

Ergänzungen zum graphischen Einpassen von Luftaufnahmen

Autor(en): **Krames, Josef**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **49 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-208327>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ergänzungen zum graphischen Einpassen von Luftaufnahmen

Von *Josef Krames*¹,

korrespondierendes Mitglied der österreichischen Akademie der Wissenschaften

(Mitteilung aus dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
in Wien)

(Mit drei Abbildungen im Text)

Nr. 1. In einer vorangegangenen Mitteilung hat der Verfasser beispielhaft dargelegt, wie das von ihm entwickelte graphische Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen² noch ausgebaut werden kann. Diese Ausführungen sollen mit den vorliegenden Zeilen weiter ergänzt und aufgerundet werden. Vor allem wird nachgewiesen, daß eine kleine, nur in einer Modellecke auftretende Restparallaxe keineswegs bloß auf instrumentelle Fehler zurückzuführen ist, sondern auch rein geometrisch, d. h. allein durch bestimmte Verlagerungen der beiden Zielstrahlbündel zustande kommen kann. Diese Tatsache ist insofern von einiger praktischer Bedeutung, als die genaue Kenntnis aller geometrisch möglichen Restparallaxen unbedingt erforderlich ist, wenn es gelingen soll, die jeweiligen Ursachen einer vorliegenden Parallaxenverteilung von vorneherein richtig zu erkennen³. Ferner werden Bündelbewegungen untersucht, die in gegebenen Modellpunkten innerhalb einer Normalebene zur Basis Parallaxenänderungen von minimaler Quadratsumme erzeugen. Daraus ergibt sich eine neue Möglichkeit, eine kleine Eckenrestparallaxe auf graphischem Wege zu eliminieren. Die hierbei verwendeten Orientierungsbewegungen sind immer eindeutig bestimmt, auch wenn die Anzahl der herangezogenen Orientierungspunkte über alle Grenzen wächst. Im letzteren Falle sind diese Bewegungen überdies von der Wahl der Orientierungspunkte unabhängig.

Nr. 2. Wir denken uns vorerst zwei (auf irgendeine Weise) exakt orientierte Zielstrahlbündel gegeben und fragen nach solchen Verlagerungen dieser Bündel, bei denen bloß in einer Modellecke eine kleine *y*-Parallaxe entsteht, während im übrigen Gesichtsfeld weiterhin keine meßbare Parallaxe feststellbar sein soll. Zu diesem Zweck bezeichnen wir die kleinste, *am räumlichen Modell* noch meßbare *y*-Parallaxe (also den mittleren Fehler einer Parallaxenbeobachtung) mit $\pm dm$ und nehmen

¹ *J. Krames*, Über das Wegschaffen von Restparallaxen mittels graphischer Konstruktionen, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik 47 (1949), S. 256–262.

² Siehe *J. Krames*, Über ein graphisches Verfahren zum gegenseitigen Einpassen von Luftaufnahmen, Österreichische Zeitschrift für Vermessung 37 (1949), S. 13–29, sowie *J. Krames*, Graphische Lösung der Hauptaufgabe beim Normalfall der Luftphotogrammetrie, Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-nationalökonomische Kl. 86 (1949), S. 93–99.

³ Hierauf soll in einer weiteren Mitteilung noch näher eingegangen werden.

der Einfachheit halber das Geländemodell als waagrechte Ebene an. Für das übliche rechtwinklige Koordinatensystem mit der x -Achse in der Kernachse und dem Ursprung im linken Zentrum usw.⁴ lautet die Gleichung dieser Ebene $z = -h$. Die darin angenommenen Orientierungspunkte sollen die Koordinaten haben:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{4}: b, a, -h, & \mathbf{2}: b, 0, -h, & \mathbf{6}: b, -a, -h, \\ \mathbf{3}: 0, a, -h, & \mathbf{1}: 0, 0, -h, & \mathbf{5}: 0, -a, -h. \end{array}$$

Wie aus früheren Veröffentlichungen des Verfassers² bereits bekannt ist, kann jede (innerhalb gewisser enger Grenzen gehaltene) Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel durch eine Differenzkipfung $d\omega$ und die Grundpunkte zweier Normalebene zur Basis eindeutig festgelegt werden. Wählt man insbesondere als Koordinaten der Grundpunkte \mathbf{G}^0 und \mathbf{G}^b der Ebenen ν^0 ($x = 0$), bzw. ν^b ($x = b$) (siehe Abb. 1 und 2):

$$Y^0 = a, Z^0 = -h, \text{ bzw. } Y^b = 0, Z^b = -h - \frac{a^2}{2h}, \quad (1)$$

ferner als Differenzkipfung etwa

$$d\omega = \frac{h}{a^2} dm, \quad (2)$$

so sind die übrigen Orientierungsgrößen² wie folgt eindeutig bestimmt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A)} \quad d\varphi_1 = \frac{Y^b}{b} d\omega = 0, \quad d\varphi_2 = \frac{Y^0}{b} d\omega = \frac{h}{a b} dm, \\ d\kappa_1 = \frac{Z^b}{b} d\omega = -\frac{2h^2 + a^2}{2a^2 b} dm, \quad d\kappa_2 = \frac{Z^0}{b} d\omega = -\frac{h^2}{a^2 b} dm; \end{array} \right\} \quad (3a)$$

oder, falls etwa der linke Projektor festgehalten bleiben soll,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B)} \quad d\omega_2 = d\omega, \quad d\varphi_2 = \frac{Y^b - Y^0}{b} d\omega_2 = -\frac{h}{a b} dm, \\ d\kappa_2 = \frac{Z^b - Z^0}{b} d\omega_2 = -\frac{dm}{2b}, \quad db_{y_2} = Z^b d\omega_2 = \\ \quad \quad \quad = -\frac{2h^2 - a^2}{a^2} dm, \quad db_{z_2} = -Y^b d\omega_2 = 0. \end{array} \right\} \quad (3b)$$

Die zu den sechs Modellpunkten $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{6}$ gehörigen Strecken² S_i ergeben sich aus (1) und Abb. 1, 2 (vgl. hierzu die in der eingangs erwähnten Mitteilung enthaltenen Abbildungen) wie folgt:

⁴ Vgl. auch *J. Krames*, Über die „gefährlichen Raumgebiete“ der Luftphotogrammetrie, Photograph. Korr. 84 (1948), S. 1–16.

vorgetreten. Auf ähnliche Weise könnte auch in jeder anderen Modellecke eine derartige Restparallaxe erzeugt werden.

Läßt man das Verhältnis der Orientierungsgrößen (3a, b) ungeändert, indem $d\omega$ zwischen den Grenzen

$$2 \frac{h}{a^2} dm \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{h}{a^2} dm$$

beliebig variiert wird, so erhält man in jedem Fall bloß an der Stelle **5** eine meßbare y -Parallaxe, und zwar liegt diese dann stets zwischen $4 \cdot dm$ und dm .

Selbstverständlich können auch noch andere Bündelverlagerungen angegeben werden, durch die eine einzelne Eckenrestparallaxe hervorgerufen wird. Mit obigen Ergebnissen ist aber bereits zweifelsfrei klar gestellt, daß zwei Zielstrahlbündel, rein geometrisch gesehen, im Verlaufe der letzten Orientierungsbewegungen ohne weiteres in solche Lagen kommen können, daß bloß in einer der vier Modellecken eine meßbare y -Parallaxe zu beobachten ist.

Um zu zeigen, in welchem Ausmaß diese Bündellagen von der idealen gegenseitigen Orientierung abweichen können, setzen wir in (1) beispielsweise die abgerundeten Werte $h = -300$ mm, $a = b = 100$ mm, $dm = 0.02$ mm ein und erhalten sodann gemäß (2) und (3a oder b):

- A)** $d\omega = 3 \cdot 8^c$, $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 3 \cdot 8^c$, $d\kappa_1 = -12^c$, $d\kappa_2 = -11 \cdot 4^c$,
bzw.
- B)** $d\omega_2 = 3 \cdot 8^c$, $d\varphi_2 = -3 \cdot 8^c$, $d\kappa_2 = -0.6^c$, $db_{y_2} = 0$, $db_{z_2} = 0.19$ mm.

Diese Werte können noch mit einem zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 liegenden Faktor multipliziert werden, ohne dadurch das alleinige Auftreten der Restparallaxe dp_5 von der Größe $dm < dp_5 < 4 \cdot dm$ zu beeinträchtigen.

Mit diesen Feststellungen, die auch experimentell leicht zu bestätigen sind, wurde zugleich nachgewiesen, daß derartige Eckenrestparallaxen keineswegs bloß von Instrumenten- oder Bildschichtenfehlern herühren können, wie dies bisher vielfach geglaubt wurde. Denn sobald Bündellagen von der geschilderten Art überhaupt existieren, ist es auch immer denkbar, daß eine solche Lage während des Einpassens erreicht wird. Nur dann, wenn bei einem ebenen Modell eine einzeln auftretende Eckenrestparallaxe den vier- bis siebenfachen Betrag der kleinsten noch meßbaren y -Parallaxe dm merklich überschreitet³, ist die Annahme berechtigt, daß sie zum Teil auch auf systematischen Fehlern beruht. Liegt jedoch ein beliebig geformtes Modell oder eine allgemeine Verteilung der Orientierungspunkte vor, so verschiebt sich diese obere Grenze. Sie steigt zum Beispiel erheblich an, wenn der Nadirpunkt **1** im Raume höher liegt als die Randpunkte **3** und **5**.

Nr. 3. Für das Wegschaffen einer Eckenrestparallaxe dp_5 wurden in der eingangs erwähnten Mitteilung¹ (im wesentlichen) die gleichen Bündelbewegungen wie oben in (2) und (3a, b), jedoch mit entgegengesetztem

Vorzeichen, vorgeschlagen. Statt dessen kann auch der in der Folge beschriebene Weg eingeschlagen werden, der dem in der Geodäsie üblichen Prinzip der kleinsten Quadratsummen besser entspricht. Wir stellen uns zuerst folgende allgemeinere Aufgabe:

Gegeben seien eine zur Basis normale Ebene ν ($x = \text{konst.}$) und innerhalb von ν eine Anzahl von Modellpunkten \mathbf{P}_i . Der Grundpunkt \mathbf{G}^B dieser Ebene ist derart anzunehmen, daß die Quadratsumme der dadurch in den Punkten \mathbf{P}_i bestimmten Parallaxenänderungen ein Minimum wird.

Zwecks Lösung dieser Aufgabe denken wir uns durch die gegebenen Modellpunkte \mathbf{P}_i mit den Koordinaten x, y_i, z_i die Normalen \mathbf{n}_i zu den Kernebenen dieser Punkte gelegt. Jede dieser Geraden verläuft in ν und ist durch eine Gleichung dargestellt:

$$z = -\frac{y_i}{z_i} y + \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i}. \quad (7)$$

Bezeichnen ferner Y^B, Z^B die Koordinaten des gesuchten Grundpunktes \mathbf{G}^B von ν , dann gilt für den längs einer Parallelen zur z -Achse gemessenen Abstand² einer Geraden \mathbf{n}_i vom Punkt \mathbf{G}^B :

$$S_i = Z^B + \frac{y_i}{z_i} Y^B - \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i}. \quad (8)$$

Nach Formel (5) kann danach die Quadratsumme \mathfrak{S} der in den verschiedenen Punkten \mathbf{P}_i von ν erzeugten Parallaxenänderungen dp_i wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = & \left[Z^{B^2} \cdot n + Y^{B^2} \cdot \sum \frac{y_i^2}{z_i^2} + 2 Y^B Z^B \cdot \sum \frac{y_i}{z_i} \right. \\ & \left. - 2 Y^B \cdot \sum \frac{y_i (y_i^2 + z_i^2)}{z_i^2} - 2 Z^B \cdot \sum \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i} - \sum \frac{(y_i^2 + z_i^2)^2}{z_i^2} \right] d\omega^2, \quad (9) \end{aligned}$$

wobei die Summen über alle n betrachteten Modellpunkte \mathbf{P}_i zu erstrecken sind. Denkt man sich diese Größe \mathfrak{S} (nach allfälliger Multiplikation mit einem geeigneten Faktor) vom jeweiligen Grundpunkt \mathbf{G}^B aus normal zu ν , also in der x -Richtung, aufgetragen, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken nach Gleichung (9) ein *Paraboloid*, dessen Achse zur Basis parallel ist. Weil die innerhalb von ν beobachteten Modellpunkte \mathbf{P}_i durchwegs in verschiedenen Kernebenen liegen und reell vorauszusetzen sind, gilt stets:

$$n \cdot \sum \frac{y_i^2}{z_i^2} > \sum \frac{y_i}{z_i}, \quad (10)$$

so daß dieses Paraboloid ein *elliptisches* ist (denn die Diskriminante der quadratischen Glieder von (9) wird danach negativ). Demnach existiert

innerhalb von ν eine einzige Lage des Grundpunktes \mathbf{G}^B , nämlich *im Normalriß des Paraboloidscheitels auf ν , wo die Quadratsumme \mathfrak{S} tatsächlich ein Minimum erreicht*. Um diese Stelle zu berechnen, hat man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial Y^B} &= Y^B \cdot \sum \frac{y_i^2}{z_i^2} + Z^B \cdot \sum \frac{y_i}{z_i} - \sum \frac{y_i (y_i^2 + z_i^2)}{z_i^2} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial Z^B} &= Y^B \cdot \sum \frac{y_i}{z_i} + Z^B \cdot n - \sum \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

nach Y^B und Z^B aufzulösen. Man erkennt daraus unmittelbar, daß die geforderte Lage des Grundpunktes \mathbf{G}^B der Ebene ν immer eindeutig bestimmt ist, gleichgültig, wie viele Modellpunkte \mathbf{P}_i innerhalb von ν auch herangezogen wurden. Die Anzahl dieser Punkte muß nur > 1 und die Relation (10) erfüllt sein. Für $n = 1$ deckt sich jede der beiden Gleichungen (11) mit (7), was damit übereinstimmt, daß sodann für jede Lage des Grundpunktes \mathbf{G}^B auf der Geraden \mathbf{n}_1 die in \mathbf{P}_1 erzeugte Parallaxe = 0 ist. Im Falle $n = 2$ verschwindet \mathfrak{S} nur dann, wenn der Grundpunkt \mathbf{G}^B im Schnitt der beiden Geraden \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 angenommen wird. Dies folgt auch aus bereits bekannten Eigenschaften der „gefährlichen Raumgebiete“⁴. Es sei noch hervorgehoben, daß die Koeffizienten der Gleichungen (11) auch mit Hilfe einfacher geometrischer Konstruktionen bestimmbar sind (siehe später unter Nr. 6).

Nr. 4. Auf Grund dieser Bemerkungen kann eine einzelne, bei einer Modellecke stehengebliebene Restparallaxe auch auf die folgende Weise weggeschafft werden. Wir besprechen zuerst einen *allgemeinen Fall*, etwa den in der vorigen Mitteilung¹ behandelten, und haben vor allem den Grundpunkt \mathbf{G}^B der Ebene ν^b ($x = b$) festzulegen. Nach dem Einführen der Koordinaten der Modellpunkte **2, 4, 6** in die Gleichungen (11) erhält man $Y^B = 47 \cdot 6$ mm, $Z^B = -332 \cdot 0$ mm. Demgegenüber ergab sich bei dem dort verwendeten Vorgang (im selben Maßstab ausgedrückt): $Y^b = 39$, $Z^b = -324$ mm. Wird ferner der Grundpunkt \mathbf{G}^0 der Ebene ν^0 ($x = 0$) an der gleichen Stelle Y^0, Z^0 wie damals angenommen, so sind damit die Strecke S_5 , die Differenzkipfung $d\omega$ und die übrigen Orientierungsgrößen im Sinne des graphischen Verfahrens² eindeutig bestimmt. Man erkennt nun sogleich (s. auch obige Gleichungen 3a, b), daß bei diesen beiden Lösungen **A)** nur die Werte von $d\varphi_1$ und $d\kappa_1$, bzw. **B)** die Werte von $d\varphi_2, d\kappa_2, db_{y_2}$ und db_{z_2} bloß um kleine Beträge voneinander abweichen.

Noch deutlicher zeigt sich dies bei dem oben in Nr. 2 behandelten Beispiel eines *ebenen Modells* mit den sechs regelmäßig verteilten Orientierungspunkten. Die Koordinaten der in ν^b befindlichen Punkte **2, 4, 6** ergeben hier gemäß (11) den Grundpunkt \mathbf{G}^B an der Stelle (s. Abb. 2):

$$Y^B = 0, \quad Z^B = -h - \frac{2}{3} \frac{a^2}{h}.$$

Wählt man wieder $Y^0 = a$, $Z^0 = -h$, so daß $S_5 = 2 \frac{a^2}{h}$ wird (Abb. 1),

ferner $d\omega = dp_5$: $S_5 = -\frac{h}{2a^2} dp_5$, dann verschwindet die Parallaxe dp_5 (für die ohne Rücksicht auf die Vorzeichen $dm > dp_5 > 4 \cdot dm$ sein soll), sobald außer $d\omega$ auch noch die Orientierungsgrößen:

A)

$$d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = -\frac{h}{2ab} dp_5, d\kappa_1 = \frac{3h^2 + 2a^2}{6a^2b} dp_5, d\kappa_2 = \frac{h^2}{2a^2b} dp_5, \quad (12a)$$

bzw.

$$\mathbf{B)} \quad d\varphi_2 = \frac{h}{2ab} dp_5, d\kappa_2 = \frac{1}{3b} dp_5, db_{y_2} = \frac{3h^2 + 2a^2}{6a^2} dp_5, db_{z_2} = 0 \quad (12b)$$

am Gerät eingestellt werden. Nach dem oben erwähnten Vorgang¹ hätte sich bloß für die Koordinate Z^B ein anderer Wert ergeben, nämlich (vgl. Abb. 2):

$$Z^b = -h - \frac{a^2}{2h},$$

so daß danach in (12a, b) nur die Größen $d\kappa_1$, bzw. $d\kappa_2$ und db_{y_2} in

$$\mathbf{A)} \quad d\kappa'_1 = \frac{2h^2 + a^2}{4a^2b} dp_5,$$

$$\text{bzw. } \mathbf{B)} \quad d\kappa'_2 = \frac{1}{4b} dp_5 \text{ und } db'_{y_2} = \frac{2h^2 + a^2}{4a^2} dp_5$$

abzuändern wären.

Setzt man abermals die besonderen Werte $h = 300$ mm, $a = b = 100$ mm voraus und nimmt man beispielsweise $dp_5 = 0.05$ mm an, so erhält man nach (12a oder b):

$$\mathbf{A)} \quad d\omega = -4.8^c, d\varphi_1 = 0, d\varphi_2 = -4.8^c, d\kappa_1 = 16.5^c, d\kappa_2 = 14.4^c,$$

bzw.

$$\mathbf{B)} \quad d\omega_2 = -4.8^c, d\varphi_2 = 4.8^c, d\kappa_2 = 1.1^c, db_{y_2} = 0.242 \text{ mm}, db_{z_2} = 0,$$

während im anderen Falle bloß **A)** $d\kappa_1$ auf 15.1^c , bzw. **B)** $d\kappa_2$ auf 0.8^c , db_{y_2} auf 0.238 mm zu korrigieren sind. Dies bestätigt aufs neue, daß die letzten Orientierungsbewegungen bei diesen beiden Lösungen sich praktisch kaum voneinander unterscheiden.

Nr. 5. Den beiden soeben verwendeten Orientierungsvorgängen haftet gemeinsam der Mangel an, daß die Lage des Grundpunktes G^b , bzw. G^B wesentlich von der im Grunde genommen *willkürlichen Wahl* der

Orientierungspunkte abhängt. Zieht man beispielsweise neben **2** ($b, 0, -h$), **4** ($b, a, -h$) und **6** ($b, -a, -h$) auch die beiden weiteren Modellpunkte **4'** und **6'** mit den Koordinaten $b, \frac{a}{2}, -h$, bzw. $b, -\frac{a}{2}, -h$ heran (s. Abb. 2), so folgt aus (11):

$$Y^B = 0, \quad Z^B = -h - \frac{a^2}{2h}. \quad (13)$$

In diesem Falle liegt also der Grundpunkt genau an jener Stelle \mathbf{G}^b , wo er auch nach dem zweiten, oben verwendeten Vorgang¹ erhalten wird, wenn bloß die Punkte **2**, **4**, **6** zugrundegelegt sind (vgl. wieder Abb. 2). Ferner ist sogleich einzusehen, daß nach (11) die Grundpunktsordinate $Y^b \neq 0$ wird, sobald die Randpunkte **4** und **6** unsymmetrisch liegen usw.

Derartige, von der jeweiligen Punktwahl beeinflusste Ergebnisse werden bei dem nachstehend beschriebenen Vorgang vermieden. Man denkt sich auf dem in der Ebene v^b enthaltenen Geländequerschnitt n regelmäßig verteilte Modellpunkte \mathbf{P}_i angenommen und läßt deren Anzahl über alle Grenzen anwachsen. Merkwürdigerweise gibt es sodann stets eine nach Gleichung (11) eindeutig bestimmte Grenzlage des Grundpunktes \mathbf{G}^B .

In der Tat! Bezeichnen a und $-a$ die Ordinaten der äußersten am Querschnitt betrachteten Punkte, so können bei Vorliegen eines ebenen Modells ($z = -h$) die n Punkte \mathbf{P}_i zweckmäßig wie folgt angenommen werden:

$$\mathbf{P}_i \left(y_i = \pm i \frac{a}{m}, z_i = -h \right), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Diese $n = 2m + 1$ Modellpunkte sind äquidistant und paarweise symmetrisch zum Nadirpunkt **2** ($i = 0$). Durch Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichungen (11) ergibt sich vorerst:

$$Y^B = 0, \quad Z^B = \frac{1}{2m+1} \sum \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i} = -h - \frac{2a^2(1+2^2+\dots+m^2)}{h m^2(2m+1)}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$1 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1), \quad (14)$$

so daß schließlich folgt:

$$Z^B = -h - \frac{a^2 m + 1}{h 3m}, \quad \text{sowie } Z = \lim_{m \rightarrow \infty} Z^B = -h - \frac{a^2}{3h} \quad (15)$$

Der darnach bestimmte Grundpunkt \mathbf{G} ($0, Z$) liegt also im ersten Drittel zwischen dem Nadirpunkt $\mathbf{2}$ und dem Schnittpunkt der durch $\mathbf{2}$ und $\mathbf{4}$ gelegten Normalen \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_4 (vgl. Abb. 2). Die durch diesen Grenzpunkt \mathbf{G} bestimmten Orientierungsgrößen haben nach obigen Ausführungen die beachtenswerte Eigenschaft, in allen Querschnittspunkten $a \geq y \geq -a, z = -h$ Parallaxenänderungen von minimaler Quadratsumme zu erzeugen.

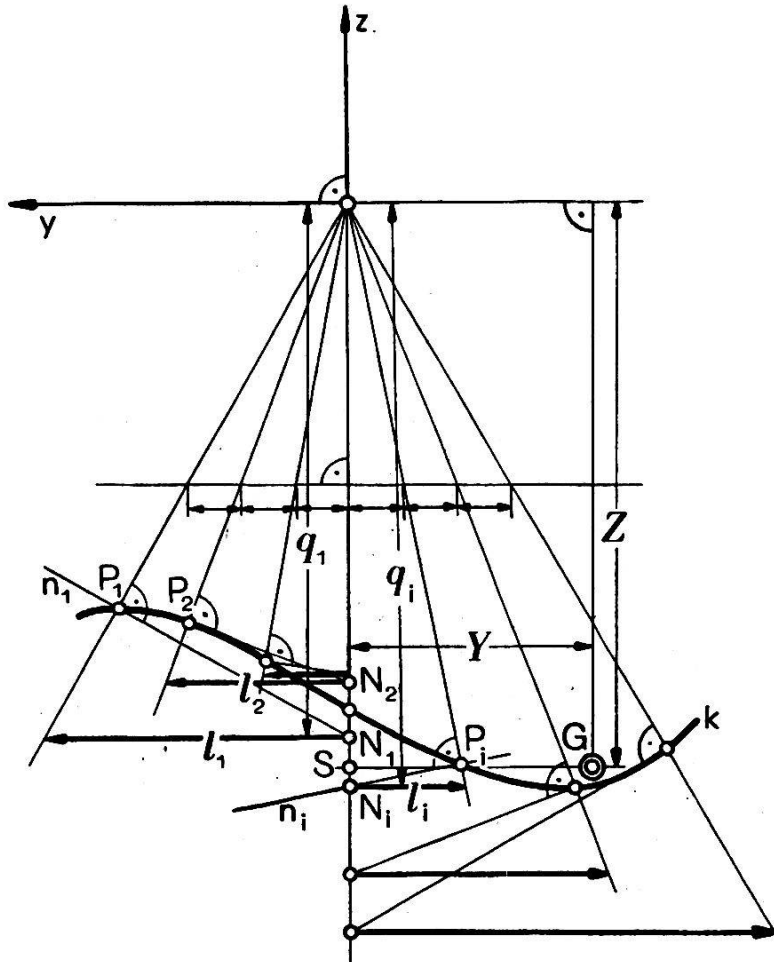


Abb. 3

Nr. 6. Eine derartige Grenzlage des Grundpunktes einer Normalenebene ν zur Basis ist auch für jedes andere, *beliebig geformte Gelände* eindeutig bestimmt. Um dies nachzuweisen, beschränken wir uns auf eine graphische Näherungskonstruktion dieses Grenzpunktes \mathbf{G} . Wir setzen die in ν vorhandene Querschnittskurve \mathbf{k} des Modells als bekannt voraus und wählen auf \mathbf{k} eine Anzahl zwischen dem oberen und unteren Bildrand möglichst gleichmäßig verteilter Modellpunkte \mathbf{P}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). In Abb. 3 wurde beispielsweise $n = 7$ angenommen und außerdem dafür

gesorgt, daß $\sum \frac{y_i}{z_i} = 0$ ist. Durch jeden Punkt \mathbf{P}_i wird nun die Normale \mathbf{n}_i zu seiner Kernebene gelegt und der Schnittpunkt \mathbf{N}_i von \mathbf{n}_i mit der

z -Achse gezeichnet. Sind q_i die Applikaten dieser Punkte \mathbf{N}_i , so folgt aus (11):

$$Z = \frac{1}{n} \sum q_i,$$

d. h. der Punkt \mathbf{S} mit den Koordinaten $0, Z$ kann auch als *Schwerpunkt* der n mit gleichen Maßen belegten Punkte \mathbf{N}_i aufgefaßt werden. Weil ferner jede der Größen

$$y_i \frac{y_i^2 + z_i^2}{z_i^2}$$

den in der y -Richtung gemessenen Abstand l_i des Punktes \mathbf{N}_i von der durch \mathbf{P}_i gelegten Kernebene angibt (s. Abb. 3), gilt wegen (11):

$$Y = \frac{\sum l_i}{\sum \frac{y_i^2}{z_i^2}},$$

wobei auch auf die Vorzeichen der Strecken l_i zu achten ist. Hat man, wie in Abb. 3, die Richtungskoeffizienten y_i/z_i als Glieder einer arithmetischen Reihe angenommen, so vereinfacht sich die Auswertung von Y gemäß (14) beträchtlich. Selbstverständlich ist der gesuchte Grundpunkt um so genauer bestimmt, je mehr Modellpunkte herangezogen werden. Es zeigt sich jedoch, daß diese Konstruktion gewöhnlich sehr rasch konvergiert. Verdoppelt man etwa in Abb. 3 die Anzahl der Punkte \mathbf{P}_i , so ändern sich Y und Z nur noch um weniger als 1 %. Dies ist aber im Hinblick auf die Kleinheit der gesuchten Orientierungsgrößen (vgl. Nr. 2, 4) bereits praktisch bedeutungslos. Ist der Modellquerschnitt \mathbf{k} bezüglich der z -Achse symmetrisch, dann wird wegen $\sum l_i = 0$ auch $Y = 0$, d. h. der Grundpunkt \mathbf{G} liegt auf der z -Achse, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, *bei einem Gebirgstal knapp unterhalb der Talsohle, hingegen bei einem Bergrücken weiter unterhalb des Scheitels*, etwa in der Höhe der Randpunkte.

Nr. 7. Unter Anwendung dieser Ergebnisse kann die Aufgabe, eine kleine, nur bei einer Modellecke, etwa im Punkt $\mathbf{5}$ vorhandene Restparallaxe dp_5 wegzuschaffen, nunmehr auf die folgende Weise gelöst werden: *Man ermittelt die Grenzlage des Grundpunktes \mathbf{G} der Ebene ν^b ($x = b$) nach einem der in Nr. 5 und 6 dargelegten Verfahren und wählt den Grundpunkt \mathbf{G}^0 von ν^0 ($x = 0$) wie oben an der Stelle Y^0, Z^0 (vgl. Abb. 1 oder auch Abb. 1 in der früheren Mitteilung¹). Mit \mathbf{G}^0 ist sodann auch die Strecke S_5 bekannt, und wir erhalten sowohl **A**) beim Winkelverfahren (s. oben Gleichung 3a) wie auch **B**) beim Folgebildanschluß (Gleichung 3b) sämtliche zum Wegschaffen dieser Parallaxe dp_5 erforderlichen Orientierungsgrößen.*