Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 49 (1951)

Heft: 2

Artikel: Quelques considérations didactiques sur les problèmes de compensation

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-208330

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Quelques considérations didactiques sur les problèmes de compensation

Par A. Ansermet

Le but de ces lignes n'est pas de développer des résultats bien nouveaux mais de mettre en évidence, surtout au point de vue didactique, certains aspects de problèmes usuels de compensation.

Traitons tout d'abord un cas concret: la mesure des angles par la méthode bien connue des secteurs (voir [1]). Examinons plus spécialement les résultats obtenus pour la Station Piz Michel ([1] p. 80). Il y avait douze directions dont quatre principales et 20 angles mesurés (11 angles indépendants, 9 surabondants ou 4 secteurs et 16 angles intermédiaires). Désignons par p_i les poids primitifs des angles et P_i les poids nouveaux (après compensation), i = 1, 2, 3....n (n = 20) et u = 11 (11 inconnues)

$i =$	p_i	P_i	$\frac{p_i}{P_i} = \frac{1}{K_i}$	$i =$	p_i	P_i	$\frac{p_i}{P_i} = \frac{1}{K_i}$
							5.51
1	6	15,0	0.40	11	8	13,8	0.58
2	8	13,0	0.62	12	4	8,5	0.47
3	4	12,6	0.32	13	7	10,0	0.70
4	8	14,2	0.56	14	5	8,6	0.58
5	11	16,2	0.68	15	5	8,6	0.58
6	12	17,0	0.71	16	6	15,2	0.39
7	3	5,4	0.56	17	4	9,5	0.42
8	3	5,4	0.56	18	4	6,6	0.61
9	2	5,0	0.40	19	4	6,6	0.61
10	4	5,7	0.70	20	5	8,9	0.56
			5.51	$\left[\frac{1}{K_i}\right] = \left[\frac{p_i}{P_i}\right]_{i=1}^{i=n} = u$			$11.01 = u$

où u est le nombre d'inconnues (u = 11); c'est un extrêmum (voir [5]).

La valeur moyenne $\left(\frac{1}{K}\right)_m = 0.55 = \frac{u}{n}$. $0.32 < {}^1/K < 0.71$

Ce calcul constitue un contrôle rapide et précieux. Le problème se pose d'étudier la loi de variation du *coefficient d'amplification* K ou de son inverse ${}^1/K$. Si les inconnues sont les coordonnées d'un point cette loi est mathématique (ellipse d'erreur).

Ce critérium permet de vérifier que la méthode des secteurs est bien correcte sans faire une compensation complète.

Considérons le cas simple de 3 secteurs de 120° et 6 angles intermédiaires de 60° puis admettons $p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 1$ (n = 9)

$$\text{secteur } l_7 + v_7 = (l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) \qquad v_1 = v_2$$
$$\text{secteur } l_8 + v_8 = (l_3 + v_3) + (l_4 + v_4) \qquad v_3 = v_4$$
$$\text{secteur } l_9 + v_9 = (l_5 + v_5) + (l_6 + v_6) \qquad v_5 = v_6$$

$$v_7 = v_8 = v_9$$

$$(l_7 + v_7) + (l_8 + v_8) + (l_9 + v_9) = 360^0$$

$$l_7 + v_7 = \frac{l_7 + 0.5\,(l_1 + l_2)}{1.5} + w/_3 \qquad (w = \text{écart de fermeture})$$

$$l_8 + v_8 = \ldots\ldots$$

$$l_9 + v_9 = \ldots\ldots$$

on trouve sans peine:

$$l_7 + v_7 = 120^0 + \frac{1}{9}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 2l_1 + 2l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

puis

$$l_1 + v_1 = 60^0 + \frac{1}{18}(4l_7 - 2l_8 - 2l_9 + 11l_1 - 7l_2 - l_3 - l_4 - l_5 - l_6)$$

et en appliquant la loi de propagation des poids

$$P_7 = P_8 = P_9 = 2.25 \quad (p_i = 1) \quad P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 18/11$$

$$\left[\frac{1}{K_i}\right]_{i=1}^{i=n} = 3 \cdot \frac{1}{2.25} + 6 \cdot \frac{11}{18} = \frac{12 + 33}{9} = 5 = u$$

On pourrait généraliser dans le cas de poids primitifs inégaux. Le soussigné se réserve de revenir sur le problème de la variation de K.

L'ellipse d'erreur en géométrie synthétique

L'étude analytique de cette ellipse a déjà été poussée à fond (voir par ex. [2] p. 206–249). L'ellipse d'erreur est d'essence géométrique. Elle peut être engendrée ponctuellement ou tangentiellement. Une ellipse d'erreur, considérée isolément, peut être déterminée sans faire intervenir des coordonnées. S'il s'agit d'un groupe d'ellipses, calculées simultanément, le cas est différent. Considérons l'équation primitive

$$L_i + v_i = f_i\,(x, y) \qquad (u = 2)$$

ou, sous forme linéaire, le signe du terme l_i étant conventionnel:

$$l_i + v_i = a_i\,dx + b_i\,dy \qquad (\text{ou aussi } -l_i)$$

Si les L_i sont des mesures de *longueur* on a

$$a_i = \sin \alpha_i \qquad b_i = \cos \alpha_i \qquad a_i^2 + b_i^2 = 1$$

L'orientation des axes de coordonnées étant arbitraire, on choisira cette orientation de manière à rendre nuls successivement a_i et b_i:

si $a_i = 0$ on a $\pm dy = l_i + v_i$ et $My = M_{l_i + v_i}$ (poids P_i)

si $b_i = 0$ on a $\pm dx = l_i + v_i$ et $Mx = M_{l_i + v_i}$ (poids P_i)

Les erreurs moyennes M_x, M_y ne sont plus des valeurs abstraites; leur interprétation est immédiate. Pour chaque indice i on a deux tangentes ($\pm M_{l_i + v_i}$) à l'ellipse d'erreur, symetriques par rapport au centre. Ce n'est plus nécessairement un problème de géométrie analytique. Pour mieux marquer ce caractère éliminons les inconnues dx et dy. Le mieux est de choisir d'abord $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & v_1 + l_1 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & v_2 + l_2 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & v_3 + l_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou la forme usuelle $A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + w = 0$

Si $n = 4$ le cas est moins simple; il y a deux conditions à choisir parmi les 4 combinaisons d'indices (123), (124), (134) et (234)

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3 + A_4 v_4 + w_1 = 0$$
$$B_1 v_1 + B_2 v_2 + B_3 v_3 + B_4 v_4 + w_2 = 0$$

Les poids P_i des quantités ($l_i + v_i$) sont calculables facilement:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\frac{A_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{AA}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{B_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{BB}{p} \cdot 1\right]} - \ldots\ldots \text{ et } \left[\frac{p_i}{P_i}\right]_{i=1}^{i=n} = u = 2$$

(voir [5]).

Cas particuliers: soit $p_i = 1$. L'ellipse a une forme circulaire pour

$P_1 = P_2 = P_3 = 1.5$ ($n = 3$) ou $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2$ ($n = 4$).

L'interprétation de ces résultats est aisée; on s'est bien libéré de la géométrie analytique et c'est possible aussi dans le cas de mesures angulaires. L'ellipse est définie par des tangentes (n paires).

Solution indéterminée. Considérons le cas d'observations conditionnelles:

$$[Av]_1^4 + w_1 = 0 \qquad \text{pour } n = 4$$
$$[Bv]_1^4 + w_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{où } [vv] = \min.$$

et en plus $\quad v_i = A_i K_1 + B_i K_2 + \ldots \qquad i = 1,2\ldots n$

Limitons à deux le nombre des conditions; il faut former le déterminant

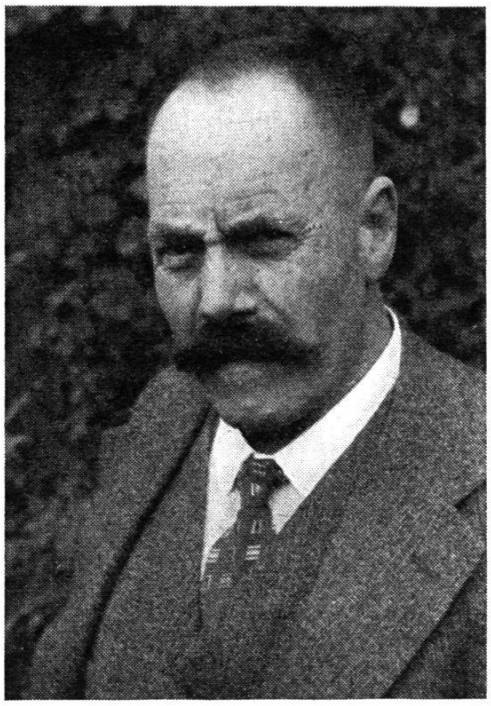
$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ A_4 & B_4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq 0\,?$$

L'application de la formule bien connue de Laplace donne

$|D| = \Sigma \begin{vmatrix} A_k & B_k \\ A_l & B_l \end{vmatrix}^2$ où les indices k et l sont choisis en épuisant toutes les combinaisons (voir aussi [3] p. 325–329). L'analogie avec le cas d'observations médiates est manifeste. Mais dans un cas l'ordre des mineurs M ($D = \Sigma M\overline{M}$) est égal au nombre de conditions et dans l'autre cas au nombre des inconnues.

[1] Baeschlin C.F., Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen 1925.
[2] Baeschlin, C.F., Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (I, II).
[3] Czuber E., Theorie der Beobachtungsfehler, 1891.
[4] Förstner G., Zeitschrift für Vermessungswesen 1930 (Heft 23).
[5] Ansermet A., Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen 1945 (Nr. 8).

Jakob Eigenmann †



Jakob Eigenmann, Grundbuchgeometer in Frauenfeld, ist am 12. November 1950 im Alter von 74 Jahren zur ewigen Ruhe eingegangen. Seine Tätigkeit auf unserem nicht leichten Arbeitsgebiet rechtfertigt es, seiner an dieser Stelle besonders zu gedenken.

Jakob Eigenmann, Bürger von Müllheim, geboren am 8. September 1876, war der älteste Sohn von 8 Kindern des Johannes Eigenmann, Land-