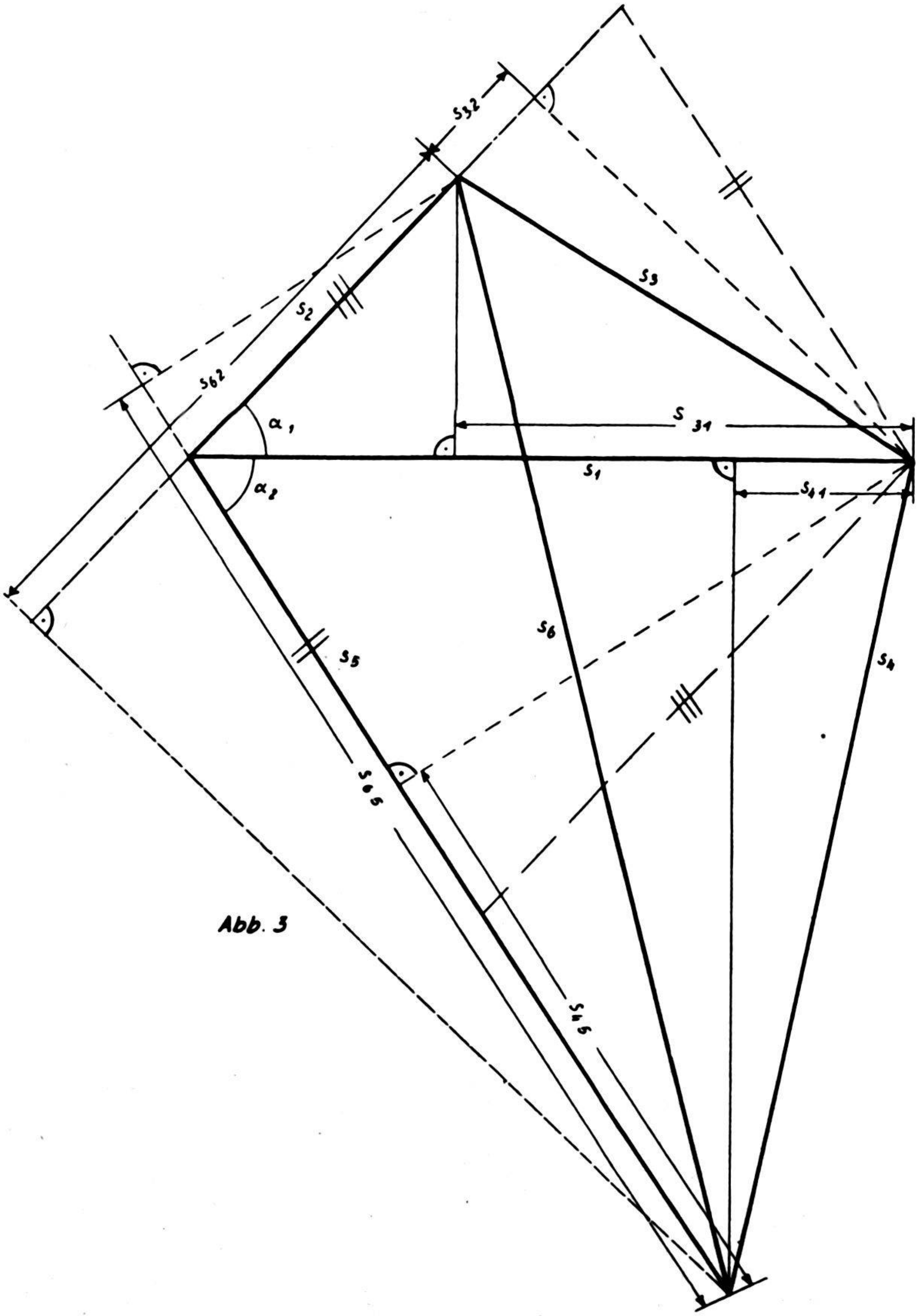

Abb. 3

$s_2\,s_4$ liegenden Stück der Parallelen zu s_5 (oder s_3) durch den Schnittpunkt von $s_3\,s_1$ (oder $s_5\,s_6$). Entsprechendes gilt auch für den Flächenquotienten f_5. Diese Werte sowie die Projektionen s_{ik} lassen sich daher in einfacher Weise einer maßstäblichen Figur entnehmen. Dabei ist zu beachten, daß s_{ik} in der Richtung von s_k positiv, in der Gegenrichtung aber negativ zu zählen ist.

(Schluß folgt)