

# Sur la compensation des observations conditionnelles avec inconnues

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **49 (1951)**

Heft 8

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-208349>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Sur la Compensation des observations conditionnelles avec inconnues

Par *W. K. Bachmann,*

*Professeur à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne*

En voulant appliquer la méthode des moindres carrés à l'astronomie de position, on rencontre fréquemment des difficultés, dues essentiellement au fait que les problèmes ne se posent pas de la même façon qu'en géodésie. Dans son ouvrage [1] « Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung », † T. H. Niethammer a souvent recours à la théorie des erreurs, mais malheureusement en appliquant certaines règles dont on cherche en vain la démonstration. C'est certainement pour cette raison que M. le Professeur C. F. Baeschlin a repris l'examen de ces questions dans un article [2] intitulé « Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung ».

Dans tous ces problèmes d'astronomie de position, il s'agit en somme d'observations conditionnelles avec inconnues qui se présentent cependant sous une forme quelque peu spéciale. En traitant un problème d'observations conditionnelles, avec ou sans inconnues d'après la méthode des moindres carrés, on fait généralement intervenir les multiplicateurs de Lagrange pour la formation des équations normales. Nous allons indiquer ci-après une autre méthode de calcul, dont l'interprétation géométrique est facile, et retrouverons ainsi d'une autre façon tous les résultats qui ont été indiqués dans la publication [2] susmentionnée. Nous nous bornerons au cas de deux inconnues et de trois grandeurs observées par équation de condition. Mais il est entendu que les résultats ainsi obtenus restent encore valables dans le cas d'un nombre quelconque d'inconnues ou d'observations.

### § 1. Théorie générale

Soient

	$\tau, \omega$	les inconnues à déterminer	
(1.1)	$(x_i, y_i, z_i)$	les impacts mesurés	$i = 1, 2, \dots, n$
	$(X_i, Y_i, Z_i)$	les impacts compensés	$i = 1, 2, \dots, n.$

Nous admettrons que les grandeurs mesurées  $x_i, y_i, z_i$  se présentent toujours sous forme d'impacts  $(x_i, y_i, z_i)$  dans chacune des  $n$  équations de condition et, de plus, nous supposerons toutes les mesures indépendantes. Ainsi,  $x_i, y_i, z_i$  peuvent par exemple représenter les trois coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, raison pour laquelle nous utiliserons souvent l'expression « point » pour un impact  $(x, y, z)$ . Désignons les poids des grandeurs mesurées par  $p$  en mettant la grandeur mesurée en indice; ainsi,  $p_{x_i}$  désignera par exemple le poids de la mesure  $x_i$ . La nature des

problèmes qui se présentent en astronomie de position nous permet de supposer

$$(1.2) \quad \begin{array}{l} p_{x_1} = p_{x_2} = \dots = p_{x_n} = p_x \\ p_{y_1} = p_{y_2} = \dots = p_{y_n} = p_y \\ p_{z_1} = p_{z_2} = \dots = p_{z_n} = p_z \end{array}$$

sans restreindre la généralité du problème.

Par hypothèse, les impacts compensés  $(X_i, Y_i, Z_i)$  doivent vérifier les  $n$  équations de condition

$$(1.3) \quad F_i(\tau, \omega; X_i, Y_i, Z_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En désignant par  $(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$  les corrections que nous devons ajouter à l'impact observé  $(x_i, y_i, z_i)$  pour obtenir l'impact compensé  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , nous obtenons

$$(1.4) \quad X_i = x_i + v_{x_i} \quad Y_i = y_i + v_{y_i} \quad Z_i = z_i + v_{z_i}$$

En posant

$$(1.5) \quad \tau = \tau_0 + d\tau \quad \omega = \omega_0 + d\omega$$

où  $\tau_0$  et  $\omega_0$  sont des valeurs approchées des inconnues  $\tau$  et  $\omega$ , les équations (1.3) deviennent

$$(1.6) \quad F_i \left\{ \tau_0 + d\tau, \omega_0 + d\omega; X_i + v_{x_i}, Y_i + v_{y_i}, Z_i + v_{z_i} \right\} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Etant donné que les accroissements  $d\tau, d\omega, v_{x_i}, v_{y_i}$  et  $v_{z_i}$  sont toujours petits, nous allons développer ces fonctions en série en négligeant les termes supérieurs au premier ordre. Pour simplifier les écritures, nous posons

$$(1.7) \quad \begin{array}{l} F_i(\tau_0, \omega_0; x_i, y_i, z_i) = w_i \\ \frac{\partial F_i}{\partial \tau_0} = a_i \quad \frac{\partial F_i}{\partial \omega_0} = b_i \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \alpha_i \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \beta_i \quad \frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \gamma_i \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

et les équations de condition aux corrections deviennent ainsi

$$(1.8) \quad \boxed{a_i d\tau + b_i d\omega + \alpha_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i} + w_i = 0}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

ce qui est du reste la forme classique.

Pour donner une interprétation géométrique aux formules (1.8), nous introduisons un système de coordonnées cartésiennes orthogonales  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  pour chacune de ces équations en le définissant au moyen d'un trièdre direct unitaire trirectangle  $(\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$ ; voir figure 1.1. Dans cet espace euclidien, l'élément linéaire  $ds_i$  est alors défini par la relation

$$(1.9) \quad \boxed{ds_i^2 = d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2.}$$

Passons à un autre système de coordonnées rectilignes  $x_i, y_i, z_i$  en posant

$$(1.12) \quad \boxed{\xi_i = \sqrt{p_x} x_i \quad \eta_i = \sqrt{p_y} y_i \quad \zeta_i = \sqrt{p_z} z_i.}$$

En attribuant aux variables  $(x_i, y_i, z_i)$  les accroissements  $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$ , les équations (1.12) nous donnent par différentiation

$$(1.13) \quad \boxed{d\xi_i = \sqrt{p_x} v_{x_i} \quad d\eta_i = \sqrt{p_y} v_{y_i} \quad d\zeta_i = \sqrt{p_z} v_{z_i}}$$

et l'élément linéaire (1.9) devient ainsi

$$(1.14) \quad \boxed{ds_i^2 = p_x v_{x_i}^2 + p_y v_{y_i}^2 + p_z v_{z_i}^2}$$

c'est-à-dire que le déplacement différentiel  $\vec{dr}_i$ , qui résulte d'un accroissement  $(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$  des coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  peut s'écrire

$$(1.15) \quad \boxed{\vec{dr}_i = \sqrt{p_x} v_{x_i} \vec{i}_i + \sqrt{p_y} v_{y_i} \vec{j}_i + \sqrt{p_z} v_{z_i} \vec{k}_i.}$$

Mais les corrections  $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$  doivent vérifier les équations de condition (1.8) et rendre minimum l'expression

$$[p_x v_x v_x] + [p_y v_y v_y] + [p_z v_z v_z]$$

ce qui nous donne, en considérant les équations (1.14) et (1.15)

$$(1.16) \quad \sum_{i=1}^n ds_i^2 = \sum_{i=1}^n \vec{dr}_i \cdot \vec{dr}_i = \text{minimum.}$$

Voilà donc un premier résultat important:

$$(I) \quad \text{Il faut que la somme des carrés des distances des « points observés » } (x_i, y_i, z_i) \text{ aux « points compensés » } (X_i, Y_i, Z_i) \text{ soit minimum.}$$

Mais ce n'est pas tout, nous devons encore tenir compte des équations de condition (1.8) ou (1.3).

L'expression

$$(1.17) \quad F_i = F_i (\tau, \omega; x_i, y_i, z_i)$$

représente une fonction scalaire de  $(x_i, y_i, z_i)$  lorsqu'on fixe les valeurs de  $\tau$  et de  $\omega$ .

Si nous attribuons à  $(x_i, y_i, z_i)$  les accroissements  $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$ , la fonction  $F_i$  subit une variation  $dF_i$  donnée par la formule

$$(1.18) \quad dF_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} v_{x_i} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i} v_{y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial z_i} v_{z_i}$$

qui peut s'écrire, si nous faisons usage des notations (1.7):

$$(1.19) \quad dF_i = \alpha_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i}.$$

Introduisons le gradient de la fonction  $F_i$ , qui est défini par la relation

$$(1.20) \quad dF_i = \vec{\text{grad}} F_i \cdot \vec{dr}_i$$

où  $\vec{dr}_i$  représente le déplacement différentiel du point  $P_i (x_i, y_i, z_i)$  dont les composantes orthogonales sont données par l'équation (1.15). Nous écrivons l'équation (1.19) sous la forme

$$(1.21) \quad dF_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{p_x}} \cdot \sqrt{p_x} v_{x_i} + \frac{\beta_i}{\sqrt{p_y}} \cdot \sqrt{p_y} v_{y_i} + \frac{\gamma_i}{\sqrt{p_z}} \cdot \sqrt{p_z} v_{z_i}$$

et obtenons ainsi

$$(1.22) \quad \vec{\text{grad}} F_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{p_x}} \vec{i}_i + \frac{\beta_i}{\sqrt{p_y}} \vec{j}_i + \frac{\gamma_i}{\sqrt{p_z}} \vec{k}_i.$$

Les équations de condition aux corrections deviennent

$$(1.23) \quad \alpha_i d\tau + b_i d\omega + w_i + \vec{\text{grad}} F_i \cdot \vec{dr}_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Chacune des équations (1.3) définissant une surface  $S_i$  si nous considérons  $(X_i, Y_i, Z_i)$  comme variables et  $(\tau, \omega)$  comme constantes, les relations (1.23) nous donnent tous les déplacements  $\vec{dr}_i$  qu'on peut imprimer au « point observé »  $(x_i, y_i, z_i)$  pour l'amener sur la surface  $S_i$ . Voilà donc le second résultat important. En appelant les surfaces  $S_i$  « surfaces de condition », nous pouvons dire que

(II) Les équations de condition aux corrections nous donnent tous les déplacements  $\vec{dr}$  qu'on peut imprimer aux « points observés »  $(x_i, y_i, z_i)$  pour les amener sur les surfaces de conditions  $S_i$ .

Au point de vue géométrique, la compensation des observations conditionnelles avec inconnues est ainsi ramenée aux conditions (I) et (II) indiquées.

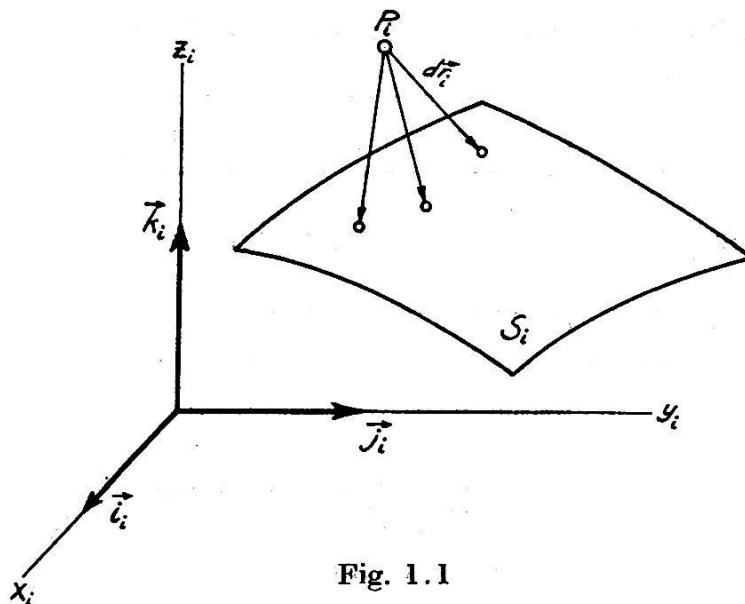


Fig. 1.1

En reprenant l'équation (1.16), on constate que *chacune* des grandeurs  $\vec{dr}_i \cdot \vec{dr}_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  doit être minimum, puisqu'elles sont toutes positives. Mais ceci ne peut avoir lieu que si le déplacement  $\vec{dr}_i$  est orthogonal à la surface  $S_i$ . Il en résulte, aux différentielles d'ordre supérieur près, que *les vecteurs*  $\vec{\text{grad}} F_i$  et  $\vec{dr}_i$  *doivent être parallèles*. Nous obtenons, par conséquent, en élevant l'équation (1.23) au carré

$$(a_i d\tau + b_i d\omega + w_i)^2 = (\vec{\text{grad}} F_i)^2 \cdot (\vec{dr}_i)^2$$

d'où nous tirons

$$(1.24) \quad \boxed{(\vec{dr}_i)^2 = \frac{(a_i d\tau + b_i d\omega + w_i)^2}{(\vec{\text{grad}} F_i)^2}}$$

et le principe des moindres carrés (1.16) devient dès lors

$$(1.25) \quad \boxed{\sum_{i=1}^n (\vec{dr}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i d\tau + b_i d\omega + w_i)^2}{(\vec{\text{grad}} F_i)^2} = \text{minimum}}$$

Mais cette équation peut être écrite plus simplement si l'on tient compte de (1.22) qui donne

$$(1.26) \quad \boxed{(\vec{\text{grad}} F_i)^2 = \frac{\alpha_i \alpha_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}}$$

Si nous posons

$$(1.27) \quad \boxed{\frac{1}{p_i} = \frac{\alpha_i \alpha_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}}$$

l'équation (1.25) devient

$$(1.28) \quad \boxed{\sum_{i=1}^n (\vec{dr}_i)^2 = \sum_{i=1}^n p_i (a_i d\tau + b_i d\omega + w_i)^2}$$

ce qui est une fonction des corrections inconnues  $d\tau$  et  $d\omega$ . Elle devient minimum (ou stationnaire) lorsque ses dérivées partielles par rapport aux inconnues  $d\tau$  et  $d\omega$  sont nulles, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(1.29) \quad \sum_{i=1}^n p_i a_i (a_i d\tau + b_i d\omega + w_i) = 0$$

$$(1.30) \quad \sum_{i=1}^n p_i b_i (a_i d\tau + b_i d\omega + w_i) = 0$$

ou bien

$$(1.31) \quad \begin{aligned} [paa] d\tau + [pab] d\omega + [paw] &= 0 \\ [pab] d\tau + [pbb] d\omega + [pbw] &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu les deux équations normales permettant de calculer les corrections  $d\tau$  et  $d\omega$  qu'il faut ajouter aux valeurs provisoires  $\tau_0$  et  $\omega_0$  pour obtenir les valeurs compensées  $\tau$  et  $\omega$  des inconnues.

Calculons encore l'erreur moyenne  $\mu$  à craindre sur l'unité de poids. Nous avons en tout  $n$  équations de condition dans lesquelles figurent les inconnues  $\tau$  et  $\omega$ . En éliminant ces dernières, il nous reste  $(n-2)$  équations de conditions entre les grandeurs mesurées, d'où

$$(1.32) \quad \mu^2 = \frac{[pvv]}{n-2}.$$

La somme  $[pvv]$  peut être calculée à partir de l'équation (1.28) puisqu'on a

$$(1.35) \quad \sum_{i=1}^n (d\vec{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (p_x v_{x_i}^2 + p_y v_{y_i}^2 + p_z v_{z_i}^2) = [pvv]$$

ou bien d'après (1.28)

$$(1.34) \quad [pvv] = \begin{cases} \{ [paa] d\tau + [pab] d\omega + [paw] \} d\tau \\ \{ [pab] d\tau + [pbb] d\omega + [pbw] \} d\omega \\ \{ [paw] d\tau + [pbw] d\omega + [pww] \} \end{cases}$$



et si nous tenons compte des équations normales

$$(1.35) \quad [p_{vv}] = [p_{aw}] d\tau + [p_{bw}] d\omega + [p_{ww}]$$

formule bien connue de la théorie des observations médiates. Une règle mnémotechnique permet de la déduire facilement des équations normales (1.31)

### § 2. Introduction d'observations fictives

Les résultats que nous venons d'obtenir surprennent de prime abord; on est notamment étonné de constater que les poids  $p_x, p_y, p_z$  des observations ne figurent pas explicitement dans les équations normales (1.31) et qu'ils n'y entrent que par la combinaison (1.27). Ce résultat s'explique cependant lorsqu'on cherche la signification des grandeurs  $p_i$ , introduites par les équations (1.27). En effet, reprenons les équations de condition aux corrections (1.8) en les écrivant sous la forme

$$(2.1) \quad -(\alpha_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i}) = +(\alpha_i d\tau + \beta_i d\omega + w_i)$$

où nous avons placé dans le membre gauche tous les termes contenant des corrections à apporter aux observations. Nous nous bornons maintenant à ne considérer que le membre gauche de l'équation (2.1). En y remplaçant les corrections par les mesures  $x_i, y_i, z_i$ , il prend la forme

$$(2.2) \quad \Phi_i = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i.$$

Calculons le poids  $p_{\Phi_i}$  de la fonction  $\Phi_i$ . Nous avons, en introduisant d'abord les coefficients de poids

$$(2.3) \quad Q_{\Phi_i \Phi_i} = \frac{1}{p_{\Phi_i}} \quad Q_{xx} = \frac{1}{p_x} \quad Q_{yy} = \frac{1}{p_y} \quad Q_{zz} = \frac{1}{p_z}$$

$$(2.4) \quad Q_{\Phi_i \Phi_i} = \alpha_i \alpha_i Q_{xx} + \beta_i \beta_i Q_{yy} + \gamma_i \gamma_i Q_{zz}$$

et en passant ensuite au poids

$$(2.5) \quad \frac{1}{p_{\Phi_i}} = \frac{\alpha_i \alpha_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}$$

En comparant les deux équations (1.27) et (2.5), nous voyons qu'on a

$$(2.6) \quad \boxed{p\Phi_i = p_i}$$

d'où il résulte que les grandeurs  $p_i$  précédemment introduites ne sont rien d'autre que les poids des fonctions  $\Phi_i$  définies par l'équation (2.2). Mais si nous posons dans (2.1)

$$(2.7) \quad \boxed{v_i = - (a_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i})}$$

ces équations s'écrivent

$$(2.8) \quad \boxed{v_i = + (a_i d\tau + b_i d\omega + w_i)}$$

ce qui est la forme caractéristique des équations aux erreurs d'observations médiates. Ainsi, les relations (2.8) peuvent être interprétées comme équations aux erreurs de  $n$  observations médiates fictives. En leur attribuant respectivement les poids  $p_i$ , précédemment définis, et en formant les équations normales, nous retombons sur les équations (1.31) et sur la formule (1.32) pour l'erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids. Nous constatons donc que

Dans le problème de compensation d'observations médiates avec inconnues, que nous venons de traiter, la combinaison linéaire des corrections

$$a_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i}$$

rentrant dans les équations de condition aux corrections peut être remplacée par une correction fictive  $v_i$  définie par l'équation

$$v_i = a_i v_{x_i} + \beta_i v_{y_i} + \gamma_i v_{z_i}$$

dont le poids  $p_i$  est donné par

$$\frac{1}{p_i} = \frac{a_i a_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}$$

et l'on est ainsi amené à un problème de compensation d'observations médiates.

Il est entendu que ce résultat aurait pu être obtenu plus rapidement. Si nous nous sommes arrêtés un peu plus longuement sur ce point, c'est pour mieux montrer que

Les corrections des inconnues ne rentrent pas individuellement dans la compensation, mais uniquement par leurs combinaisons linéaires figurant dans les équations de condition aux corrections et les poids de ces combinaisons peuvent être déterminés en appliquant la loi de la propagation des erreurs.

Ce résultat est d'une grande importance pratique. Il montre en particulier qu'il n'est pas nécessaire de connaître toutes les grandeurs entachées d'erreurs. Nous pouvons, en effet, toujours remplacer l'équation de condition aux corrections (1.8) par l'équation aux erreurs fictive (2.8) en choisissant convenablement son poids  $p_i$ . Il est entendu que le poids  $p_i$  est relié à  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  par les équations (1.27), mais il sera souvent plus simple de le déterminer directement plutôt que de passer par  $p_x, p_y, p_z$ .

Nous constatons donc qu'il suffit d'introduire une correction, fictive ou non, dans chacune des équations de condition aux corrections, à condition de choisir convenablement son poids.

Ainsi, nous pouvons par exemple nous borner à ne considérer que la correction de  $x$  dans le problème précédent. En la désignant par  $v_{x_i}'$  les équations (1.8) deviennent

$$(2.9) \quad a_i d\tau + b_i d\omega + a_i v_{x_i}' + w_i = 0$$

Si  $p_{x_i}'$  représente dans ce cas le poids de cette observation fictive, nous devons avoir

$$(2.10) \quad \frac{a_i a_i}{p_{x_i}'} = \frac{a_i a_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}$$

ce qui nous donne les  $p_{x_i}'$  en fonction de  $p_x, p_y$  et  $p_z$ .

Mais rien ne nous empêche de considérer une observation fictive de l'une des inconnues  $\tau$  par exemple. Dans ce cas,  $x_i, y_i, z_i$  jouent le rôle de paramètres, exempts d'erreurs, et les équations de condition aux corrections (1.8) deviennent

$$(2.11) \quad a_i d\tau + b_i d\omega + w_i + a_i v_{\tau_i} = 0$$

le poids  $p_{\tau_i}$  de l'observation fictive  $\tau_i$  étant donné par la relation

$$(2.12) \quad \frac{a_i a_i}{p_{\tau_i}} = \frac{a_i a_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}$$

On peut même aller plus loin en considérant comme observation fictive une fonction de l'une ou de plusieurs des inconnues. Soit  $\varphi_i = \varphi_i(\tau, \omega)$

cette fonction. Nous écrivons alors les équations de condition aux corrections sous la forme

$$(2.13) \quad a_i d\tau + b_i d\omega + w_i + v_{\varphi_i} = 0$$

et il suffit maintenant de choisir pour poids  $p_{\varphi_i}$  de cette fonction

$$(2.14) \quad \frac{1}{p_{\varphi_i}} = \frac{\alpha_i \alpha_i}{p_x} + \frac{\beta_i \beta_i}{p_y} + \frac{\gamma_i \gamma_i}{p_z}.$$

Mais nous tournons dans un cercle vicieux et arrivons chaque fois au même résultat. L'essentiel dans ce que nous venons de dire est que les équations (1.8) peuvent toujours être remplacées par des équations aux erreurs fictives de la forme

$$(2.15) \quad v_i = a_i d\tau + b_i d\omega + w_i$$

sans préciser la nature des  $v_i$  à condition de choisir convenablement les poids de ces dernières équations aux erreurs.

Pour bien se rendre compte de l'importance pratique de ces résultats, on est obligé de considérer des problèmes particuliers et notamment des problèmes d'astronomie de position. Mais comme ceci nous amènerait trop loin, nous espérons pouvoir y revenir plus tard.

*Publications:*

- [1] Th. Niethammer « Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung ».
- [2] C. F. Baeschlin « Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung ». Schweiz. Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, 1948.

## Le calcul d'une paire d'ellipses d'erreur dont la forme est circulaire

*Par A. Ansermet, Professeur, La Tour-de-Peilz*

Le calcul des réseaux géodésiques est effectué tantôt point par point, tantôt par groupes de points. Les deux modes de détermination présentent des avantages et des inconvénients qui sont bien connus des praticiens. En opérant point par point il est aisé de fixer a priori les conditions pour lesquelles l'ellipse d'erreur a une forme circulaire (voir [1] p. 239-243 et [2] p. 29-33). Il faut exprimer que l'orientation des axes de l'ellipse est indéterminée:

$$(1) \quad \operatorname{tg} 2 N = \frac{\left[ p \frac{\sin 2 \varphi}{s^2} \right]}{\left[ p \cdot \frac{\cos 2 \varphi}{s^2} \right]} = \frac{0}{0} \quad (N = \text{azimut des axes})$$